ગુજરાત રાજ્યના શિક્ષણ વિભાગના પત્ર-ક્રમાંક
મશબ/1218/272/છ, તા.14/03/2018

ગણિત

ધોરણ IX

પ્રતિજ્ઞાપત્ર

ભારત મારો દેશ છે.
બધાં ભારતીયો મારાં ભાઈબહેન છે.
હું મારા દેશને ચાહું છું અને તેના સમૃદ્ધ અને
વૈવિધ્યપૂર્ણ વારસાનો મને ગર્વ છે.
હું સદાય તેને લાયક બનવા પ્રયત્ન કરીશ.
હું મારાં માતાપિતા, શિક્ષકો અને વડીલો પ્રત્યે આદર રાખીશ
અને દરેક જણ સાથે સભ્યતાથી વર્તીશ.
હું મારા દેશ અને દેશબાંધવોને મારી નિષ્ઠા અર્પું છું.
તેમનાં કલ્યાણ અને સમૃદ્ધિમાં જ મારું સુખ રહ્યું છે.

રાજ્ય સરકારની વિનામૂલ્યે યોજના હેઠળનું પુસ્તક

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ
'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર-382010

અનુવાદ

ડૉ. એ. પી. શાહ(કન્વિનર)
શ્રી જયકૃષ્ણ એન. ભટ્ટ
શ્રી વિજય વોરા
શ્રી હિતેશકુમાર વી. પંડ્યા
ડૉ. હરેશ પી. ભુટક
ડૉ. અતુલભાઈ કે. વ્યાસ
ડૉ. પ્રવિણચંદ્ર જોષી
ડૉ. દિપક પટેલ

સમીક્ષક

ડૉ. એ. એચ. હાસમણી
ડૉ. પી. આઇ. અંધારીયા
શ્રી એમ. એસ. જાજલ
ડૉ. કાનજીભાઇ વી. પટેલ
ડૉ. એસ. આર. ગજેરા
શ્રી ઈન્દ્રવદન એ. શાહ
શ્રી એચ. બી. ડોબરીયા
શ્રી કલ્પેશ ડી. અખાણી
શ્રી યોગેશ એન. દેવલુક

ભાષાશુદ્ધિ

શ્રી વિજય પારેખ

સંયોજન

શ્રી આશિષ એચ. બોરીસાગર
(વિષય-સંયોજક : ગણિત)

નિર્માણ-આયોજન

શ્રી હરેન શાહ
(નાયબ નિયામક : શૈક્ષણિક)

મુદ્રણ-આયોજન

શ્રી હરેશ એસ. લીમ્બાચીયા
(નાયબ નિયામક : ઉત્પાદન)

પ્રસ્તાવના

રાષ્ટ્રીય સ્તરે સમાન અભ્યાસક્રમ રાખવાની સરકારશ્રીની નીતિના અનુસંધાને ગુજરાત સરકાર તથા ગુજરાત માધ્યમિક અને ઉચ્ચતર માધ્યમિક શિક્ષણ બોર્ડ દ્વારા ઠરાવ ક્રમાંકઃ મશબ/1217/1036/છ તા.25/10/2017 થી શાળા કક્ષાએ NCERT ના પાઠ્યપુસ્તકોનો સીધો જ અમલ કરવાનો નિર્ણય કરવામાં આવ્યો. તેને અનુલક્ષીને NCERT, નવી દિલ્હી દ્વારા પ્રકાશિત **ધોરણ 9** ના **ગણિત** વિષયના પાઠ્યપુસ્તકનો ગુજરાતીમાં અનુવાદ કરાવીને વિદ્યાર્થીઓ સમક્ષ મૂકતાં ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ આનંદ અનુભવે છે.

આ પાઠ્યપુસ્તકનો અનુવાદ તથા તેની સમીક્ષા નિષ્ણાત પ્રાધ્યાપકો અને શિક્ષકો પાસે કરાવવામાં આવ્યા છે અને સમીક્ષકોનાં સૂચનો અનુસાર હસ્તપ્રતમાં યોગ્ય સુધારા-વધારા કર્યા પછી આ પાઠ્યપુસ્તક પ્રસિદ્ધ કરતાં પહેલાં આ પાઠ્યપુસ્તકની મંજૂરી માટે એક રાજ્ય કક્ષાની સમિતિની રચના કરવામાં આવી. આ સમિતિની સાથે NCERT ના પ્રતિનિધિ તરીકે આર.આઇ.ઇ. ભોપાલથી ઉપસ્થિત રહેલા નિષ્ણાતોની સાથે એક ત્રિદિવસીય કાર્યશિબિરનું આયોજન કરવામાં આવ્યું અને પાઠ્યપુસ્તકને અંતિમ સ્વરૂપ આપવામાં આવ્યું, જેમાં ડૉ. એ. પી. શાહ, શ્રી જયકૃષ્ણ ભટ્ટ, ડૉ. એસ. આર. ગજેરા, શ્રી મનોજકુમાર ઉપાધ્યાય, શ્રી દિવ્યાંશુ દવે, ડૉ. સુરેશ મકવાના(આર.આઇ.ઇ. ભોપાલ), શ્રી અજી થોમસ(આર.આઇ.ઇ. ભોપાલ) ઉપસ્થિત રહ્યા હતા અને તેમણે પોતાના કિંમતી સૂચનો અને માર્ગદર્શન પૂરા પાડ્યા છે.

પ્રસ્તુત પાઠ્યપુસ્તકને રસપ્રદ, ઉપયોગી અને ક્ષતિરહિત બનાવવા માટે માન. અગ્રસચિવશ્રી(શિક્ષણ) દ્વારા અંગત રસ લઈને જરૂરી માર્ગદર્શન આપવામાં આવ્યું છે. આ પાઠ્યપુસ્તકની ગુણવત્તા જાળવવા માટે મંડળ દ્વારા પૂરતી કાળજી લેવાઈ છે, તેમ છતાં શિક્ષણમાં રસ ધરાવનાર વ્યક્તિઓ પાસેથી પુસ્તકની ગુણવત્તા વધારે તેવાં સૂચનો આવકાર્ય છે.

NCERT, નવી દિલ્હીના સહકાર બદલ તેમના આભારી છીએ.

પી. ભારતી (IAS)
નિયામક
તા.19-11-2019

કાર્યવાહક પ્રમુખ
ગાંધીનગર

પ્રથમ આવૃત્તિ : 2018, પુનઃ મુદ્રણ : 2019, 2020

પ્રકાશક : ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, 'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર વતી પી. ભારતી, નિયામક

મુદ્રક :

Foreword

The National Curriculum Framework (NCF), 2005, recommends that children's life at school must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the national Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognize that, given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

This aims imply considerable change is school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making children's life at school a happy experience, rather then a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

The National Council of Educational Research and Training (NCERT) appreciates the hard work done by the textbook development committee responsible for this book. We wish to thank the Chairperson of the advisory group in science and mathematics, Professor J.V. Narlikar and the Chief Advisor for this book, Professor P. Sinclair of IGNOU, New Delhi for guiding the work of this committee. Several teachers contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are indebted to the institutions and organizations which have generously permitted us to draw upon their resources, material and

personnel. We are especially grateful to the members of the National Monitoring Committee, appointed by the Department of Secondary and Higher Education, Ministry of Human Resource Development under the Chairpersonship of Professor Mrinal Miri and Professor G.P. Deshpande, for their valuable time and contribution. As an organisation committed to systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

Director

New Delhi
20 December 2005

National Council of Educational
Research and Training

Textbook Development Committee

Chairperson, Advisory Group in Science and Mathematics

J.V. Narlikar, *Emeritus Professor*, *Chairman,* Advisory Committee, Inter University Centre for Astronomy & Astrophysics (IUCAA), Ganeshkhind, Pune University, Pune

Chief Advisor

P. Sinclair, Director, NCERT and *Professor of Mathematics*, IGNOU, New Delhi

Chief Coordinator

Hukum Singh, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT

Members

A.K. Wazalwar, *Professor and Head,* DESM, NCERT

Anjali Lal, *PGT*, DAV Public School, Sector-14, Gurgaon

Anju Nirula, *PGT*, DAV Public School, Pushpanjali Enclave, Pitampura, Delhi

G.P. Dikshit, *Professor* (Retd.), Department of Mathematics & Astronomy, Lucknow University, Lucknow

K.A.S.S.V. Kameswara Rao, *Associate Professor*, Regional Institute of Education, Bhubaneswar

Mahendra R. Gajare, *TGT,* Atul Vidyalya, Atul, Dist. Valsad

Mahendra Shanker, *Lecturer* (S.G.) (Retd.), NCERT

Rama Balaji, *TGT*, K.V., MEG & Centre, ST. John's Road, Bangalore

Sanjay Mudgal, *Lecturer*, CIET, NCERT

Shashidhar Jagadeeshan, *Teacher and Member,* Governing Council, Centre for Learning, Bangalore

S. Venkataraman, *Lecturer*, School of Sciences, IGNOU, New Delhi

Uaday Singh, *Lecturer*, DESM, NCERT

Ved Dudeja, *Vice-Principal* (Retd.), Govt. Girls Sec. School, Sainik Vihar, Delhi

Member-Coordinator

Ram Avtar, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT (till December 2005)

R.P. Maurya, *Professor*, DESM, NCERT (Since January 2006)

Acknowledgements

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop: A.K. Saxena, *Professor* (Retd.), Lucknow University, Lucknow; Sunil Bajaj, *HOD*, SCERT, Gurgaon; K.L. Arya, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT; Vandita Kalra, *Lecturer,* Sarvodaya Kanya Vidyalya, Vikas Puri, District Centre, New Delhi; Jagdish Singh, *PGT,* Sainik School, Kapurthala; P.K. Bagga, *TGT,* S.B.V. Subhash Nagar, New Delhi; R.C. Mahana, *TGT,* Kendriya Vidyalya, Sambalpur; D.R. Khandave, *TGT,* JNV, Dudhnoi, Goalpara; S.S. Chattopadhyay, *Assistant Master,* Bidhan Nagar Government High School, Kolkata; V.A. Sujatha, *TGT,* K.V. Vasco No. 1, Goa; Akila Sahadevan, *TGT,* K.V., Meenambakkam, Chennai; S.C. Rauto, *TGT,* Central School for Tibetans, Mussoorie; Sunil P. Xavier, *TGT,* JNV, Neriyamangalam, Ernakulam; Amit Bajaj, *TGT,* CRPF Public School, Rohini, Delhi; R.K. Pande, *TGT,* D.M. School, RIE, Bhopal; V. Madhavi, *TGT,* Sanskriti School, Chanakyapuri, New Delhi; G. Sri Hari Babu, *TGT,* JNV, Sirpur Kagaznagar, Adilabad; and R.K. Mishra, *TGT*, A.E.C. School, Narora.

Special thanks are due to M. Chandra, *Professor* and *Head* (Retd.), DESM, NCERT for her support during the development of this book.

The Council acknowledges the efforts of *Computer Incharge,* Deepak Kapoor; *D.T.P. Operator,* Naresh Kumar; *Copy Editor,* Pragati Bhardwaj; and *Proof Reader,* Yogita Sharma.

Contribution of APC–Office, administration of DESM, Publication Department and Secretariat of NCERT is also duly acknowledged.

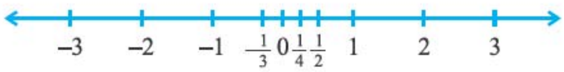
અનુક્રમણિકા

પ્રકરણ 1

સંખ્યા પદ્ધતિ

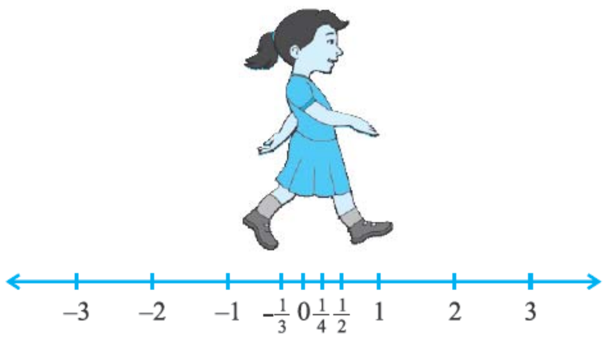
1.1 પ્રાસ્તાવિક

અગાઉના વર્ગમાં તમે સંખ્યારેખા વિશે શીખી ગયાં છો અને વિવિધ પ્રકારની સંખ્યાઓનું સંખ્યારેખા પર નિરૂપણ કેવી રીતે કરી શકાય એ પણ શીખી ગયાં છો (આકૃતિ 1.1 જુઓ).



આકૃતિ 1.1 સંખ્યારેખા

કલ્પના કરો કે તમે શૂન્યથી ચાલવાનું શરૂ કરો છો અને સંખ્યારેખા પર ધન દિશામાં ચાલો છો. જ્યાં સુધી તમે જોઈ શકો છો (ક્ષિતિજ સુધી) ત્યાં સુધી તમને સંખ્યાઓ, સંખ્યાઓ અને સંખ્યાઓ જ જોવા મળે છે.



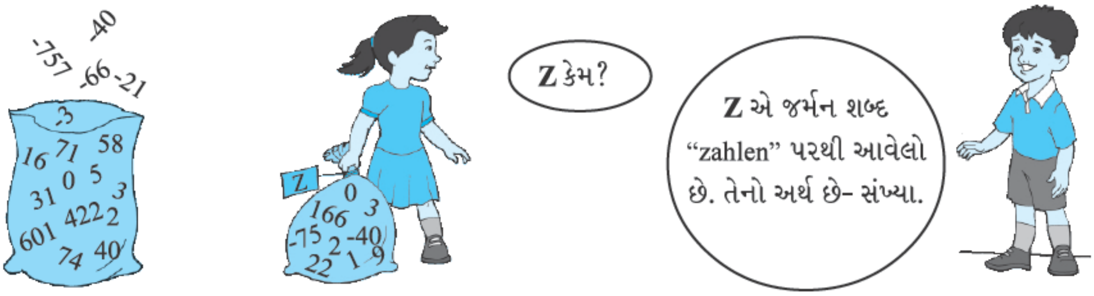
આકૃતિ 1.2

ધારો કે તમે સંખ્યારેખા પર ચાલવાનું શરૂ કરો છો અને કેટલીક સંખ્યાઓ એકત્રિત કરતાં જાવ છો. આ સંખ્યાઓને એકત્રિત કરવા માટે એક થેલો તૈયાર રાખો.

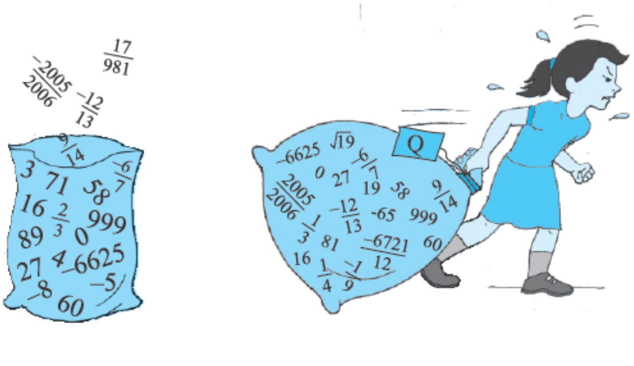
શક્ય છે કે તમે 1, 2, 3 અને આવી બધી ફક્ત ***પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓને*** *(natural numbers)* લેવાની શરૂઆત કરો છો. તમે જાણો છો કે આ યાદી હંમેશાં આગળ વધતી જ જાય છે. આવું કેમ જણાય છે? આમ, હવે તમારા થેલામાં પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ ભરાઈ ગઈ છે. તમને યાદ હશે કે આ પ્રકારની સંખ્યાના જથ્થાને સંકેતમાં N વડે દર્શાવાય છે.

હવે તમે પાછા ફરી અને આનાથી વિરુધ્ધ દિશામાં ચાલતાં શૂન્યને લઈને તેને પણ થેલામાં મૂકી દો. આથી તમને ***પૂર્ણ સંખ્યાઓ*** *(Whole numbers)* નો એક જથ્થો મળે છે. તેને સંકેતમાં W વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

હવે તમને ઘણીબધી ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ દેખાશે. તમે આ બધી ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓને પણ થેલામાં મૂકી દો. આ નવો જથ્થો શેનો બનેલો છે ? તમને યાદ હશે કે આ ***પૂર્ણાંકો*** *(Integers)*નો જથ્થો છે અને સંકેતમાં તેને *Z* વડે દર્શાવવામાં આવે છે..



શું હજુ પણ આ રેખા પર સંખ્યાઓ બાકી રહી છે ? નિશ્ચિતપણે, હા. રેખા પર $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ અથવા $\frac{-2005}{2006}$ જેવી સંખ્યાઓ પણ છે. જો તમે આ પ્રકારની બધી સંખ્યાઓ થેલામાં એકત્રિત કરો તો તમને ***સંમેય સંખ્યાઓ*** *(Rational numbers)*નો જથ્થો મળશે.



સંખ્યાના આ જથ્થાને Q વડે દર્શાવાય છે. અંગ્રેજી શબ્દ Rational એ ratio પરથી આવેલો છે અને Q સંકેત એ અંગ્રેજી શબ્દ Quotient પરથી લેવામાં આવ્યો છે.

તમને યાદ હશે કે સંમેય સંખ્યાની વ્યાખ્યા નીચે પ્રમાણે છે :

જો p અને q પૂર્ણાંક હોય અને q શૂન્યેતર હોય તથા સંખ્યા ‘r’ને $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં લખી શકાય તો ‘r’ને સંમેય સંખ્યા કહે છે. (અહીં, આપણે $q \neq 0$નો આગ્રહ કેમ રાખીએ છીએ ?)

જુઓ કે થેલામાં રહેલી બધી સંખ્યાઓને p પૂર્ણાંક તથા q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તેવા $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં લખી શકાય છે. ઉદાહરણ તરીકે -25 ને $\frac{-25}{1}$ ના સ્વરૂપમાં લખી શકાય છે. અહીંયા $p = -25$ અને $q = 1$ છે. આથી સંમેય સંખ્યાઓમાં પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ, પૂર્ણ સંખ્યાઓ અને પૂર્ણાંકોનો પણ સમાવેશ થાય છે.

તમે એ પણ જાણો છો કે સંમેય સંખ્યાઓને p પૂર્ણાંક હોય તથા q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તેવા $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં અનન્ય રીતે દર્શાવી શકાતી નથી. ઉદાહરણ તરીકે $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{10}{20} = \frac{25}{50} = \frac{47}{94}$ વગેરે. આ ***સમાન સંમેય સંખ્યાઓ*** (*Equivalent rational numbers*) અથવા ***અપૂર્ણાંક*** છે, છતાં પણ આપણે $\frac{p}{q}$ સંમેય સંખ્યા છે તેમ કહીએ છીએ અથવા $\frac{p}{q}$ નું સંખ્યારેખા પર નિરૂપણ કરીએ છીએ ત્યારે સ્વીકારી લઈએ છીએ કે $q \neq 0$ અને p અને q ને 1 સિવાયનો કોઈ સામાન્ય અવયવ નથી(એટલે કે p અને q પરસ્પર અવિભાજ્ય(*co-prime*) છે). આમ, સંખ્યારેખા પર $\frac{1}{2}$ ને સમાન હોય તેવી અગણિત સંખ્યાઓમાંથી $\frac{1}{2}$ ને જ લઈએ છીએ અને $\frac{1}{2}$ તેને સમાન બધી સંખ્યાઓનું નિરૂપણ કરે છે.

ચાલો હવે આપણે અગાઉના ધોરણમાં શીખી ગયેલાં હોઈએ તેવી જુદી જુદી સંખ્યાઓનાં ઉદાહરણો ઉકેલીએ.

ઉદાહરણ 1 : નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય ? કારણ સહિત ઉત્તર આપો.

(i) દરેક પૂર્ણ સંખ્યા એ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.

(ii) દરેક પૂર્ણાંક એ સંમેય સંખ્યા છે.

(iii) દરેક સંમેય સંખ્યા એ પૂર્ણાંક છે.

ઉકેલ : (i) આ વિધાન અસત્ય છે, કારણ કે 0 એ પૂર્ણ સંખ્યા છે, પરંતુ પ્રાકૃતિક સંખ્યા નથી.

(ii) આ વિધાન સત્ય છે, કારણ કે દરેક પૂર્ણાંક m ને $\frac{m}{1}$ ના સ્વરૂપમાં લખી શકાય છે અને તેથી તે સંમેય સંખ્યા છે.

(iii) આ વિધાન અસત્ય છે, કારણ કે $\frac{3}{5}$ એ સંમેય સંખ્યા છે, પરંતુ પૂર્ણાંક નથી.

ઉદાહરણ 2 : 1 અને 2 વચ્ચેની પાંચ સંમેય સંખ્યાઓ શોધો.

આ પ્રશ્નનો ઉકેલ ઓછામાં ઓછી બે રીતે વિચારી શકાય :

રીત 1 : તમને યાદ હશે કે તમે r અને s વચ્ચેની એક સંમેય સંખ્યા શોધવા માટે r અને s નો સરવાળો કરીને સરવાળાને 2 વડે ભાગો છો એટલે કે $\frac{r+s}{2}$ એ r અને s ની વચ્ચે હોય છે. આથી $\frac{3}{2}$ એ 1 અને 2 ની વચ્ચેની એક સંખ્યા છે. આ પદ્ધતિથી આગળ વધો તો તમને 1 અને 2 વચ્ચેની બીજી ચાર સંમેય સંખ્યાઓ મળે. આવી અન્ય ચાર સંમેય સંખ્યાઓ $\frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{13}{8}$ અને $\frac{7}{4}$ છે.

રીત 2 : બીજી રીતમાં એક જ સોપાનમાં પાંચેય સંમેય સંખ્યા શોધી શકાય છે. આપણે પાંચ સંખ્યાઓ શોધવા માંગીએ છીએ તેથી $5 + 1 = 6$ ને છેદ તરીકે લઈને 1 અને 2 ને છેદમાં 6 હોય તેવી સમાન સંમેય સંખ્યાના સ્વરૂપમાં લખીએ એટલે કે $1 = \frac{6}{6}$ અને $2 = \frac{12}{6}$. તેથી આપણે કહી શકીએ કે $\frac{7}{6}, \frac{8}{6}, \frac{9}{6}, \frac{10}{6}, \frac{11}{6}$ એ બધી સંખ્યાઓ 1 અને 2 વચ્ચેની સંમેય સંખ્યાઓ છે. તેથી માંગેલ પાંચ સંખ્યાઓ $\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}$ અને $\frac{11}{6}$ છે.

નોંધ : ધ્યાન રાખો કે ઉદાહરણ 2 માં 1 અને 2 વચ્ચેની ફક્ત પાંચ સંમેય સંખ્યાઓ જ શોધવાનું કહ્યું છે. પરંતુ આપને સમજાયું હશે કે 1 અને 2 વચ્ચે અસંખ્ય સંમેય સંખ્યાઓ હોય છે. વ્યાપક રીતે કહીએ તો આપેલ બે સંમેય સંખ્યાઓ વચ્ચે અનંત સંમેય સંખ્યાઓ હોય છે.

હવે આપણે ફરીથી સંખ્યારેખાને નિહાળીએ. શું આપણે આ રેખા પરની બધી જ સંખ્યાઓને લઈ લીધી છે ? ના, હજુ સુધી તો નહિ જ. તેનું કારણ એ છે કે સંખ્યારેખા પર હજુ ઘણીબધી સંખ્યાઓ બાકી રહી છે. તમે જે સંખ્યાઓ ઊંચકેલી તેમની વચ્ચે ખાલી જગ્યા રહી છે અને આ ખાલી જગ્યામાં ફક્ત એક કે બે નહી પરંતુ અનંત સંખ્યાઓ રહેલી છે. આશ્ચર્યજનક બાબત એ છે કે કોઈ પણ બે સ્થાનોની વચ્ચે અગણિત અનંત સંખ્યાઓ આવેલી છે !

તેથી આપણી સામે નીચે પ્રકારના પ્રશ્નો રહે છે :

1. સંખ્યારેખા પર બાકી રહેલી સંખ્યાઓને શું કહી શકાય ?
2. તેમને આપણે કેવી રીતે ઓળખીશું ? એટલે કે આપણે આ સંખ્યાઓને સંમેય સંખ્યાઓથી કેવી રીતે જુદી પાડીશું ?

આ પ્રશ્નોના ઉત્તર હવે પછીના વિભાગમાં આપીશું.

સ્વાધ્યાય 1.1

1. શું શૂન્ય એ એક સંમેય સંખ્યા છે ? શું તમે તેને p પૂર્ણાંક તથા q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તેવા p, q માટે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં લખી શકશો ?
2. 3 અને 4 વચ્ચેની છ સંમેય સંખ્યાઓ શોધો.
3. $\frac{3}{5}$ અને $\frac{4}{5}$ વચ્ચેની પાંચ સંમેય સંખ્યાઓ શોધો.
4. નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય ? કારણ સહિત ઉત્તર આપો.

   (i) દરેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા એ પૂર્ણ સંખ્યા છે.

   (ii) દરેક પૂર્ણાંક એ પૂર્ણ સંખ્યા છે.

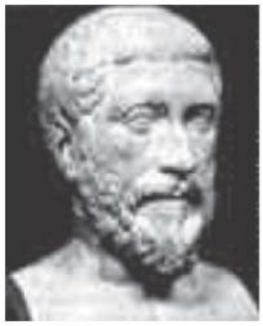
   (iii) દરેક સંમેય સંખ્યા એ પૂર્ણ સંખ્યા છે.

1.2 અસંમેય સંખ્યાઓ

આ પહેલાનાં વિભાગમાં આપણે જોયું કે સંખ્યારેખા પર જે સંમેય સંખ્યા ન હોય તેવી સંખ્યાઓ પણ હોય છે.

હવે આપણે આવી સંખ્યાઓની ચર્ચા કરીશું. p અને q પૂર્ણાંક હોય અને $q \neq 0$ હોય તેવા p, q માટે આપણે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપની સંખ્યાઓની ચર્ચા કરી છે. આથી તમને એવો પ્રશ્ન થાય કે શું જે આ સ્વરૂપમાં ન હોય એવી પણ સંખ્યાઓ છે? ખરેખર તેવી સંખ્યાઓ હોય છે.

The Pythagoreans in Greece, followers of the famous mathematician and philosopher Pythagoras, were the first to discover the numbers which were not rationals, around 400 BC. These numbers are called *irrational numbers* (*irrationals*), because they cannot be written in the form of a ratio of integers. There are many myths surrounding the discovery of irrational numbers by the Pythagorean, Hippacus of Croton. In all the myths, Hippacus has an unfortunate end, either for discovering that $\sqrt{2}$ is irrational or for disclosing the secret about $\sqrt{2}$ to people outside the secret Pythagorean sect!



Pythagoras
(569 BCE – 479 BCE)
આકૃતિ 1.3

તો ચાલો આપણે આ સંખ્યાઓને વિધિવત્ વ્યાખ્યાયિત કરીએ :

જો સંખ્યા s ને p પૂર્ણાંક અને q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તેવા p, q માટે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં મૂકી ના શકાય તો તેવી સંખ્યા s ને *અસંમેય* સંખ્યા કહે છે.

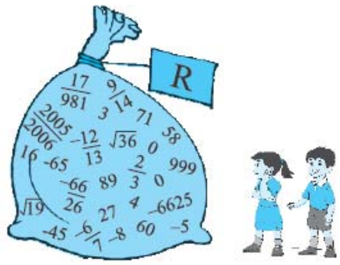
તમે જાણો છો કે સંમેય સંખ્યાઓ અનંત હોય છે. એવી જ રીતે અસંમેય સંખ્યાઓ પણ અનંત હોય છે. અસંમેય સંખ્યાનાં કેટલાંક ઉદાહરણો આ પ્રમાણે છે :

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, 0.10110111011110...$

નોંધ : તમને યાદ હશે કે જ્યારે આપણે $\sqrt{\ }$, ના સંકેતનો ઉપયોગ કરીએ છીએ ત્યારે એ સ્વીકારી લઈએ છીએ કે સંદર્ભની સંખ્યાનું વર્ગમૂળ એ ધન વર્ગમૂળ છે. $\sqrt{4} = 2$ છે, પરંતુ 2 અને -2 એ બંને 4નાં વર્ગમૂળ તો છે જ.

ઉપર આપેલી કેટલીક અસંમેય સંખ્યાઓ વિશે તમે જાણો છો. ઉદાહરણ તરીકે ઉપરની યાદીની સંખ્યામાં આવેલાં વર્ગમૂળ વિશે અને સંખ્યા π વિશે તમે અગાઉથી જાણો જ છો.

પાયથાગોરસના અનુયાયીઓએ $\sqrt{2}$ એ અસંમેય સંખ્યા છે તે સાબિત કર્યું હતું. ત્યાર બાદ ઈ. પૂ. 425 ની આસપાસ સાઈરિનના નિવાસી ***Theodorus*** એ સાબિત કર્યું કે $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}$ અને $\sqrt{17}$ પણ અસંમેય સંખ્યાઓ છે. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ વગેરે અસંમેય છે તેની સાબિતી માટે આપણે ધોરણ10 માં ચર્ચા કરીશું. જો π ની વાત કરીએ તો હજારો વર્ષોથી વિવિધ સંસ્કૃતિઓ તેનાથી પરિચિત છે. પરંતુ ઈ.સ.1700 ના અંતમાં જ ***Lambert*** અને ***Legendre*** એ π તે એક અસંમેય સંખ્યા છે તેમ સાબિત કર્યું હતું. હવે આપણે 0.10110111011110... અને π એ અસંમેય સંખ્યા કેમ છે તેની ચર્ચા આગળના વિભાગમાં કરીશું.



ચાલો આપણે પાછળના વિભાગના અંતમાં ઉપસ્થિત કરેલા પ્રશ્નો પર ફરી વિચાર કરીએ. તેના માટે સંમેય સંખ્યાવાળો થેલો લો. જો આ થેલામાં આપણે અસંમેય સંખ્યાઓ પણ મૂકી દઈએ. તો શું સંખ્યારેખા પર હજુ કોઈ સંખ્યા બાકી રહેશે ? આનો જવાબ છે 'ના'. આમ, એક સાથે લેવામાં આવેલી સંમેય સંખ્યા અને અસંમેય સંખ્યાનો જે સમૂહ મળે છે તેને ***વાસ્તવિક સંખ્યાઓ***નો સમૂહ (*Real numbers*) કહેવામાં આવે છે. તેને R વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

આમ, વાસ્તવિક સંખ્યાઓ સંમેય અથવા અસંમેય સંખ્યાઓ હોઈ શકે છે. આપણે કહી શકીએ કે **પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યાનું સંખ્યારેખા પરના એક અનન્ય બિંદુ તરીકે નિરૂપણ કરી શકાય છે. એવી જ રીતે સંખ્યારેખાનું પ્રત્યેક બિંદુ એ એક વાસ્તવિક સંખ્યા દર્શાવે છે.** આ કારણથી જ સંખ્યારેખાને ***વાસ્તવિક સંખ્યારેખા*** (*real number-line*) કહેવામાં આવે છે.

In the 1870s two German mathematicians, Cantor and Dedekind, showed that : Corresponding to every real number, there is a point on the real number line, and corresponding to every point on the number line, there exists a unique real number.

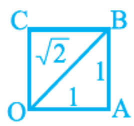
(R.Dedekind (1831-1916)
આકૃતિ 1.4

(G. Cantor (1845-1918)
આકૃતિ 1.5

હવે આપણે જોઈશું કે સંખ્યારેખા પર અસંમેય સંખ્યાને કેવી રીતે દર્શાવી શકાય.

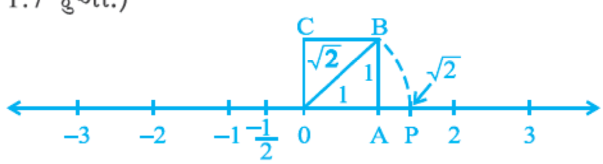
ઉદાહરણ 3 : સંખ્યારેખા પર $\sqrt{2}$ દર્શાવો.

ઉકેલ : એ સરળતાથી જોઈ શકાય છે કે કેવી રીતે ગ્રીસના લોકોએ $\sqrt{2}$ ની શોધ કરી હશે. એક એકમ લંબાઈની બાજુઓવાળા ચોરસ OABC (આકૃતિ 1.6 જુઓ)નો વિચાર કરો.



આકૃતિ.1.6

તમે પાયથાગોરસ પ્રમેય પરથી જોઈ શકો છો કે $OB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. વિચાર કરો કે સંખ્યારેખા પર તમે $\sqrt{2}$ નું નિરૂપણ કેવી રીતે કરશો? આ ખૂબ જ સરળ છે. આકૃતિ 1.6 ને સંખ્યારેખા પર એવી રીતે લઈ જાવ કે જેથી શિરોબિંદુ O શૂન્ય પર આવે.(આકૃતિ 1.7 જુઓ.)



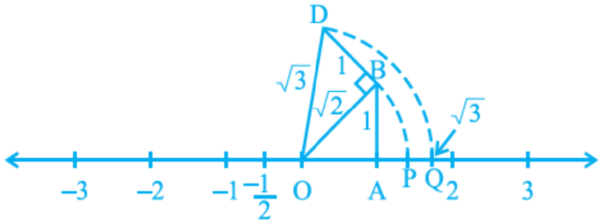
આકૃતિ 1.7

આપણે હમણાં જ જોયું છે કે $OB = \sqrt{2}$. પરિકર દ્વારા O ને કેન્દ્ર લઈ OB જેટલી ત્રિજ્યા લઈ સંખ્યારેખાને

P માં છેદતું ચાપ દોરીએ ત્યારે મળતું સંખ્યારેખા પરનું બિંદુ P એ $\sqrt{2}$ ને સંગત બિંદુ થાય છે.

ઉદાહરણ 4 : સંખ્યારેખા પર $\sqrt{3}$ દર્શાવો.

ઉકેલ : ફરી પાછા આકૃતિ 1.7 પર આવીએ.



આકૃતિ 1.8

OB પર એકમ લંબાઈનો લંબ BD દોરીએ. (આકૃતિ 1.8) પાયથાગોરસ પ્રમેય પ્રમાણે $OD = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ મળે. પરિકરથી O કેન્દ્ર અને OD જેટલી ત્રિજ્યા લઈ સંખ્યારેખાને Q માં છેદતું એક ચાપ દોરીએ. તેથી બિંદુ Q એ $\sqrt{3}$ ને સંગત છે. આ જ પ્રમાણે n કોઈ ધન પૂર્ણાંક હોય તો $\sqrt{n-1}$ નું નિરૂપણ કર્યા પછી $\sqrt{n}$ નું નિરૂપણ સંખ્યારેખા પર કરી શકાય છે.

સ્વાધ્યાય 1.2

1. નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય ? કારણ સહિત ઉત્તર આપો.
   (i) દરેક અસંમેય સંખ્યા એ વાસ્તવિક સંખ્યા છે.
   (ii) સંખ્યારેખા પરનું દરેક બિંદુ કોઈક પ્રાકૃતિક સંખ્યા m માટે $\sqrt{m}$ સ્વરૂપનું હોય છે.
   (iii) દરેક વાસ્તવિક સંખ્યા એ અસંમેય સંખ્યા છે.
2. શું દરેક ધન પૂર્ણાંકનું વર્ગમૂળ અસંમેય હોય છે ? જો ના, તો એવી એક સંખ્યાનું ઉદાહરણ આપો જેનું વર્ગમૂળ સંમેય સંખ્યા હોય?
3. $\sqrt{5}$ ને સંખ્યારેખા પર કેવી રીતે દર્શાવી શકાય તે બતાવો.
4. **વર્ગ-પ્રવૃત્તિ : વર્ગમૂળ કુંતલની *(Spiral)* રચના :** એક મોટો કાગળ લો અને નીચે બતાવેલી પદ્ધતિથી ‘વર્ગમૂળ કુંતલ’ની રચના કરો. સૌથી પહેલાં એક બિંદુ O લો અને એકમ લંબાઈનો રેખાખંડ OP_1 દોરો. OP_1 ને લંબ હોય તેવો એકમ લંબાઈનો રેખાખંડ P_1P_2 દોરો. (આકૃતિ 1.9 જુઓ.) હવે રેખાખંડ OP_2 પર એકમ લંબાઈનો લંબ રેખાખંડ P_2P_3 દોરો. ત્યાર પછી રેખાખંડ OP_3 પર એકમ લંબાઈનો લંબ રેખાખંડ P_3P_4 દોરો. આ જ રીતે આ પ્રક્રિયા ચાલુ રાખીને રેખાખંડ OP_{n-1} પર એકમ લંબાઈનો લંબ રેખાખંડ $P_{n-1}P_n$ મેળવી શકાય છે. આમ, આપણે O, P_1, P_2, P_3... P_n.... બિંદુઓ મેળવી શકીશું અને તેમને જોડતાં $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, ...$ ને દર્શાવતું સુંદર વર્ગમૂળ કુંતલ મળશે.

આકૃતિ 1.9
વર્ગમૂળ કુંતલની રચના

1.3 વાસ્તવિક સંખ્યા અને તેની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ

આ વિભાગમાં એક જુદા પ્રકારના દૃષ્ટિકોણથી સંમેય અને અસંમેય સંખ્યાઓનો અભ્યાસ કરીશું. તેના માટે આપણે વાસ્તવિક સંખ્યાઓની દશાંશ- અભિવ્યક્તિ નો વિચાર કરીશું અને નક્કી કરીશું કે આપણે સંમેય અને અસંમેય સંખ્યાઓને અલગ પાડવા આ અભિવ્યક્તિનો ઉપયોગ કરી શકીએ કે નહિ. આપણે દશાંશ અભિવ્યક્તિનો ઉપયોગ કરીને વાસ્તવિક સંખ્યાઓને સંખ્યારેખા પર કેવી દર્શાવી શકીએ તેનો પણ અભ્યાસ કરીશું. આપણે સંમેય સંખ્યાઓથી વધારે પરિચિત હોવાથી,આપણી ચર્ચા તેવી સંખ્યાઓથી શરૂ કરીશું.

અહીં તેનાં ત્રણ ઉદાહરણો આપેલાં છે : $\frac{10}{3}, \frac{7}{8}, \frac{1}{7}$. તેના ભાગફળનો વિચાર કરીએ તો આપણે તેમાં કોઈ ચોક્કસ માળખું મેળવી શકીએ છીએ.

ઉદાહરણ 5 : $\frac{10}{3}, \frac{7}{8}$ અને $\frac{1}{7}$ ની દશાંશ અભિવ્યક્તિ મેળવો.

ઉકેલ :

$$\begin{array}{r|l} & 3.333\ldots \\ \hline 3 & 10 \\ & 9 \\ \hline & 10 \\ & 9 \\ \hline & 10 \\ & 9 \\ \hline & 10 \\ & 9 \\ \hline & 1 \end{array}$$

શેષ : 1, 1, 1, 1, 1...

ભાજક : 3

$$\begin{array}{r|l} & 0.875 \\ \hline 8 & 7.0 \\ & 64 \\ \hline & 60 \\ & 56 \\ \hline & 40 \\ & 40 \\ \hline & 0 \end{array}$$

શેષ : 6, 4, 0

ભાજક : 8

$$\begin{array}{r|l} & 0.142857\ldots \\ \hline 7 & 1.0 \\ & 7 \\ \hline & 30 \\ & 28 \\ \hline & 20 \\ & 14 \\ \hline & 60 \\ & 56 \\ \hline & 40 \\ & 35 \\ \hline & 50 \\ & 49 \\ \hline & 1 \end{array}$$

શેષ : 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1......

ભાજક : 7

અહીં તમે શું અવલોકન કર્યું ? તમારે ઓછામાં ઓછી ત્રણ વિગતોનું અવલોકન કરવું જોઈએ.

(i) અમુક પગલાં પછી શેષ 0 બને અથવા તેમનું પુનરાવર્તન થવાનું શરૂ થાય છે.

(ii) શેષ તરીકે પુનરાવર્તિત અંકોના જૂથમાં અંકોની સંખ્યા ભાજક કરતાં નાની હોય ($\frac{1}{3}$ માં એક અંકનું પુનરાવર્તન થાય છે અને ભાજક 3 છે. $\frac{1}{7}$ ના ભાગફળમાં 326451 એવા છ અંકોના જૂથનું પુનરાવર્તન થાય છે. 7 એ ભાજક છે.)

(iii) જો શેષ પુનરાવર્તિત હોય તો ભાગફળમાં અંક અથવા અંકોના જૂથનું પુનરાવર્તન થાય છે.($\frac{1}{3}$ના ભાગફળમાં 3 નું પુનરાવર્તન થાય છે અને $\frac{1}{7}$ માટે ભાગફળનું પુનરાવર્તન જૂથ 142857 મળે છે.)

આપણે ફક્ત ઉપરોક્ત ઉદાહરણો દ્વારા જ આ પ્રકારની તરાહ મેળવી છે. તેમ છતાં તે $q \neq 0$ માટે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપની બધી સંમેય સંખ્યાઓ માટે પણ એ સત્ય છે. જો આપણે p ને q વડે ભાગીએ તો શેષ શૂન્ય મળે અથવા ક્યારેય શૂન્ય ન મળે અને અમુક તબક્કા પછી શેષના જૂથનું પુનરાવર્તન થાય છે.

હવે આપણે દરેક વિકલ્પનાં વિવિધ ઉદાહરણ જોઈએ.

વિકલ્પ 1 : શેષ શૂન્ય થાય છે.

$\frac{7}{8}$ વાળા ઉદાહરણમાં આપણે જોયું કે કેટલાંક પગલાં પછી શેષ શૂન્ય થઈ જાય છે અને $\frac{7}{8}$ ની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ $\frac{7}{8} = 0.875$ છે. અન્ય ઉદાહરણો $\frac{1}{2} = 0.5$, $\frac{639}{250} = 2.556$ છે. અમુક પગલાં પછી આ બધી સંખ્યાઓની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ સાન્ત બને છે. આપણે આવી દશાંશ-અભિવ્યક્તિને ***સાન્ત દશાંશ અભિવ્યક્તિ****(terminating decimal **expression**)* કહીશું.

વિકલ્પ 2 : શેષ ક્યારેય શૂન્ય ન થાય.

$\frac{1}{3}$ અને $\frac{1}{7}$ વાળા ઉદાહરણમાં આપણે જોયું કે અમુક ચોક્કસ સોપાન પછી શેષ પુનરાવર્તિત થાય છે અને દશાંશ-અભિવ્યક્તિ સતત આગળ ચાલે છે. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો આવી દશાંશ અભિવ્યક્તિમાં ભાગફળમાં અંકોનું પુનરાવર્તિત જૂથ મળે છે. આ પ્રકારની દશાંશ અભિવ્યક્તિને ***અનંત આવૃત*** (*Non-terminating Recurring*) કહીશું. ઉદાહરણ તરીકે $\frac{1}{3} = 0.3333...$ અને $\frac{1}{7} = 0.142857142857142857...$ છે. $\frac{1}{3}$ ની દશાંશ-અભિવ્યક્તિમાં તેના ભાગફળમાં અંક 3નું પુનરાવર્તન થાય છે તેવું બતાવવા આપણે $\frac{1}{3}$ ને $0.\bar{3}$ રીતે લખીશું. તે જ પ્રમાણે $\frac{1}{7}$ ના ભાગફળમાં 142857 નું જૂથ પુનરાવર્તિ થાય છે. તેને દર્શાવવા આપણે $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ રીતે લખીશું. અહીં અંક કે અંકો પર દોરેલી લીટી ($\bar{\ }$) જે તે અંક કે અંકોના સમૂહનું પુનરાવર્તન દર્શાવે છે. એ જ રીતે 3.57272...ને $3.5\overline{72}$ તરીકે લખીશું. આમ, આ બધાં ઉદાહરણોમાં દશાંશ અભિવ્યક્તિઓ અનંત આવૃત (પુનરાવર્તિત) મળે છે.

આમ, આપણે જોયું કે સંમેય સંખ્યાઓની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ માટે માત્ર બે વિકલ્પો સાન્ત અથવા અનંત આવૃત હોય છે.

આથી ઊલટું તમે માની લો કે સંખ્યારેખા પર ચાલતાં તમને 3.142678 જેવી સંખ્યા મળે છે. તેની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ સાન્ત છે અથવા 1.272727... એટલે કે $1.\overline{27}$ જેવી સંખ્યા મળે છે. તેની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ અનંત આવૃત છે. શું આ પરથી તમે તારવી શકશો કે આ સંખ્યાઓ સંમેય છે ? તેનો જવાબ હા છે. તેને સાબિત નહીં કરીએ પરંતુ કેટલાંક ઉદાહરણ પરથી આ હકીકતને સમજીશું. સાન્ત અભિવ્યક્તિના કિસ્સાઓ સરળ છે.

ઉદાહરણ 6 : સાબિત કરો કે 3.142678 સંમેય સંખ્યા છે. બીજા શબ્દોમાં, p પૂર્ણાંક હોય અને q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તે પ્રમાણે 3.142678 ને $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

ઉકેલ : અહીં $3.142678 = \frac{3142678}{1000000}$ છે અને તેથી તે એક સંમેય સંખ્યા છે.

હવે આપણે અનંત આવૃત દશાંશ-અભિવ્યક્તિ લઈએ.

ઉદાહરણ 7 : સાબિત કરો કે $0.3333... = 0.\bar{3}$ ને p પૂર્ણાંક હોય અને q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તેવા p, q માટે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય છે.

ઉકેલ : $0.\bar{3}$ શું છે તે આપણે જાણતા ન હોવાથી, આપણે તેને x લઈએ અને તેથી $x = 0.3333...$

આપણે અહીં કોઈ યુક્તિનો પ્રયોગ કરીએ. જુઓ કે

$$10\,x = 10 \times (0.3333...) = 3.3333...$$

હવે, $3.3333... = 3 + 0.3333...$

$$\therefore 10x = 3 + x \text{ જ્યાં } x = 3.3333...$$

તેથી x માં ઊકેલ મેળવવા માટે $9\,x = 3$ એટલે કે $x = \frac{1}{3}$ મળે.

ઉદાહરણ 8 : સાબિત કરો કે $1.272727... = 1.\overline{27}$ ને p પૂર્ણાંક હોય, q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તેવાં p, q માટે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય છે.

ઉકેલ : ધારો કે $x = 1.272727...$

અહીં બે અંકોનું પુનરાવર્તન થાય છે તેથી આપણે બંને બાજુ 100 વડે ગુણીએ, તો

$$100x = 127.2727..$$

તેથી, $100x = 126 + 1.2727... = 126 + x$

$$\therefore 100x - x = 126$$

$$\therefore \quad 99x = 126$$

એટલે કે $x = \frac{126}{99} = \frac{14}{11}$ મળે.

એનાથી ઊલટું તમે $\frac{14}{11} = 1.\overline{27}$ પણ ચકાસી શકો છો.

ઉદાહરણ 9 : સાબિત કરો કે $0.2353535... = 0.2\overline{35}$ ને p પૂર્ણાંક હોય, q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તેવા p, q માટે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય છે.

ઉકેલ : ધારો કે $x = 0.2\overline{35}$. અહીં જુઓ કે 2 પુનરાવર્તિત થતો નથી, પરંતુ સંખ્યાજૂથ 35 નું પુનરાવર્તન થાય છે. અહીં બે અંક પુનરાવર્તિત થાય છે. તેથી x ને 100 વડે ગુણવામાં આવે છે. આમ આપણને

$$100\,x = 23.53535... \text{ મળશે.}$$

$$100\,x = 23.3 + 0.23535... = 23.3 + x$$

એટલે કે, $99x = 23.3$

માટે $99x = \frac{233}{10}$ જેથી $x = \frac{233}{990}$ મળશે.

હવે આનાથી ઊલટું એટલે કે $\frac{233}{990} = 0.2\overline{35}$ પણ સાબિત કરી શકાય છે.

આમ, અનંત આવૃત દશાંશ-અભિવ્યક્તિ વાળી દરેક સંખ્યાને p પૂર્ણાંક હોય, q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તેવા p, q માટે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય છે. તો ચાલો આપણે ઉપરનાં પરિણામો પરથી સંક્ષિપ્તમાં નીચે પ્રમાણેનો સારાંશ મેળવીએ.

કોઈ પણ સંમેય સંખ્યાની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ કાં તો સાન્ત હોય છે અથવા અનંત આવૃત હોય છે. ઉપરાંત જે સંખ્યાની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ સાન્ત હોય અથવા અનંત આવૃત હોય તે એક સંમેય સંખ્યા હોય છે.

હવે આપણે જાણીએ છીએ કે સંમેય સંખ્યાની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ કેવી રીતે મળે છે. પરંતુ હવે એ પ્રશ્ન થાય છે કે અસંમેય સંખ્યાની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ કેવી રીતે મળી શકે ? ઉપર જણાવ્યા મુજબ એવો નિષ્કર્ષ મળે છે કે આવી સંખ્યાની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ ***અનંત અને અનાવૃત*** (*non-terminating non-recurring*) છે. ઉપર બતાવ્યા પ્રમાણે અસંમેય સંખ્યાના ગુણધર્મો સંમેય સંખ્યાના ગુણધર્મો જેવા જ છે.

અસંમેય સંખ્યાની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ અનંત અને અનાવૃત હોય છે. ઉપરાંત જે સંખ્યાની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ અનંત અને અનાવૃત હોય તે અસંમેય સંખ્યા છે.

અગાઉના વિભાગમાં આપણે એક અસંમેય સંખ્યા $s = 0.10110111011110...$ લીધી હતી. આપણે એ ખાસ નોંધીએ કે આ સંખ્યા અનંત અને અનાવૃત દશાંશ છે. તેથી ઉપર બતાવેલ ગુણધર્મ પરથી તે અસંમેય સંખ્યા છે. ઉપરાંત એ પણ ધ્યાન રાખો કે આપણે તેના જેવી ઘણીબધી અસંમેય સંખ્યાઓનું સર્જન કરી શકીએ છીએ.

જાણીતી અસંમેય સંખ્યાઓ $\sqrt{2}$ અને π વિશે તમે શું જાણો છો ? અહીં આપણે કેટલાક દશાંશ સ્થાન સુધી તેમની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ બતાવેલી છે.

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096...$$

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950...$$

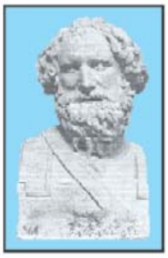
(નોંધીએ કે $\frac{22}{7}$ એ π નું આશરે પડતું(આસન્ન) મૂલ્ય છે પરંતુ $\pi \neq \frac{22}{7}$)

ગણિતશાસ્ત્રીઓએ ઘણા વર્ષથી અસંમેય સંખ્યાઓની દશાંશ-અભિવ્યક્તિમાં વધુમાં વધુ અંકો મળે તે માટેની ભિન્ન-ભિન્ન પધ્ધતિઓ વિકસાવી છે. ઉદાહરણ તરીકે તમે ભાગાકારની રીતે $\sqrt{2}$ ની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ મેળવવાનું શીખી ગયા હશો. રસપ્રદ વાત એ પણ છે જે વૈદિક યુગ (ઈ.પૂ. 800 થી ઈ.પૂ. 500) ના ગાણિતિક ગ્રંથ સૂલ્બાસૂત્રો(જીવાના નિયમો)માં છે તે $\sqrt{2}$ ની લગભગ નજીકની કિંમત તમે જોઈ શકો છો અને તે આ પ્રમાણે છે.

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{34} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) = 1.4142156$$

તમે અવલોકન કરશો તો આ કિંમતનાં પ્રથમ પાંચ સ્થાન આગળ આપેલી $\sqrt{2}$ ની દશાંશ-અભિવ્યક્તિના પ્રથમ પાંચ સ્થાનને સમાન જ છે. π ના દશાંશ વિસ્તરણમાં અંકોની શોધનો એક રસપ્રદ ઇતિહાસ છે.

The Greek genius Archimedes was the first to compute digits in the decimal expansion of π. He showed $3.140845 < \pi < 3.142857$. Aryabhatta (476 – 550 C.E.), the great Indian mathematician and astronomer, found the value of π correct to four decimal places (3.1416). Using high speed computers and advanced algorithms, π has been computed to over 1.24 trillion decimal places!



Archimedes (287 BCE – 212 BCE)

આકૃતિ 1.10

હવે આપણે અસંમેય સંખ્યાઓ કેવી રીતે મેળવી શકાય તે જોઈશું.

ઉદાહરણ 10 : $\frac{1}{7}$ અને $\frac{2}{7}$ વચ્ચેની એક અસંમેય સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : આપણે જોયું કે $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ છે. આથી, એકદમ સરળતાથી $\frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$ ની ગણતરી તમે કરી શકશો.

$\frac{1}{7}$ અને $\frac{2}{7}$ વચ્ચે એક અસંમેય સંખ્યા શોધવા માટે એક એવી સંખ્યા લઈએ કે જે આ સંખ્યાઓની વચ્ચે એક અનંત અનાવૃત સંખ્યા હોય. અલબત્ત, તમે આવી અનંત સંખ્યાઓ શોધી શકશો. આવી એક સંખ્યાનું ઉદાહરણ 0.150150015000150000... છે.

સ્વાધ્યાય 1.3

1. નીચેની સંખ્યાઓને દશાંશ સ્વરૂપમાં લખો અને તે કેવા પ્રકારની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ છે તે જણાવો.

   (i) $\frac{36}{100}$ (ii) $\frac{1}{11}$ (iii) $4\frac{1}{8}$

   (iv) $\frac{3}{13}$ (v) $\frac{2}{11}$ (vi) $\frac{329}{400}$

2. તમે જાણો છો કે $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ છે. શું તમે ખરેખર ભાગાકારની લાંબી પ્રક્રિયા કર્યા વગર $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ ની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ શું મળશે તેનું અનુમાન કરી શકશો ? જો હા, તો કેવી રીતે ?

   (**સૂચન :** $\frac{1}{7}$ નું મૂલ્ય મેળવતી વખતે મળતી શેષનું અવલોકન કરો)

3. p પૂર્ણાંક હોય, q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તેવા $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં નીચેની સંખ્યાને દર્શાવો.

   (i) $0.\overline{6}$ (ii) $0.4\overline{7}$ (iii) $0.\overline{001}$

4. 0.99999..... ને $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવો. શું તમને તમારા ઉત્તરથી આશ્ચર્ય થાય છે ? તમારા શિક્ષક અને વર્ગના સહ-અધ્યાયીઓ સાથે તમારા જવાબની સત્યાર્થતાની ચર્ચા કરો.

5. $\frac{1}{17}$ ની દશાંશ-અભિવ્યક્તિમાં પુનરાવર્તિત અંકોની સંખ્યા વધુમાં વધુ કેટલી હશે ? તમારો જવાબ ભાગાકાર કરીને ચકાસો.

6. જેમાં p અને q ને 1 સિવાયનો કોઈ સામાન્ય અવયવ ન હોય તથા જેની દશાંશ અભિવ્યક્તિ સાન્ત હોય તેવા $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ સ્વરૂપના સંમેય સંખ્યાનાં કેટલાંક ઉદાહરણ લો. (જ્યાં p અને q પૂર્ણાંક છે અને $q \neq 0$ છે.) શું તમે અનુમાન લગાવી શકો છો કે q એ કયા ગુણધર્મનું પાલન કરવું જોઈએ ?

7. જેની દશાંશ અભિવ્યક્તિ અનંત અનાવૃત હોય તેવી ત્રણ સંખ્યાઓ લખો.

8. સંમેય સંખ્યાઓ $\frac{5}{7}$ અને $\frac{9}{11}$ ની વચ્ચે આવેલી ત્રણ ભિન્ન અસંમેય સંખ્યાઓ શોધો.

9. નીચેની સંખ્યાઓનું સંમેય અને અસંમેય સંખ્યાઓમાં વર્ગીકરણ કરો.

(i) $\sqrt{23}$ (ii) $\sqrt{225}$ (iii) 0.3796

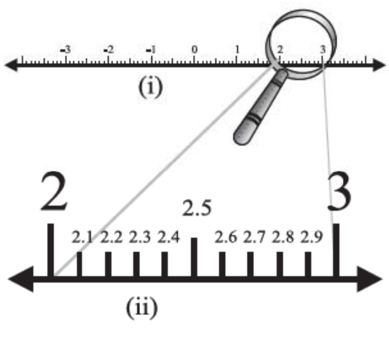
(iv) 7.478478... (v) 1.101001000100001...

1.4 સંખ્યારેખા પર વાસ્તવિક સંખ્યાનું નિરૂપણ

અગાઉના વિભાગમાં આપણે જોયું કે કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યાને એક દશાંશ-અભિવ્યક્તિ હોય છે. તેની મદદથી વાસ્તવિક સંખ્યાનું સંખ્યારેખા પર નિરૂપણ કરી શકાય છે. તો ચાલો આપણે જોઈએ કે કેવી રીતે તેનું નિરૂપણ કરી શકાય.

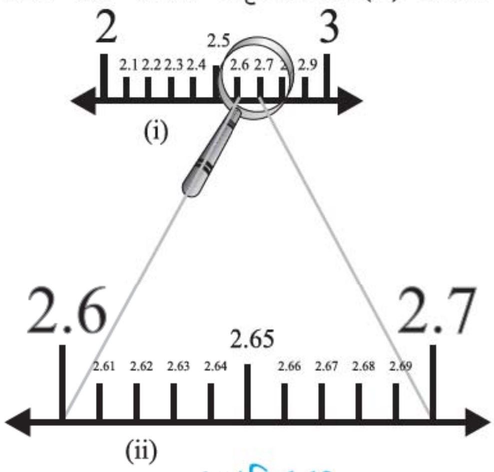
માનો કે આપણે સંખ્યારેખા પર 2.665નું નિરૂપણ કરવા માંગીએ છીએ. આપણે જાણીએ છીએ કે આ સંખ્યા 2 અને 3 ની વચ્ચે રહેલી છે.

હવે આપણે 2 અને 3 ની વચ્ચેના સંખ્યારેખાના ભાગને ધ્યાનથી જોઈએ. ધારો કે, આ ભાગને બરાબર એક સરખા 10 ભાગમાં વિભાજિત કરીને તેને આકૃતિ 1.11 (i) માં બતાવ્યા પ્રમાણે આંકીએ ત્યારે 2 ની જમણી બાજુનો પ્રથમ આંક 2.1 દર્શાવે છે. બીજો આંક 2.2 દર્શાવે છે અને તે પ્રમાણે આગળ. તમને આકૃતિ 1.11 (i)માં 2 અને 3 વચ્ચેના વિભાજિત ભાગને જોવામાં તકલીફ પડતી હશે. તેને સ્પષ્ટ જોવા માટે તમે એક ***વિપુલ દર્શક કાચ*** (*Magnifying glass*)નો ઉપયોગ કરી ને 2 અને 3 વચ્ચેના ભાગને જોઈ શકો છો. તમને આકૃતિ 1.11 (ii) માં છે તેવું દેખાશે. હવે 2.665 એ 2.6 અને 2.7 ની વચ્ચે છે. આથી આપણે 2.6 અને 2.7 વચ્ચે ધ્યાન કેન્દ્રિત કરીએ. [આકૃતિ 1.12(i) જુઓ] આપણે ફરીથી તે ભાગને 10 સરખા ભાગમાં વિભાજિત કરીશું. પહેલો આંક 2.61 દર્શાવે,



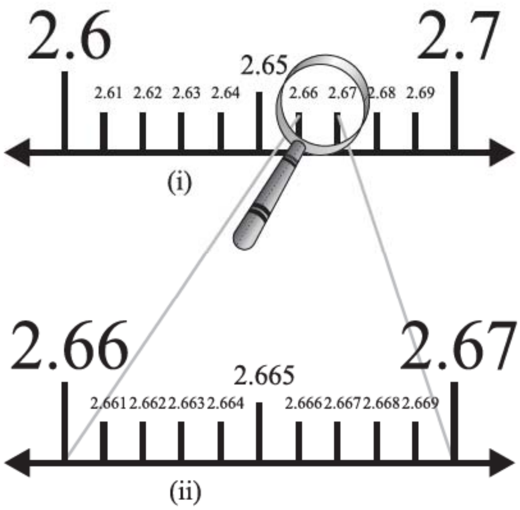
આકૃતિ 1.11

બીજો આંક 2.62 વગેરે. તેને સ્પષ્ટ જોવા માટે આપણે આકૃતિ 1.12 (ii) પ્રમાણે તે ભાગને મોટો કરીશું.



આકૃતિ 1.12

હવે ફરીથી 2.665 એ 2.66 અને 2.67 ની વચ્ચે છે. તેથી આપણે સંખ્યારેખા પર તે ભાગ પર ધ્યાન કેન્દ્રિત કરીએ. [આકૃતિ 1.13(i) જુઓ] અને કલ્પના કરો કે આ ભાગને 10 એક સરખા ભાગમાં વિભાજિત કરેલો છે. તેને સ્પષ્ટ રીતે જોવા માટે તે ભાગને મોટો કરીએ. જે આકૃતિ 1.13(ii) માં બતાવ્યુ છે. પહેલો આંક 2.661 દર્શાવે છે ત્યાર પછીનો આંક 2.662 અને તે પ્રમાણે આગળ. આથી આ પ્રકારના પેટા વિભાજનમાં પાંચમો ભાગ 2.665 નું નિરૂપણ કરે છે.



આકૃતિ 1.13

આમ વિપુલ દર્શક કાચની મદદથી સંખ્યારેખા પર સંખ્યાઓને દર્શાવવાની આ પદ્ધતિને *ક્રમિક વિપુલ દર્શિતાની પદ્ધતિ* (*Process of successive magnification*) કહે છે.

આ પ્રમાણે આપણે જોયું કે ક્રમિક વિપુલ દર્શિતાની પદ્ધતિ દ્વારા સંખ્યારેખા પર સાન્ત દશાંશ-અભિવ્યક્તિવાળી વાસ્તવિક સંખ્યાઓનું નિરૂપણ કરવું શક્ય છે. હવે આપણે સંખ્યારેખા પર અનંત અનાવૃત હોય તેવી એક વાસ્તવિક સંખ્યાનું નિરૂપણ કરવાનો પ્રયત્ન કરીએ. વિપુલદર્શક કાચની મદદથી યોગ્ય અંતરાલોને જોઈશું અને ક્રમિક વિપુલ દર્શિતાની પદ્ધતિ દ્વારા તે સંખ્યાનું નિરૂપણ સંખ્યારેખા પર કરીશું.

ઉદાહરણ 11 : $5.3\overline{7}$ ને 5 દશાંશ સ્થળ સુધી એટલે કે 5.37777 ને સંખ્યારેખા પર દર્શાવો.

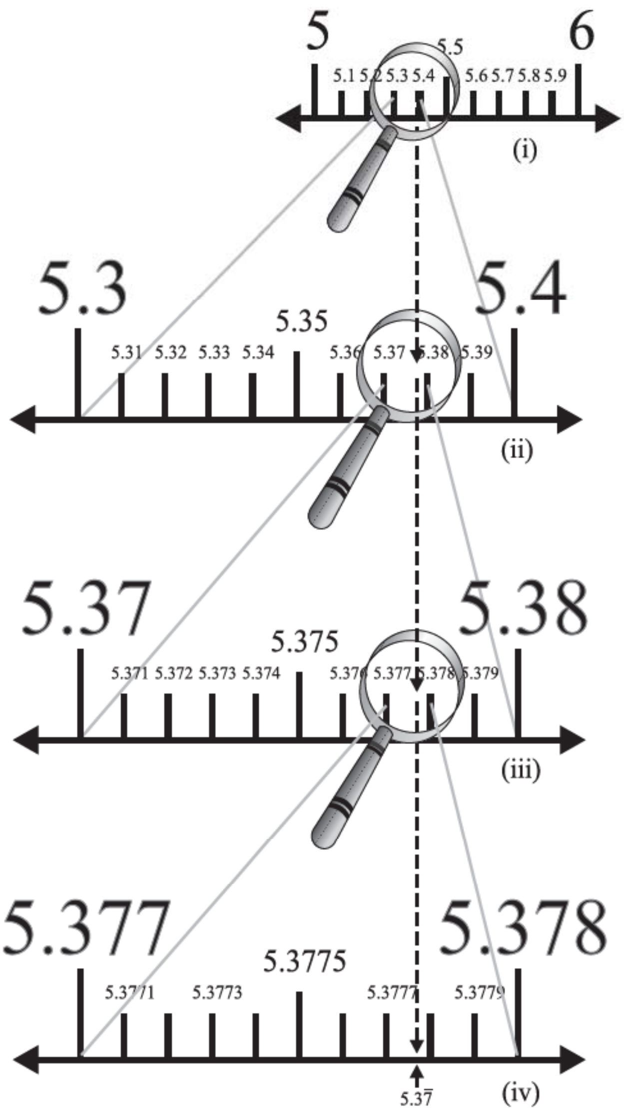
ઉકેલ : એકવાર ફરીથી ક્રમિક વિપુલદર્શિતાની પદ્ધતિ લઈએ અને સંખ્યારેખાના ભાગોની લંબાઈ ક્રમશઃ $5.3\overline{7}$ મળે ત્યાં સુધી ઘટાડીએ. સૌ પ્રથમ આપણે જોઈએ કે 5 અને 6 ની વચ્ચે $5.3\overline{7}$ છે. આગળના પગલામાં $5.3\overline{7}$ નું સ્થાન 5.3 અને 5.4 ની વચ્ચે નક્કી કરીશું. આ સંખ્યાનું નિરૂપણ વધારે સ્પષ્ટ રીતે જોવા માટે સંખ્યારેખાના આ ભાગને 10 સરખા ભાગમાં વિભાજિત કરી અને વિપુલદર્શક કાચથી નિરીક્ષણ કરીએ કે $5.3\overline{7}$ એ 5.37 અને 5.38 ની વચ્ચે છે.

$5.3\overline{7}$ નું વધારે સ્પષ્ટ નિરૂપણ કરવા માટે 5.377 અને 5.378 ના વચ્ચેના ભાગને બરાબર એક સરખા 10 ભાગમાં વિભાજિત કરીશું. તે આકૃતિ 1.14(iv) માં દર્શાવેલું છે. ધ્યાન રાખો કે $5.3\overline{7}$ એ 5.3777 ના કરતાં 5.3778 ની વધારે નજીક છે [આકૃતિ 1.14(iv) જુઓ]

નોંધ : વિપુલદર્શક કાચથી ઉત્તરોતર અને સંખ્યારેખાના જે ભાગમાં $5.3\overline{7}$ આવેલ હોય તેની લંબાઈમાં સતત ઘટાડો કરવાના અનુમાનને નિરંતર આગળ વધારી શકીએ છીએ. આપણે સંખ્યારેખા પર સંખ્યાનું સ્થાન જોવા માંગતા હોઈએ તો સંખ્યારેખાના ભાગનું માપ કેટલું લેવું તે ચોક્કસાઈની માત્રા પર આધારિત છે.

હવે તમને ચોક્કસ સમજાયું હશે કે આ પ્રક્રિયાથી સંખ્યારેખા પર અનંત અનાવૃત દશાંશ-અભિવ્યક્તિનું પણ નિરૂપણ કરી શકીએ છીએ.

ઉપરોક્ત કરવામાં આવેલી ચર્ચાઓ અને નિદર્શન પરથી આપણે કહી શકીએ કે દરેક વાસ્તવિક સંખ્યાને સંગત સંખ્યારેખા પર અનન્ય બિંદુ હોય છે અને આથી ઉલટું સંખ્યારેખાના દરેક બિંદુને સંગત એક અને માત્ર એક વાસ્તવિક સંખ્યા હોય છે.



આકૃતિ 1.14

સ્વાધ્યાય 1.4

1. ક્રમિક વિપુલ દર્શિતા પદ્ધતિની મદદથી સંખ્યારેખા પર 3.765 દર્શાવો.
2. ક્રમિક વિપુલ દર્શિતા પદ્ધતિની મદદથી સંખ્યારેખા પર $4.\overline{26}$ ને 4 દશાંશ સ્થળ સુધી દર્શાવો.

1.5 વાસ્તવિક સંખ્યાઓ પર ગાણિતિક પ્રક્રિયાઓ.

અગાઉના વર્ગોમાં તમે શીખી ગયા કે સંમેય સંખ્યાઓના સરવાળા અને ગુણાકાર એ ***ક્રમનો નિયમ*** *(commutative law)*, ***જૂથનો નિયમ*** *(associative law)* અને ***વિભાજનના*** *(distributive law)* નિયમોનું પાલન કરે છે. ઉપરાંત, આપણે બે સંમેય સંખ્યાઓને ઉમેરીએ, બાદ કરીએ, ગુણીએ કે ભાગીએ (શૂન્ય સિવાયની સંખ્યા વડે) તો આપણને સંમેય સંખ્યા જ મળે છે (એટલે કે સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકાર વિશે સંમેય સંખ્યા સંવૃત્તતાનો ગુણધર્મ ધરાવે છે). અસંમેય સંખ્યાઓ પણ સરવાળા અને ગુણાકાર માટે ક્રમના, જૂથના તથા વિભાજનના નિયમોનું પાલન કરે છે. જો કે અસંમેય સંખ્યાઓનો સરવાળો, તફાવત, ગુણનફળ, ભાગફળ હંમેશા અસંમેય સંખ્યા જ હોય તે જરૂરી નથી.

ઉદાહરણ તરીકે $\left(\sqrt{6}\right)+\left(-\sqrt{6}\right),\left(\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{2}\right),\left(\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3}\right)$ અને $\dfrac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}}$ સંમેય સંખ્યાઓ છે.

હવે એક સંમેય સંખ્યામાં એક અસંમેય સંખ્યા ઉમેરીએ છીએ અને એક સંમેય સંખ્યાનો અસંમેય સંખ્યા વડે ગુણાકાર કરીએ છીએ ત્યારે શું થાય છે તે જોઈએ.

ઉદાહરણ તરીકે $\sqrt{3}$ એક અસંમેય સંખ્યા છે. તો $2+\sqrt{3}$ અને $2\sqrt{3}$ કેવી સંખ્યાઓ છે ? અહી $\sqrt{3}$ એક અનંત અનાવૃત દશાંશ-અભિવ્યક્તિ છે. તેથી તે $2+\sqrt{3}$ અને $2\sqrt{3}$ માટે પણ આ ગુણધર્મ સત્ય છે. આમ, $2+\sqrt{3}$ અને $2\sqrt{3}$ બંને અસંમેય સંખ્યાઓ છે.

ઉદાહરણ 12 : $7\sqrt{5},\ \dfrac{7}{\sqrt{5}},\ \sqrt{2}+21,\ \pi-2$ એ અસંમેય સંખ્યાઓ છે કે નહિ ? ચકાસો.

ઉકેલ : $\sqrt{5}=2.236...,\ \sqrt{2}=1.4142...,\ \pi=3.1415...$ છે.

તેથી $7\sqrt{5} = 15.652...,\ \dfrac{7}{\sqrt{5}} = \dfrac{7\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \dfrac{7\sqrt{5}}{5} = 3.1304..$ થાય.

$\sqrt{2}+21 = 22.4142...,\ \pi-2 = 1.1415..$

આ બધી સંખ્યાઓ અનંત અનાવૃત દશાંશ-અભિવ્યક્તિ છે. તેથી આ બધી સંખ્યાઓ અસંમેય સંખ્યાઓ છે.

જો આપણે અસંમેય સંખ્યાઓના સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર, ભાગાકાર કરીએ તથા વર્ગમૂળ અને કોઈપણ પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે n-મૂળ પણ લઈએ, તો મહદ્ અંશે શું બનશે તે આપણે જોઈએ. ચાલો આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 13 : $2\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$ અને $\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$ નો સરવાળો કરો.

ઉકેલ : $\left(2\sqrt{2} + 5\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{2} - 3\sqrt{3}\right) = \left(2\sqrt{2} + \sqrt{2}\right) + \left(5\sqrt{3}-3\sqrt{3}\right)$

$$=\left(2+1\right)\sqrt{2} + \left(5-3\right)\sqrt{3}$$

$$=3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$$

ઉદાહરણ 14 : $6\sqrt{5}$ નો $2\sqrt{5}$ સાથે ગુણાકાર કરો.

ઉકેલ : $6\sqrt{5}\times 2\sqrt{5} = 6\times 2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5} = 12\times 5 = 60$

ઉદાહરણ 15 : $8\sqrt{15}$ નો $2\sqrt{3}$ વડે ભાગાકાર કરો.

ઉકેલ : $8\sqrt{15}\div 2\sqrt{3} = \dfrac{8\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = 4\sqrt{5}$

ઉપરનાં ઉદાહરણો આપણને નીચેની સત્ય હકીકત તરફ દોરી જાય છે.

(i) સંમેય સંખ્યાઓનો અસંમેય સંખ્યા સાથેનો સરવાળો અથવા તફાવત અસંમેય હોય છે.

(ii) શૂન્યેતર સંમેય સંખ્યા સાથે અસંમેય સંખ્યાનો ગુણાકાર કે ભાગાકાર અસંમેય હોય છે.

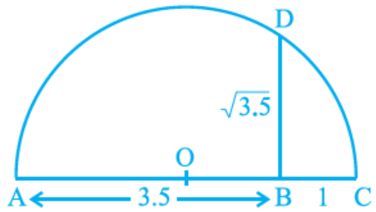
(iii) બે અસંમેય સંખ્યાઓનો સરવાળો, તફાવત, ગુણાકાર કે ભાગાકાર સંમેય અથવા અસંમેય હોઇ શકે.

હવે આપણે વાસ્તવિક સંખ્યાના વર્ગમૂળ કાઢવા માટેની પ્રક્રિયા તરફ આપણું ધ્યાન દોરીશું. તમને યાદ હશે કે જો a એક પ્રાકૃતિક સંખ્યા હોય તો $\sqrt{a} = b$ નો અર્થ $b^2 = a$ અને $b > 0$ થાય છે. આ શરત ધન વાસ્તવિક સંખ્યા પર પણ લાગુ પડી શકે છે.

ધારો કે $a > 0$ એક વાસ્તવિક સંખ્યા છે તો $\sqrt{a} = b$ નો અર્થ $b^2 = a$ અને $b > 0$ થાય છે.

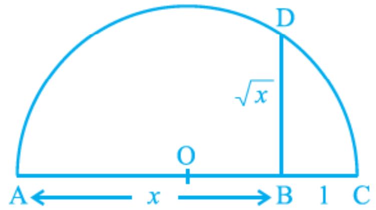
આપણે વિભાગ 1.2માં જોયું કે કેવી રીતે રેખા પર $\sqrt{n}$ (જ્યાં n ધનપૂર્ણાંક છે)નું નિરૂપણ કરી શકાય છે. હવે આપણે $\sqrt{x}$ ને (જ્યાં x એ ધન વાસ્તવિક સંખ્યા છે) ભૌમિતિક રીતે કેવી રીતે મેળવાય તે જોઇશું. ઉદાહરણ તરીકે $x = 3.5$ નું વર્ગમૂળ શોધીએ. એટલે કે આપણે $\sqrt{3.5}$ ભૌમિતિક રીતે શોધીએ.

એક આપેલી રેખા પરના બિંદુ A થી 3.5 એકમ દૂર એક બિંદુ B લો. AB = 3.5 એકમ થશે. (આકૃતિ 1.15 જુઓ) B થી 1 એકમ અંતરે બિંદુ C લો. AC નું મધ્યબિંદુ શોધીને તેને O કહો. O કેન્દ્ર અને OC જેટલી ત્રિજ્યાવાળુ એક અર્ધવર્તુળ દોરો. B માંથી પસાર થતી AC ને લંબ અને અર્ધવર્તુળને D માં છેદતી રેખા દોરો. તો $BD = \sqrt{3.5}$ થાય.



આકૃતિ 1.15

વ્યાપક રીતે, $\sqrt{x}$ નું મૂલ્ય શોધવા માટે (જ્યાં x એક ધન વાસ્તવિક સંખ્યા છે) AB = x એકમ થાય એવું બિંદુ B લો અને આકૃતિ 1.16 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે BC = 1 એકમ થાય એવું બિંદુ C લો. x=3.5 ના કિસ્સામાં જોયું તે પ્રમાણે $BD = \sqrt{x}$ મળશે.



આકૃતિ 1.16 (a), $x > 1$

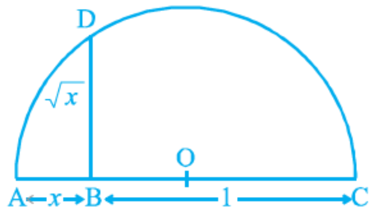
આ પરિણામને આપણે પાયથાગોરસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને સાબિત કરી શકીએ.

અહીં આકૃતિ 1.16 (a) માં Δ OBD એક કાટકોણ ત્રિકોણ છે. વળી, વર્તુળની ત્રિજ્યા $\frac{x+1}{2}$ એકમ છે.

આથી $OC = OD = OA = \frac{x+1}{2}$ એકમ

હવે $OB = x - \left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{x-1}{2}$, (આકૃતિ 1.16 (a) માં)

અથવા $OB = \frac{x+1}{2} - x = \frac{1-x}{2}$, (આકૃતિ 1.16 (b)માં)



આકૃતિ 1.16 (b), $x < 1$

એટલે કે જો $x = 3{\cdot}6$ તો $OB = 1{\cdot}3$ [આકૃતિ 1·16 (a)] તથા જો $x = 0{\cdot}6$ તો $OB = 0{\cdot}2$ [આકૃતિ 1·16 (b)]

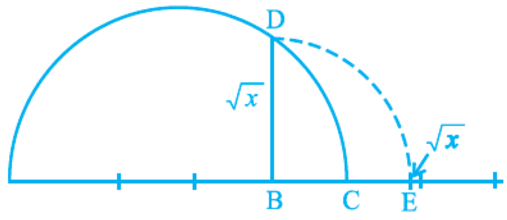
પાયથાગોરસ પ્રમેય પરથી

$$BD^2 = OD^2 - OB^2 = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = \frac{4x}{4} = x. \text{(આકૃતિ 1.16 (a))}$$

$$BD^2 = OD^2 - OB^2 = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-x}{2}\right)^2 = \frac{4x}{4} = x. \text{(આકૃતિ 1.16 (b))}$$

આથી $BD = \sqrt{x}$ મળે.

આ રચના આપણને વાસ્તવિક સંખ્યા $x > 0$ માટે $\sqrt{x}$ નું અસ્તિત્વ તથા તેને દર્શાવવાની ભૌમિતિક રીત દર્શાવે છે. જો આપણે સંખ્યારેખા પર $\sqrt{x}$ નું નિરૂપણ કરવા માંગતા હોઇએ તો આપણે રેખા BC ને સંખ્યા રેખા, B ને શૂન્ય લઇ અને C ને 1 તરીકે લઇએ. B ને કેન્દ્ર અને BD ને ત્રિજ્યા લઇને એક ચાપ દોરીએ. તે સંખ્યારેખાને બિંદુ E માં છેદશે. (જુઓ આકૃતિ 1.17). E એ $\sqrt{x}$ નું નિરૂપણ કરે છે.



આકૃતિ 1.17, $x > 1$

$0 < x < 1$ માટે $\sqrt{x}$ ની રજૂઆત પણ તે જ રીતે થઇ શકે.

હવે આપણે કોઈ પણ ધન વાસ્તવિક સંખ્યાના વર્ગમૂળ વિશેના ખ્યાલને ઘનમૂળ, ચતુર્થમૂળ અને વ્યાપક રીતે ધન પૂર્ણાંક n માટે વાસ્તવિક સંખ્યાના n- મૂળ સુધી પણ વિસ્તૃત કરી શકીએ.

આગળના વર્ગોમાં વર્ગમૂળ અને ઘનમૂળ માટેની મેળવેલી સમજને તમે યાદ કરો.

$\sqrt[3]{8}$ શું છે ? આપણે જાણીએ છીએ કે જેનો ઘન 8 હોય તેવી એક ધન સંખ્યા છે. તમે અનુમાન કર્યું જ હશે કે $\sqrt[3]{8} = 2$ છે. ચાલો આપણે $\sqrt[5]{243}$ નું મૂલ્ય શોધીએ. શું તમે જાણો છો કે $b^5 = 243$ થાય તેવી કોઈ સંખ્યા b છે ? તેનો જવાબ છે 3. તેથી $\sqrt[5]{243} = 3$.

આ ઉદાહરણોથી, $a > 0$ એક વાસ્તવિક સંખ્યા હોય અને n એક ધન પૂર્ણાંક હોય તેવા a અને n માટે શું તમે $\sqrt[n]{a}$ વ્યાખ્યાયિત કરી શકશો ?

ધારો કે $a > 0$ એક વાસ્તવિક સંખ્યા છે અને n એક ધન પૂર્ણાંક છે. $b > 0$ માટે, જો $b^n = a$ તો $\sqrt[n]{a} = b$ છે. અહીં ધ્યાન રાખો કે $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[n]{a}$, વગેરેમાં '$\sqrt{\ }$' સંકેતને ***કરણી ચિહ્ન*** *(Radical Sign)* કહેવામાં આવે છે.

આપણે વિવિધ ક્રિયાઓ માટે ઉપયોગી હોય તેવા વર્ગમૂળને લગતા કેટલાક ***નિત્યસમ****(Identities)* લઇએ. તમે અગાઉના ધોરણમાં આમાંના કેટલાકથી પરિચિત થયા છો. બાકીના વાસ્તવિક સંખ્યાના સરવાળા પરના ગુણાકારના વિભાજનના નિયમથી અને નિત્યસમ $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ થી મળે છે. (x, y વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે)

ધારો કે a અને b ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

(ii) $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a - b$

(iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right) = a^2 - b$

(v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right) = \sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}$

(vi) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$

આ નિત્યસમ પર આધારિત કેટલાક વિશિષ્ટ ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 16: નીચેના પ્રશ્નોમાં સાદુંરૂપ આપો.

(i) $\left(5+\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)$ (ii) $\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)$

(iii) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)$

ઉકેલ: (i) $\left(5+\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)=10+5\sqrt{5}+2\sqrt{7}+\sqrt{35}$

(ii) $\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)=5^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=25-5=20$

(iii) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\sqrt{7}+\left(\sqrt{7}\right)^2=3+2\sqrt{21}+7=10+2\sqrt{21}$

(iv) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)=\left(\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2=11-7=4$

નોંધ : ધ્યાન રાખો કે ઉપરના ઉદાહરણમાં 'સાદુંરૂપ' શબ્દનો અર્થ એ થાય છે કે ''આ વિસ્તરણને સંમેય સંખ્યા અને અસંમેય સંખ્યાના સરવાળા તરીકે દર્શાવો''.

આપણે નીચેના પ્રશ્નનો વિચાર કરી આ વિભાગની ચર્ચા પૂર્ણ કરીશું. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ને સંખ્યારેખા પર ક્યાં દર્શાવી શકાય ? તમે જાણો છો કે તે અસંમેય સંખ્યા છે. જો છેદ સંમેય સંખ્યા હોય તો તે સરળ પડશે. જો આપણે છેદનું સંમેયીકરણ કરી શકીએ તો છેદ સંમેય સંખ્યા બનશે. તે માટે વર્ગમૂળના નિત્યસમોની જરૂર પડશે. આ કેવી રીતે શક્ય બને તે જોઈએ.

ઉદાહરણ 17: $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ના છેદનું સંમેયીકરણ કરો.

ઉકેલ : આપણે જેનો છેદ સંમેય સંખ્યા હોય એવી એક સમકક્ષ અભિવ્યક્તિમાં $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ને દર્શાવીશું . આપણે જાણીએ છીએ કે $\sqrt{2}\,.\,\sqrt{2}$ સંમેય સંખ્યા છે. આપણે એ પણ જાણીએ છીએ કે $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ને $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ વડે ગુણવાથી તેને સમકક્ષ અભિવ્યક્તિ મળે છે, કારણ કે $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$ છે. આ બંને તથ્યોને ભેગાં કરીએ તો આપણને $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ મળે. આ સ્વરૂપમાં સંખ્યારેખા પર $\frac{1}{\sqrt{2}}$ નું નિરૂપણ કરવું સહેલું થઈ જાય. આ સંખ્યા 0 અને $\sqrt{2}$ નું મધ્યબિંદુ છે.

ઉદાહરણ 18 : $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ ના છેદનું સંમેયીકરણ કરો.

ઉકેલ : આપણે ઉપરના નિત્યસમ (iv) નો ઉપયોગ કરીશું. $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ નો $2-\sqrt{3}$ વડે ગુણાકાર અને ભાગાકાર કરવાથી આપણને

$\frac{1}{2+\sqrt{3}}\times\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}=2-\sqrt{3}$ મળશે.

ઉદાહરણ 19 : $\dfrac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ ના છેદનું સંમેયીકરણ કરો.

ઉકેલ : અહીં આપણે ઉપરોક્ત નિત્યસમ (iii) નો ઉપયોગ કરીશું.

$$\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{3-5} = \left(\frac{-5}{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$$

ઉદાહરણ 20: $\dfrac{1}{7+3\sqrt{2}}$ ના છેદનું સંમેયીકરણ કરો.

ઉકેલ : $\dfrac{1}{7+3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{7+3\sqrt{2}} \times \left(\dfrac{7-3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}}\right) = \dfrac{7-3\sqrt{2}}{49-18} = \dfrac{7-3\sqrt{2}}{31}$

આમ, જ્યારે કોઈ અભિવ્યક્તિના છેદમાં વર્ગમૂળવાળું પદ(અથવા કરણી ચિહ્નની અંદરની સંખ્યા) હોય ત્યારે જેનો છેદ એક સંમેય સંખ્યા હોય તેવી સમતુલ્ય અભિવ્યક્તિમાં તેને રૂપાંતરિત કરવાની પદ્ધતિને ***છેદનું સંમેયીકરણ*** (*Rationalising the denominator*) કહેવાય છે.

સ્વાધ્યાય 1.5

1. આપેલી સંખ્યાઓનું સંમેય અને અસંમેય સંખ્યાઓમાં વર્ગીકરણ કરો :

   (i) $2-\sqrt{5}$ (ii) $\left(3+\sqrt{23}\right)-\sqrt{23}$ (iii) $\dfrac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$

   (iv) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (v) 2π

2. સાદું રૂપ આપો :

   (i) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)$ (ii) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)$

   (iii) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$

3. યાદ કરો કે π ને એક વર્તુળના પરિઘ (c) અને તેના વ્યાસ (d) ના ગુણોત્તર તરીકે દર્શાવવામાં આવે છે. એટલે કે $\pi = \dfrac{c}{d}$. તે વિરોધાભાસી છે, કારણકે π એ અસંમેય સંખ્યા છે. આ વિરોધાભાસનો ઉકેલ કેવી રીતે લાવશો ?

4. $\sqrt{9.3}$ ને સંખ્યારેખા પર દર્શાવો.

5. આપેલ સંખ્યાઓના છેદનું સંમેયીકરણ કરો.

   (i) $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$ (iii) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ (iv) $\dfrac{1}{\sqrt{7}-2}$

1.6 વાસ્તવિક સંખ્યાઓ માટે ઘાતાંકના નિયમો

શું તમને યાદ છે કે નીચે આપેલી સંખ્યાઓનું સાદુંરૂપ કેવી રીતે આપી શકાય?

(i) $17^2 \cdot 17^5 =$ (ii) $\left(5^2\right)^7 =$ (iii) $\dfrac{23^{10}}{23^7} =$ (iv) $7^3 \cdot 9^3 =$

શું તમે તેના જવાબો મેળવ્યા ? આ જવાબો નીચે મુજબ છે.

(i) $17^2 \cdot 17^5 = 17^7$ (ii) $(5^2)^7 = 5^{14}$

(iii) $\dfrac{23^{10}}{23^7} = 23^3$ (iv) $7^3 \cdot 9^3 = 63^3$

આ જવાબો મેળવવા માટે તમે નીચે દર્શાવેલા અગાઉના ધોરણમાં શીખેલા તે *ઘાતાંકના નિયમો* નો ઉપયોગ કર્યો હશે. (અહીં a, n અને m એ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ છે. તમને એ પણ યાદ હશે કે a ને *આધાર* (*base*) અને m અને n ને *ઘાતાંક* (*exponents*) કહેવામાં આવે છે.)

(i) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iii) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n},\ m > n$ (iv) $a^m b^m = (ab)^m$

$(a)^0$ ની કિંમત શું છે ? તેની કિંમત 1 થાય. આ ઉપરાંત $(a)^0 = 1$ થાય તેનો અભ્યાસ તમે કરી ગયા છો. ઉપરોક્ત નિયમ (iii) નો ઉપયોગ કરીને $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$ પણ મેળવી શકાય.

આ નિયમોનો ઉપયોગ ઋણ ઘાતાંક માટે પણ કરી શકાય છે.

ઉદાહરણ તરીકે,

(i) $17^2 \cdot 17^{-5} = 17^{-3} = \dfrac{1}{17^3}$ (ii) $\left(5^2\right)^{-7} = 5^{-14}$

(iii) $\dfrac{23^{-10}}{23^7} = 23^{-17}$ (iv) $(7)^{-3} \cdot (9)^{-3} = (63)^{-3}$

ધારો કે આપણે નીચેની ગણતરી કરવી છે.

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4$ (iii) $\dfrac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$

હવે આપણે આગળ કેવી રીતે વધીશું ? આધાર ધન વાસ્તવિક સંખ્યા હોય અને ઘાતાંક સંમેય સંખ્યા હોય ત્યારે આપણે જેનો અગાઉ અભ્યાસ કર્યો છે તેવા ઘાતાંકના નિયમોનો વિસ્તાર કરીશું. (હવે પછી તમે ઘાતાંક વાસ્તવિક સંખ્યા હોય તે પ્રમાણેના નિયમોનો વિસ્તાર કરશો.) પરંતુ આ નિયમોને દર્શાવતાં પહેલાં અને આ નિયમોનું જ્ઞાન મેળવતાં પહેલાં એ જાણવું જરૂરી છે કે $4^{\frac{3}{2}}$ નો અર્થ શો થાય ? આપણે તે અંગે થોડુંક કાર્ય કરવું પડશે !

વિભાગ 1.4 માં વાસ્તવિક સંખ્યા $a > 0$ માટે $\sqrt[n]{a}$ ને નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કર્યું છે.

ધારો કે $a > 0$ એક વાસ્તવિક સંખ્યા છે અને n ધન પૂર્ણાંક છે તો જ્યારે $b^n = a$ હોય ત્યારે $\sqrt[n]{a} = b$ થાય અને $b > 0$ છે.

ઘાતાંકની ભાષામાં આપણે $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ લઈએ છીએ.

ઉદાહરણ તરીકે $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$

હવે, $4^{\frac{3}{2}}$ બે રીતે વિચારીશું.

$$\text{(i) } 4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$\text{(ii) } 4^{\frac{3}{2}} = \left(4^3\right)^{\frac{1}{2}} = (64)^{\frac{1}{2}} = 8$$

આ પરથી તેની વ્યાખ્યા નીચે મુજબ મળે.

જો $a > 0$ એક વાસ્તવિક સંખ્યા હોય તથા m અને n જેમને 1 સિવાય કોઈ સામાન્ય અવયવ ન હોય તેવા પૂર્ણાંક હોય અને $n > 0$ હોય.

તો $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ થાય.

આપણને હવે ઘાતાંકના વિસ્તૃત નિયમો નીચે પ્રમાણે મળે છે.

ધારો કે $a > 0$ એક વાસ્તવિક સંખ્યા છે અને p અને q એ સંમેય સખ્યાઓ છે,

(i) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ (ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

(iii) $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p b^p = (ab)^p$

હવે તમે અગાઉ પૂછેલા પ્રશ્નોના જવાબ શોધવા ઉપરોક્ત નિયમોનો ઉપયોગ કરી શકો છો.

ઉદાહરણ 21 : સાદું રૂપ આપો (i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4$

(iii) $\dfrac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$

ઉકેલ : (i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4 = 3^{\frac{4}{5}}$

(iii) $\dfrac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}} = 7^{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)} = 7^{\frac{3-5}{15}} = 7^{\frac{-2}{15}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}} = (13 \times 17)^{\frac{1}{5}} = 221^{\frac{1}{5}}$

સ્વાધ્યાય 1.6

1. કિંમત શોધો : (i) $64^{\frac{1}{2}}$ (ii) $32^{\frac{1}{5}}$ (iii) $125^{\frac{1}{3}}$

2. કિંમત શોધો : (i) $9^{\frac{3}{2}}$ (ii) $32^{\frac{2}{5}}$ (iii) $16^{\frac{3}{4}}$ (iv) $125^{\frac{-1}{3}}$

3. સાદું રૂપ આપો : (i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{5}}$ (ii) $\left(\frac{1}{3^3}\right)^7$ (iii) $\frac{11^{\frac{1}{2}}}{11^{\frac{1}{4}}}$ (iv) $7^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}$

1.7 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓ શીખ્યા :

1. જો p તથા q પૂર્ણાંક હોય તથા q શૂન્યેતર હોય તથા $r = \frac{p}{q}$ હોય તો r ને સંમેય સંખ્યા કહે છે.
2. જો વાસ્તવિક સંખ્યા s ને જ્યાં p પૂર્ણાંક હોય, q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તેવા $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં ન દર્શાવી શકાય તો s ને અસંમેય સંખ્યા કહે છે.
3. સંમેય સંખ્યાની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ એ સાન્ત અથવા અનંત આવૃત્ત હોય છે. વધુમાં જે સંખ્યાની દશાંશ અભિવ્યક્તિ સાન્ત અથવા અનંત આવૃત હોય તે સંમેય સંખ્યા છે.
4. અસંમેય સંખ્યાની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ અનંત અનાવૃત્ત હોય છે. વધુમાં જે સંખ્યાની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ અનંત અનાવૃત્ત હોય, તે સંખ્યા અસંમેય સંખ્યા છે.
5. બધી સંમેય અને અસંમેય સંખ્યાઓને એકત્રિત કરવાથી વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો સમૂહ બને છે.
6. સંખ્યારેખા પરના દરેક બિંદુને સંગત અનન્ય વાસ્તવિક સંખ્યા હોય છે અને દરેક વાસ્તવિક સંખ્યાને સંગત સંખ્યારેખા પર અનન્ય બિંદુ મળે છે.
7. જો r સંમેય સંખ્યા હોય અને s અસંમેય સંખ્યા હોય તો $r + s$ અને $r-s$ અસંમેય સંખ્યા છે તથા શૂન્યેતર સંમેય સંખ્યા r માટે $r.s$ અને $\frac{r}{s}$ અસંમેય સંખ્યા થાય છે.
8. નીચેના ગુણધર્મો ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ a અને b માટેના છે.

   (i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

   (iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a-b$

   (iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right) = a^2-b$ (v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a+2\sqrt{ab}+b$

9. $\frac{1}{\sqrt{a}+b}$ ના છેદનું સંમેયીકરણ કરવા માટે તેનો $\frac{\sqrt{a}-b}{\sqrt{a}-b}$ વડે ગુણાકાર કરવો જોઈએ. a અને b પૂર્ણાંક છે.
10. જો $a > 0$ એક વાસ્તવિક સંખ્યા હોય અને p અને q સંમેય સંખ્યા હોય, તો

    (i) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ (ii) $\left(a^p\right)^q = a^{pq}$ (iii) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p b^p = (ab)^p$

પ્રકરણ 2

બહુપદીઓ

2.1 પ્રાસ્તાવિક

અગાઉના વર્ગોમાં આપણે બૈજિક અભિવ્યક્તિના સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર, ભાગાકાર શીખ્યાં છીએ. કેટલીક બૈજિક અભિવ્યક્તિના અવયવો પાડવાનું પણ આપણે શીખ્યાં છીએ. કેટલાંક બૈજિક નિત્યસમો નીચે આપેલા છે.

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

અને $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

અને અવયવ પાડવામાં તેમનો ઉપયોગ કરવાનું પણ શીખ્યાં છીએ. આ પ્રકરણમાં આપણે જેને 'બહુપદી' કહીશું તેવી ચોક્કસ પ્રકારની બૈજિક અભિવ્યક્તિ અને તેને સંબંધિત કેટલાક પારિભાષિક શબ્દોની સમજૂતી મેળવીશું. આ પ્રકરણમાં આપણે ***શેષ પ્રમેય*** (*Remainder Theorem*) અને ***અવયવ પ્રમેય*** (*Factor Theorem*)નો અભ્યાસ કરીશું અને બહુપદીઓના અવયવો પાડવામાં તેમનો ઉપયોગ કરતાં શીખીશું આ ઉપરાંત, કેટલાક વધુ બૈજિક નિત્યસમો અને તેમનો અવયવો પાડવામાં અને આપેલ કિંમતો આગળ અભિવ્યક્તિઓનું મૂલ્ય શોધવામાં ઉપયોગ કરીશું.

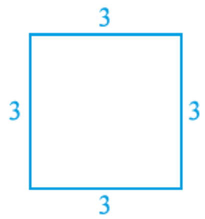
2.2 એકચલ બહુપદી

ભિન્ન કિંમતો ધારણ કરી શકે તેવી સંજ્ઞાને ચલ કહે છે. ચલને x, y, z વગેરે સંકેતથી દર્શાવાય છે. નોંધો કે $2x$, $3x, -x, -\frac{1}{2}x$ એ *બૈજિક અભિવ્યક્તિ* (*Algebraic Expressions*) છે. આ બધી બૈજિક *અભિવ્યક્તિ* (અચળપદ) × x પ્રકારની છે. હવે ધારો કે આપણે એક (અચળપદ)×(ચલ) પ્રકારની બહુપદી લખવી છે અને આપણે અચળ વિશે જાણતાં

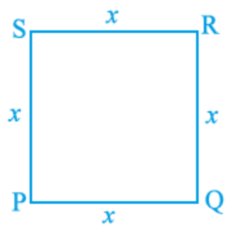
નથી. આવાં ઉદાહરણોમાં અચળને સામાન્ય રીતે a, b, c વગેરે દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે. તેથી પદાવલિને ax પ્રમાણે દર્શાવવામાં આવે છે.

આમ, છતાં અચળ અને ચલ દર્શાવતા સંકેતો વચ્ચે તફાવત હોય છે. કોઇ એક સ્થિતિમાં અચળની કિંમત એક સરખી જળવાઇ રહે છે, પરંતુ ચલની કિંમત બદલાતી રહે છે.

હવે 3 એકમ બાજુવાળા ચોરસનો વિચાર કરો.(આકૃતિ 2.1). તેની પરિમિતિ કેટલી થશે? તમે જાણો છો કે ચાર બાજુઓનાં માપના સરવાળાને ચોરસની પરિમિતિ કહે છે. અહીં દરેક બાજુની લંબાઈ 3 એકમ છે. તેથી તેની પરિમિતિ $4 \times 3 = 12$ એકમ છે. હવે જો ચોરસની એક બાજુનું માપ 10 એકમ હોય તો તેની પરિમિતિ કેટલી થશે? પરિમિતિ $4 \times 10 = 40$ એકમ થશે. જો ચોરસની એક બાજુનું માપ x એકમ હોય તો (આકૃતિ 2.2) ચોરસની પરિમિતિ $4x$ એકમ થાય. આમ, જેમ બાજુની લંબાઇનું માપ બદલાય તેમ પરિમિતિનું માપ પણ બદલાય છે.



આકૃતિ 2.1



આકૃતિ 2.2

તમે ચોરસ PQRS નું ક્ષેત્રફળ શોધી શકો ? તે $x \times x = x^2$ ચોરસ એકમ છે. x^2 એ બૈજિક અભિવ્યક્તિ છે. તમે $2x$, $x^2 + 2x$, $x^3 - x^2 + 4x + 7$ જેવી બીજી બૈજિક અભિવ્યક્તિથી પરિચિત છો. આપણે નોંધીએ કે બધી જ બૈજિક અભિવ્યક્તિઓના ચલના ઘાતાંક એ પૂર્ણ સંખ્યાઓ છે. આ પ્રકારની અભિવ્યક્તિઓને એક ચલ વાળી બહુપદીઓ કહે છે. ઉપરના ઉદાહરણમાં x એ ચલ છે. ઉદાહરણ તરીકે $x^3 - x^2 + 4x + 7$ એ x ચલ વાળી બહુપદી છે. તે જ પ્રમાણે $3y^2 + 5y$ એ y ચલ વાળી બહુપદી છે અને $t^2 + 4$ એ t ચલ વાળી બહુપદી છે.

બહુપદી $x^2 + 2x$ માં x^2 અને $2x$ એ બહુપદીનાં ***પદો*** છે. તે જ પ્રમાણે $3y^2 + 5y + 7$ ને $3y^2$, $5y$ અને 7 એમ ત્રણ પદો છે. તમે બહુપદી $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$ નાં પદો લખી શકશો ? આ બહુપદીને 4 પદો $-x^3$, $4x^2$, $7x$, અને -2 છે.

બહુપદીના દરેક પદને ***સહગુણક*** હોય છે. તેથી બહુપદી $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$ માં x^3 નો સહગુણક -1, x^2 નો સહગુણક 4, x નો સહગુણક 7 અને x^0 નો સહગુણક -2 છે. (યાદ છે ને કે $x^0 = 1$) $x^2 - x + 7$ માં x નો સહગુણક શું છે તે તમે કહી શકશો? તે -1 છે.

સંખ્યા 2 એ પણ બહુપદી છે. હકીકતમાં 2, -5, 7 વગેરે અચળ બહુપદીઓનાં ઉદાહરણો છે. અચળ બહુપદી 0 ને ***શૂન્ય બહુપદી*** કહે છે. બધી બહુપદીઓના સંગ્રહમાં આ શૂન્ય બહુપદી ખૂબ જ મહત્વની ભૂમિકા ભજવે છે. આ વિશે તમે આગળના ધોરણમાં શીખશો.

હવે $x + \frac{1}{x}$, $\sqrt{x}+3$ અને $\sqrt[3]{y}+y^2$ જેવી બૈજિક અભિવ્યક્તિઓનો વિચાર કરો. તમે જાણો છો કે $x+\frac{1}{x}$ ને $x+x^{-1}$ તરીકે પણ લખી શકાય. અહીં બીજા પદનો ઘાતાંક એટલે કે x^{-1} નો ઘાતાંક -1 છે અને તે પૂર્ણ સંખ્યા નથી. તેથી આ બૈજિક અભિવ્યક્તિ એ બહુપદી નથી.

ફરીથી જોતાં, $\sqrt{x}+3$ ને $x^{\frac{1}{2}}+3$ રીતે પણ લખી શકાય. અહીં x નો ઘાતાંક $\frac{1}{2}$ છે અને તે પૂર્ણ સંખ્યા નથી. તેથી $\sqrt{x}+3$ એ x માં બહુપદી છે ? ના તે નથી. તો $\sqrt[3]{y}+y^2$ અંગે તમારું શું માનવું છે ? તે પણ y માં બહુપદી નથી. (કેમ ?)

જો બહુપદીમાં ચલ તરીકે x હોય તો આપણે બહુપદીને $p(x)$ અથવા $q(x)$ અથવા $r(x)$ વગેરે તરીકે ઓળખીશું. ઉદાહરણ તરીકે,

$$p(x) = 2x^2 + 5x - 3$$
$$q(x) = x^3 - 1$$
$$r(y) = y^3 + y + 1$$
$$s(u) = 2 - u - u^2 + 6u^5$$

બહુપદીમાં ગમે તેટલાં પદો હોઈ શકે. $x^{150} + x^{149} + ...+ x^2 + x + 1$ એ 151 પદો વાળી બહુપદી છે. $2x$, 2, $5x^3$, $-5x^2$, y અને u^4 જેવી બહુપદીઓનો વિચાર કરો. તમે જોયું કે આ બધી બહુપદીઓમાં માત્ર એક જ પદ છે. તેમને ***એકપદીઓ*** *(Monomials)* કહે છે. (*Mono* એટલે 1)

હવે નીચેની બહુપદીઓનું નિરીક્ષણ કરો :

$p(x) = x + 1, q(x) = x^2 - x, \quad r(y) = y^{30} + 1, \qquad t(u) = u^{43} - u^2$

આ દરેકમાં કેટલાં પદો છે ? આ દરેક બહુપદીને બે પદો છે. જે બહુપદીને માત્ર બે જ પદો હોય તેને ***દ્વિપદી*** (*binomial*) કહે છે. (*bi* એટલે 2)

તે જ પ્રમાણે જે બહુપદીઓને માત્ર 3 પદો હોય તેને ***ત્રિપદી*** *(trinomials)* (*tri* એટલે 3)કહે છે. ત્રિપદીનાં કેટલાંક ઉદાહરણો નીચે પ્રમાણે છે :

$p(x) = x + x^2 + \pi, \qquad q(x) = \sqrt{2} + x - x^2,$

$r(u) = u + u^2 - 2, \qquad t(y) = y^4 + y + 5.$

હવે $p(x) = 3x^7 - 4x^6 + x + 9$ નો વિચાર કરો. x ની મહત્તમ ઘાતવાળું પદ કયું છે ? તે $3x^7$ છે. x નો ઘાતાંક 7 છે. તે જ પ્રમાણે બીજી બહુપદી $q(y) = 5y^6 - 4y^2 - 6$ માં y ની મહત્તમ ઘાતવાળુ પદ $5y^6$ છે અને y નો ઘાતાંક 6 છે. બહુપદીના ચલના મહત્તમ ઘાતાંકને ***બહુપદીની ઘાત***(*degree of the polynomial*) કહે છે. તેથી બહુપદી $3x^7 - 4x^6 + x + 9$ ની ઘાત 7 છે અને બહુપદી $5y^6 - 4y^2 - 6$ ની ઘાત 6 છે. **શૂન્ય સિવાયની અચળ બહુપદીની ઘાત 0 હોય છે.**

ઉદાહરણ 1 : નીચે આપેલી બહુપદીઓની ઘાત જણાવો :

(i) $x^5 - x^4 + 3$ (ii) $2 - y^2 - y^3 + 2y^8$ (iii) 2

ઉકેલ : (i) ચલનો મહત્તમ ઘાતાંક 5 છે. તેથી બહુપદીની ઘાત 5 છે.

(ii) ચલનો મહત્તમ ઘાતાંક 8 છે. તેથી બહુપદીની ઘાત 8 છે.

(iii) અહીં એક જ પદ 2 છે. તેને $2x^0$ તરીકે પણ લખી શકાય છે. તેથી x નો ઘાતાંક 0 છે. તેથી બહુપદીની ઘાત 0 છે.

હવે બહુપદીઓ $p(x) = 4x + 5$, $q(y) = 2y$, $r(t) = t + \sqrt{2}$ અને $s(u) = 3 - u$ નો વિચાર કરો. તમને આ બધામાં કંઈ સામાન્ય લાગે છે ? આ બધી બહુપદીઓની ઘાત 1 છે. જે બહુપદીની ઘાત 1 હોય તે બહુપદીને ***સુરેખ બહુપદી*** કહે છે. કેટલીક અન્ય સુરેખ બહુપદીઓ $2x - 1, \sqrt{2}y + 1, 2 - u$ છે. હવે ત્રણ પદ અને ચલ x વાળી સુરેખ બહુપદી લખવાનો પ્રયત્ન કરો. તમે તે નહીં લખી શકો કારણ કે ચલ x વાળી સુરેખ બહુપદીને વધુમાં વધુ બે પદ હોય છે. તેથી દરેક ચલ x વાળી સુરેખ બહુપદીને $ax + b$ સ્વરૂપમાં લખી શકાય, જ્યાં a અને b અચળ છે અને $a \neq 0$ (શા માટે ?) તે પ્રમાણે $ay + b$ એ ચલ y વાળી સુરેખ બહુપદી છે.

હવે નીચેની બહુપદીઓનો વિચાર કરોઃ

$$2x^2 + 5,\ 5x^2 + 3x + \pi,\ x^2 \text{ અને } x^2 + \frac{2}{5}x$$

આપેલી બહુપદીઓની ઘાત 2 છે. તેથી તે બહુપદીઓને ***દ્વિઘાત બહુપદી*** કહે છે. દ્વિઘાત બહુપદીનાં કેટલાંક ઉદાહરણો $5 - y^2$, $4y - 5y^2$ અને $6 - y - y^2$ છે. તમે ચાર પદ વાળી એક ચલ વાળી દ્વિઘાત બહુપદી લખી શકો ? તમને ખ્યાલ આવશે કે એક ચલ વાળી દ્વિઘાત બહુપદીને વધુમાં વધુ 3 પદો હોય છે. જો તમે દ્વિઘાત બહુપદીના કેટલાંક વધારે ઉદાહરણો જોશો તો ખ્યાલ આવશે કે તે સામાન્ય રીતે ચલ x વાળી દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ સ્વરૂપમાં મળશે. અહીં $a \neq 0$ તથા a, b, c અચળો છે. તે જ પ્રમાણે ચલ y વાળી દ્વિઘાત બહુપદી $ay^2 + by + c$ છે. અહીં $a \neq 0$ તથા a, b, c અચળ છે.

જે બહુપદીની ઘાત 3 હોય તેને ત્રિઘાત બહુપદી કહે છે. ત્રિઘાત બહુપદીનાં કેટલાંક ઉદાહરણો $4x^3$, $2x^3 + 1$, $5x^3 + x^2$, $6x^3 - x$, $6 - x^3$, $2x^3 + 4x^2 + 6x + 7$ છે. એક ચલ વાળી ત્રિઘાત બહુપદીને કેટલાં પદ હોઈ શકે? તેને વધુમાં વધુ 4 પદો હોઈ શકે. તેને સામાન્ય રીતે $ax^3 + bx^2 + cx + d$ સ્વરૂપમાં લખી શકાય. અહીં $a \neq 0$ અને a, b, c, d અચળ છે.

હવે, તમે જોયું કે એક ઘાતવાળી, 2 ઘાતવાળી અથવા 3 ઘાતવાળી બહુપદીઓની જેમ તમે એક ચલ વાળી n ઘાતવાળી બહુપદીને લખી શકો ? એક ચલ વાળી n ઘાતની બહુપદીને સામાન્ય રીતે નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

જ્યાં $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ અચળ છે અને $a_n \neq 0$.

વિશેષ વિકલ્પમાં જો $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$ (બધાં જ અચળ શૂન્ય છે) તો આપણે *શૂન્ય બહુપદી* મેળવીશું. શૂન્ય બહુપદીની ઘાત કેટલી હશે ? શૂન્ય બહુપદીની ઘાત *અવ્યાખ્યાયિત* છે.

અત્યાર સુધી આપણે એક ચલ વાળી બહુપદીઓનો અભ્યાસ કર્યો. એક કરતાં વધારે ચલ વાળી બહુપદીઓ પણ હોઇ શકે. ઉદાહરણ તરીકે $x^2 + y^2 + xyz$ (જ્યાં x, y, z એ ચલ છે.) એ ત્રણ ચલ વાળી બહુપદી છે. તે જ પ્રમાણે $p^2 + q^{10} + r$ (જ્યાં p, q, r એ ચલ છે.) $u^3 + v^2$ (જ્યાં u, v ચલ છે.) અનુક્રમે ત્રણ અને બે ચલ વાળી બહુપદીઓ છે. આવી બહુપદીઓનો વિગતે અભ્યાસ તમે પછી કરશો.

સ્વાધ્યાય 2.1

1. નીચે આપેલી અભિવ્યક્તિઓ પૈકી કઇ બહુપદી એક ચલ વાળી છે અને કઇ બહુપદી એક ચલ વાળી નથી ? તમારા જવાબ માટે કારણ આપો.

   (i) $4x^2 - 3x + 7$ (ii) $y^2 + \sqrt{2}$ (iii) $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$ (iv) $y + \frac{2}{y}$

   (v) $x^{10} + y^3 + t^{50}$

2. નીચેનામાં x^2 નો સહગુણક લખો :

   (i) $2 + x^2 + x$ (ii) $2 - x^2 + x^3$ (iii) $\frac{\pi}{2}x^2 + x$ (iv) $\sqrt{2}x - 1$

3. 35 ઘાતાંકવાળી દ્વિપદીનું કોઈ પણ એક ઉદાહરણ અને 100 ઘાતાંકવાળી એકપદીનું કોઈ પણ એક ઉદાહરણ આપો.

4. નીચે આપેલી બહુપદીઓની ઘાત જણાવો.

   (i) $5x^3 + 4x^2 + 7x$ (ii) $4 - y^2$

   (iii) $5t - \sqrt{7}$ (iv) 3

5. નીચે આપેલી બહુપદીઓને સુરેખ, દ્વિઘાત કે ત્રિઘાત બહુપદીમાં વર્ગીકૃત કરો :

   (i) $x^2 + x$ (ii) $x - x^3$ (iii) $y + y^2 + 4$ (iv) $1 + x$

   (v) $3t$ (vi) r^2 (vii) $7x^3$

2.3 બહુપદીનાં શૂન્યો

બહુપદી $p(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ નો વિચાર કરો.

જો આપણે x ના બદલે 1 લઈએ તો,

$$p(1) = 5 \times (1)^3 - 2 \times (1)^2 + 3 \times (1) - 2$$
$$= 5 - 2 + 3 - 2$$
$$= 4$$

આ પરિસ્થિતિમાં આપણે કહીશું કે $x = 1$ આગળ $p(x)$ નું મૂલ્ય 4 છે.

તે જ પ્રમાણે, $p(0) = 5(0)^3 - 2(0)^2 + 3(0) - 2$

$= -2$

શું તમે $p(-1)$ શોધી શકશો ?

ઉદાહરણ 2 : નીચે આપેલી બહુપદીઓનું મૂલ્ય બહુપદીની ચલની સામે દર્શાવેલ કિંમતો માટે શોધો.

(i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$, $x = 1$ આગળ

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$, $y = 2$ આગળ

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$, $t = a$ આગળ

ઉકેલ : (i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$

$x = 1$ આગળ બહુપદી $p(x)$નું મૂલ્ય,

$p(1) = 5(1)^2 - 3(1) + 7$

$= 5 - 3 + 7 = 9$

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$

$y = 2$ આગળ બહુપદી $q(y)$નું મૂલ્ય,

$q(2) = 3(2)^3 - 4(2) + \sqrt{11} = 24 - 8 + \sqrt{11} = 16 + \sqrt{11}$

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$

$t = a$ આગળ બહુપદી $p(t)$નું મૂલ્ય,

$p(a) = 4a^4 + 5a^3 - a^2 + 6$

હવે, બહુપદી $p(x) = x - 1$નો વિચાર કરીએ.

$p(1)$ નું મૂલ્ય શું? આપણે જોઈશું કે : $p(1) = 1 - 1 = 0$.

અહીં $p(1) = 0$. તેથી 1 એ આપેલી બહુપદી $p(x)$ નું શૂન્ય છે તેમ કહેવાય છે.

જો, $q(x) = x - 2$ તો, 2 એ $q(x)$નું શૂન્ય છે.

સામાન્ય રીતે આપણે કહી શકીએ કે $p(x)$ નું શૂન્ય c હોય તો $p(c) = 0$.

તમે નિરીક્ષણ કર્યું હશે કે બહુપદી $x - 1$ નું શૂન્ય શોધવા માટે તેને 0 સાથે સરખાવવી પડે. એટલે કે $x - 1 = 0$, આથી $x = 1$ મળે. *આપણે કહી શકીએ કે $p(x) = 0$ એ બહુપદીય સમીકરણ છે અને 1 એ આ બહુપદીય સમીકરણ $p(x) = 0$ નું બીજ છે.* તેથી આપણે કહી શકીશું કે 1 એ બહુપદી $x - 1$ નું શૂન્ય છે, અથવા 1 એ બહુપદીય સમીકરણ $x - 1 = 0$ નું *બીજ* છે.

હવે, અચળ બહુપદી 5 નો વિચાર કરો. તમે આ બહુપદીનું કોઈ શૂન્ય કહી શકશો ? તેને શૂન્ય નથી કારણ કે x ને બદલે કોઈ પણ સંખ્યા લખવાથી $5x^0$ આપણને 5 જ આપશે. હકીકતમાં શૂન્ય ન હોય તેવી અચળ બહુપદીને શૂન્ય હોતું નથી. શૂન્ય બહુપદીનાં શૂન્ય વિશે શું કહી શકાય ? સરળતા ખાતર સ્વીકારી લઈએ કે દરેક વાસ્તવિક સંખ્યા એ શૂન્ય બહુપદીનું શૂન્ય છે.

ઉદાહરણ 3 : ચકાસો કે -2 અને 2 બહુપદી $x + 2$ નાં શૂન્યો છે કે નહી.

ઉકેલ : ધારો કે $p(x) = x + 2$

$p(2) = 2 + 2 = 4$, $p(-2) = -2 + 2 = 0$

તેથી, -2 એ બહુપદી $x + 2$ નું શૂન્ય છે, પરંતુ 2 એ બહુપદી $x + 2$ નું શૂન્ય નથી.

ઉદાહરણ 4 : બહુપદી $p(x) = 2x + 1$ નાં શૂન્ય શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $p(x) = 0$

હવે, $2x + 1 = 0$ લેતાં, $x = -\frac{1}{2}$

તેથી, $-\frac{1}{2}$ એ બહુપદી $2x + 1$નું શૂન્ય છે.

હવે જો, $p(x) = ax + b$, $a \neq 0$, એ સુરેખ બહુપદી હોય, તો આપણે $p(x)$ નું શૂન્ય કેવી રીતે શોધી શકીએ ? ઉદાહરણ 4 પરથી કદાચ તમને ઉકેલ મળી શકે. $p(x)$ નું શૂન્ય શોધવું એટલે કે સમીકરણ $p(x) = 0$ નો ઉકેલ મેળવવો.

હવે, $p(x) = 0$ એટલે કે $ax + b = 0$, $a \neq 0$

તેથી, $ax = -b$

એટલે કે $x = -\frac{b}{a}$

તેથી, $x = -\frac{b}{a}$ એ $p(x)$ નું એક માત્ર શૂન્ય છે. એટલે કે સુરેખ બહુપદીને એક અને માત્ર એક જ શૂન્ય છે.

હવે, આપણે કહી શકીએ કે 1 એ $x - 1$ નું શૂન્ય છે અને -2 એ $x + 2$ નું શૂન્ય છે.

ઉદાહરણ 5 : ચકાસો : 2 અને 0 બહુપદી $x^2 - 2x$ નાં શૂન્ય છે.

ઉકેલ : ધારો કે, $p(x) = x^2 - 2x$

તેથી $p(2) = 2^2 - 2(2) = 4 - 4 = 0$

અને $p(0) = 0 - 0 = 0$

આથી, 2 અને 0 બંને બહુપદી $x^2 - 2x$ નાં શૂન્યો છે.

ચાલો આપણે અગત્યના મુદ્દાઓ નોંધીએ.

(i) બહુપદીનું શૂન્ય 0 હોય તે જરૂરી નથી.

(ii) 0 પણ બહુપદીનું શૂન્ય હોઈ શકે.

(iii) દરેક સુરેખ બહુપદીને એક અને માત્ર એક જ શૂન્ય હોય છે.

(iv) બહુપદીને એક કરતાં વધારે શૂન્ય પણ હોઈ શકે.

સ્વાધ્યાય 2.2

1. x ની નીચેની કિંમતો માટે $5x - 4x^2 + 3$ બહુપદીનું મૂલ્ય શોધો.

(i) $x = 0$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 2$

2. નીચે આપેલ દરેક બહુપદી માટે $p(0)$, $p(1)$ અને $p(2)$ શોધો.

(i) $p(y) = y^2 - y + 1$ (ii) $p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$

(iii) $p(x) = x^3$ (iv) $p(x) = (x - 1)(x + 1)$

3. નીચેની બહુપદીની સામે દર્શાવેલ x ની કિંમતો એ આપેલ બહુપદીનાં શૂન્યો છે કે નહિ તે ચકાસો :

(i) $p(x) = 3x + 1$, $x = -\frac{1}{3}$ (ii) $p(x) = 5x - \pi$, $x = \frac{4}{5}$

(iii) $p(x) = x^2 - 1, x = 1, -1$ (iv) $p(x) = (x + 1)(x - 2), x = -1, 2$

(v) $p(x) = x^2, x = 0$ (vi) $p(x) = lx + m, x = -\frac{m}{l}$

(vii) $p(x) = 3x^2 - 1, x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$ (viii) $p(x) = 2x + 1, x = \frac{1}{2}$

4. નીચે આપેલી દરેક બહુપદીનાં શૂન્યો શોધો :

(i) $p(x) = x + 5$ (ii) $p(x) = x - 5$ (iii) $p(x) = 2x + 5$

(iv) $p(x) = 3x - 2$ (v) $p(x) = 3x$ (vi) $p(x) = ax,\ a \neq 0$

(vii) $p(x) = cx + d,\ \ c \neq 0,\ \ c$ અને d એ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.

2.4 શેષ પ્રમેય

ચાલો, બે સંખ્યાઓ 15 અને 6 લઈએ. તમે જાણો છો કે જો આપણે 15 ને 6 વડે ભાગીએ તો આપણને ભાગફળ 2 મળે અને શેષ 3 આવે. તમને યાદ છે કે આ હકીકતને કેવી રીતે દર્શાવી શકાય ? આપણે 15 ને આ પ્રમાણે લખી શકીએ:

$$15 = (6 \times 2) + 3$$

આપણે નિરીક્ષણ કર્યું કે શેષ 3 એ ભાજક 6 કરતાં નાની છે. તે જ પ્રમાણે જો આપણે 12 ને 6 વડે ભાગીએ તો,

$$12 = (6 \times 2) + 0$$

અહીં શેષ કેટલી છે ? અહી શેષ 0 છે. આપણે કહીશું કે 6 એ 12 નો અવયવ છે અથવા 12 એ 6 નો ગુણિત છે.

હવે, પ્રશ્ન એ છે કે આપણે એક બહુપદીને બીજી બહુપદીથી ભાગી શકીએ ? શરૂઆતમાં ચાલો પ્રયત્ન કરવા માટે ભાજક તરીકે એકપદી લઈએ. તેથી ચાલો બહુપદી $2x^3 + x^2 + x$ ને એકપદી x વડે ભાગીએ.

$$(2x^3 + x^2 + x) \div x = \frac{2x^3}{x} + \frac{x^2}{x} + \frac{x}{x}$$

$$= 2x^2 + x + 1$$

હકીકતમાં, તમે નોંધ્યુ હશે કે $2x^3 + x^2 + x$ માં x સામાન્ય છે. તેથી આપણે $2x^3 + x^2 + x$ ને $x(2x^2 + x + 1)$ લખી શકીએ.

આપણે કહી શકીએ કે x અને $(2x^2 + x + 1)$ એ $2x^3 + x^2 + x$ ના અવયવો છે અને $2x^3 + x^2 + x$ એ x નો તથા $2x^2 + x + 1$નો ગુણિત છે.

ચાલો આપણે બીજી બે બહુપદીઓની જોડ $3x^2 + x + 1$ અને x નો વિચાર કરીએ.

અહીં $(3x^2 + x + 1) \div x = (3x^2 \div x) + (x \div x) + (1 \div x)$

આપણે જાણીએ છીએ કે 1 ને x વડે ભાગીને બહુપદી ન મેળવી શકાય. તેથી આવી પરિસ્થિતિમાં આપણે અટકીશું અને 1 ને શેષ તરીકે લઈશું.

$$\therefore\ 3x^2 + x + 1 = \{ x \times (3x + 1)\} + 1$$

અહીં $(3x + 1)$ એ ભાગફળ છે અને 1 એ શેષ છે. તમને લાગે છે કે x એ $3x^2 + x + 1$ નો અવયવ છે ? અહીં શેષ 0 ન હોવાથી x એ અવયવ નથી.

ચાલો હવે આપણે જેમાં કોઈપણ બહુપદીને શૂન્ય સિવાયની બહુપદી વડે ભાગવાની હોય એવું ઉદાહરણ જોઇએ.

ઉદાહરણ 6 : $p(x) = x + 3x^2 - 1$ અને $g(x) = 1 + x$ માટે $p(x)$ ને $g(x)$ વડે ભાગો.

ઉકેલ : આપણે આ ઉદાહરણનો ઉકેલ કેવી રીતે શોધી શકાય તેની સમજ નીચેનાં સોપાનો દ્વારા મેળવીશું.

સોપાન 1 : ભાજ્ય $x + 3x^2 - 1$ અને ભાજક $1 + x$ ને પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં લખીએ એટલે કે ચલના ઘાતાંકના ઉતરતા ક્રમમાં પદોની ગોઠવણી કરીએ. તેથી ભાજ્ય $= 3x^2 + x - 1$ અને ભાજક $= x + 1$.

સોપાન 2 : હવે આપણે ભાજ્યના પ્રથમ પદનો ભાજકના પ્રથમ પદ વડે ભાગાકાર કરીશું. એટલે કે $3x^2$ ને x વડે ભાગીશું. તેથી ભાગફળનું પ્રથમ પદ મળશે.

$\dfrac{3x^2}{x} = 3x$ ભાગફળનું પ્રથમ પદ

સોપાન 3 : હવે આપણે ભાગફળના પ્રથમ પદને ભાજક સાથે ગુણીશું અને જે પરિણામ મળે તેને ભાજ્યમાંથી બાદ કરીશું એટલે કે, $(x + 1)$ ને $3x$ વડે ગુણીશું અને ગુણાકાર $3x^2 + 3x$ ને ભાજ્ય $3x^2 + x - 1$ માંથી બાદ કરીશું. તેથી આપણને શેષ તરીકે $-2x-1$ મળશે.

$$\begin{array}{r|l} & \quad 3x \\ \hline x+1 & 3x^2 + x - 1 \\ & 3x^2 + 3x \\ & - \qquad - \\ \hline & \qquad -2x-1 \end{array}$$

સોપાન 4 : હવે આપણે શેષ $-2x-1$ ને નવો ભાજ્ય ગણીશું. પણ ભાજક તેનો તે જ રહેશે. હવે આપણે ભાગફળ મેળવવા સોપાન 2 નો ઉપયોગ કરીશું. એટલે કે નવા ભાજ્યના પ્રથમ પદ $-2x$ ને ભાજકના પ્રથમ પદ x વડે ભાગીશું. તેથી -2 મળશે. આ રીતે -2 એ ભાગફળનું બીજું પદ થશે.

$\dfrac{-2x}{x} = -2$ = ભાગફળનું બીજુ પદ | નવું ભાગફળ $= 3x - 2$

સોપાન 5 : હવે આપણે ભાગફળના બીજા પદને ભાજક સાથે ગુણીશું અને જે પરિણામ મળે તેને ભાજ્યમાંથી બાદ કરીશું. એટલે કે $(x + 1)$ ને -2 વડે ગણીશું અને ગુણાકાર $-2x-2$ ને ભાજ્ય $-2x-1$ માંથી બાદ કરીશું. તેથી આપણને શેષ 1 મળશે.

$$\begin{array}{l|l} (x+1)(-2) & -2x - 1 \\ = -2x - 2 & -2x - 2 \\ & + \qquad + \\ \hline & \qquad +1 \end{array}$$

આ પ્રક્રિયાને શેષ 0 ન થાય ત્યાં સુધી ચાલુ રાખવામાં આવે છે

અથવા નવા ભાજ્યની ઘાત એ ભાજકની ઘાત કરતાં ઓછી થાય ત્યાં સુધી ચાલુ રાખવામાં આવે છે. આ તબક્કે નવું ભાજ્ય એ શેષ બને છે અને ભાગફળોનો સરવાળો એ સમગ્ર ભાગફળ બને છે.

સોપાન 6 : અહીં ભાગફળ એ $3x - 2$ છે અને શેષ 1 છે.

ઉપરોક્ત સમગ્ર પ્રક્રિયા દરમિયાન આપણે શું કર્યું તેને સમગ્ર રીતે જોઈએ.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x - 2 \\
\cline{2-2}
x + 1 & 3x^2 + x - 1 \\
 & 3x^2 + 3x \\
 & - \quad - \\
\cline{2-2}
 & \qquad -2x - 1 \\
 & \qquad -2x - 2 \\
 & \qquad + \quad + \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad 1
\end{array}
$$

$3x^2 + x - 1 = (x + 1)(3x - 2) + 1$

એટલે કે **ભાજ્ય = (ભાજક × ભાગફળ) + શેષ**

વ્યાપક રીતે જો $p(x)$ ની ઘાત $\geq$ $g(x)$ ની ઘાત હોય તેવી બહુપદીઓ $p(x)$ અને $g(x)$ આપેલ હોય અને $g(x) \neq 0$, તો આપણને બહુપદીઓ $q(x)$ અને $r(x)$ એવી મળશે કે જેથી

$p(x) = g(x)\, q(x) + r(x)$,

જ્યાં $r(x) = 0$ અથવા $r(x)$ ની ઘાત $<$ $g(x)$ ની ઘાત. અહીં આપણે કહી શકીએ કે $p(x)$ ને $g(x)$ વડે ભાગીએ તો ભાગફળ $q(x)$ અને શેષ $r(x)$ મળે છે.

ઉપરોક્ત ઉદાહરણમાં ભાજક એ સુરેખ બહુપદી હતી. આ સ્થિતિમાં ચાલો આપણે એ જોઈએ કે શેષ અને ભાજ્યની કેટલીક ચોક્કસ કિંમતો વચ્ચે કોઈ સંબંધ છે કે નહિ ?

$p(x) = 3x^2 + x - 1$, માં આપણે x ની જગ્યાએ -1 લેતાં,

$p(-1) = 3(-1)^2 + (-1) -1 = 1$

તેથી $p(x) = 3x^2 + x - 1$ ને $x + 1$ વડે ભાગતાં મળતી શેષ અને બહુપદી $p(x)$ નું $x = -1$ માટે મળતું મૂલ્ય સમાન છે.

ચાલો બીજાં ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 7 : બહુપદી $3x^4 - 4x^3 - 3x -1$ ને $x - 1$ વડે ભાગો.

ઉકેલ : ભાગાકાર કરતાં,

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^3 - x^2 - x - 4 \\ \hline
x - 1 & 3x^4 - 4x^3 - 3x - 1 \\
 & 3x^4 - 3x^3 \\
 & - \quad + \\ \hline
 & - x^3 - 3x - 1 \\
 & - x^3 + x^2 \\
 & + \quad - \\ \hline
 & - x^2 - 3x - 1 \\
 & - x^2 + x \\
 & + \quad - \\ \hline
 & - 4x - 1 \\
 & - 4x + 4 \\
 & + \quad - \\ \hline
 & - 5
\end{array}
$$

અહીં શેષ -5 છે. $x - 1$ નું શૂન્ય 1 છે. તેથી જો $p(x)$ માં $x = 1$ મૂકીએ તો,

$$p(1) = 3(1)^4 - 4(1)^3 - 3(1) - 1$$

$$= 3 - 4 - 3 - 1$$

$= -5$ અને તે શેષ પણ છે.

ઉદાહરણ 8 : $p(x) = x^3 + 1$ ને $x + 1$ વડે ભાગતાં મળતી શેષ શોધો.

ઉકેલ : ભાગાકાર કરતાં,

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - x + 1 \\ \hline
x + 1 & x^3 + 1 \\
 & x^3 + x^2 \\
 & - \quad - \\ \hline
 & - x^2 + 1 \\
 & - x^2 - x \\
 & + \quad + \\ \hline
 & x + 1 \\
 & x + 1 \\
 & - \quad - \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

અહીં શેષ 0 છે અને $p(x) = x^3 + 1$ છે. વળી $x + 1 = 0$ નું બીજ -1 છે. તેથી જો $p(x)$ માં $x = -1$ મૂકીએ તો,

$$p(-1) = (-1)^3 + 1$$

$$= -1 + 1$$

$$= 0$$

શું ખરેખર ભાગાકાર કરતાં મળતી શેષ પણ 0 છે.

શું બહુપદીનો સુરેખ બહુપદી વડે ભાગાકાર કરીને શેષ મેળવવાની આ રીત સરળ નથી ? હવે આપણે વ્યાપક રીતે નીચેના પ્રમેય સ્વરૂપમાં આ સત્ય જોઇશું. વળી તમને આ પ્રમેયની સાબિતી આપીને દર્શાવીશું કે શા માટે આ પ્રમેય સત્ય છે.

શેષ પ્રમેય : *જો બહુપદી $p(x)$ની ઘાત 1 કે 1 કરતાં વધુ હોય અને તેને સુરેખ બહુપદી $x - a$ વડે ભાગવામાં આવે તો શેષ $p(a)$ મળે. અહીં a વાસ્તવિક સંખ્યા છે.*

સાબિતી : ધારો કે કોઈ બહુપદી $p(x)$ની ઘાત એક કે એક કરતાં વધારે છે. વળી, ધારો કે ભાજ્ય $p(x)$ને ભાજક $(x - a)$ વડે ભાગવામાં આવે, તો ભાગફળ $q(x)$ મળે છે અને શેષ $r(x)$ છે. આથી,

$$p(x) = (x - a)\, q(x) + r(x)$$

ભાજક $x - a$ ની ઘાત 1 છે અને તેથી શેષ $r(x)$ની ઘાત $<$ ભાજક $(x - a)$ ની ઘાત એટલે કે $r(x)$ ની ઘાત 0 છે. એટલે કે $r(x)$ એ શૂન્યેતર અચળ અથવા $r(x) = 0$.

તેથી x ની તમામ કિંમતો માટે $r(x) = r$ (અચળ).

$$\therefore\ p(x) = (x - a)\, q(x) + r.$$

આ નિત્યસમમાં $x = a$ લેતાં,

$$p(a) = (a - a)\, q(a) + r$$
$$= r$$

$\therefore$ શેષ r એ $p(a)$ છે. આથી આ પ્રમેય સિદ્ધ થાય છે.

ચાલો, આ પ્રમેયનો ઉપયોગ આપણે બીજા ઉદાહરણમાં કરીએ.

ઉદાહરણ 9 : જ્યારે $x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ ને $x - 1$ વડે ભાગવામાં આવે ત્યારે મળતી શેષ શોધો.

ઉકેલ : અહીં $p(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ અને $x - 1$ નું શૂન્ય 1 છે.

$$\therefore\ p(1) = (1)^4 + (1)^3 - 2(1)^2 + 1 + 1 = 2$$

તેથી શેષ પ્રમેય પ્રમાણે જ્યારે $x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ ને $x - 1$ વડે ભાગવામાં આવે ત્યારે મળતી શેષ 2 છે.

ઉદાહરણ 10 : બહુપદી $q(t) = 4t^3 + 4t^2 - t - 1$ એ $2t + 1$ ની ગુણિત છે કે નહીં તે ચકાસો.

ઉકેલ : તમે જાણો છો કે જો $q(t)$ ને $2t + 1$ વડે ભાગીએ અને શેષ 0 મળે તો $q(t)$ એ $2t + 1$ ની ગુણિત થાય.

તેથી $2t + 1 = 0$ લેતાં, $t = -\frac{1}{2}$.

$$q\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} - 1 = 0$$

તેથી $q(t)$ ને $2t + 1$ વડે ભાગતાં મળતી શેષ $= 0$. તેથી $2t + 1$ એ બહુપદી $q(t)$ નો એક અવયવ છે. એટલે કે $q(t)$ એ $2t + 1$ નો ગુણિત છે.

સ્વાધ્યાય 2.3

1. બહુપદી $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ નો નીચેના ભાજક વડે ભાગાકાર કરો અને શેષ શોધો.

(i) $x + 1$ (ii) $x-\frac{1}{2}$ (iii) x (iv) $x+\pi$ (v) $5 + 2x$

2. $x^3 - ax^2 + 6x - a$ ને $x - a$ વડે ભાગતાં મળતી શેષ શોધો.

3. $7 + 3x$ એ $3x^3 + 7x$ નો અવયવ છે કે નહિ તે ચકાસો.

2.5 બહુપદીઓનું અવયવીકરણ

ઉદાહરણ 10 પર દૃષ્ટિપાત કરતાં જણાય છે કે શેષ $= q\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$. અહીં $(2t + 1)$ એ $q(t)$ નો એક અવયવ છે. $q(t) = (2t + 1)\ g(t)$. આ પરિણામ નીચેના અવયવ પ્રમેય માટે ઉપયોગી છે.

અવયવ પ્રમેય : *જો બહુપદી $p(x)$ ની ઘાત એક કે એક કરતાં વધુ હોય અને a વાસ્તવિક સંખ્યા હોય તો,*

(i) જો $p(a) = 0$ હોય તો $x - a$ એ $p(x)$ નો એક અવયવ છે અને

(ii) જો $x - a$ એ $p(x)$ નો અવયવ હોય તો $p(a) = 0$.

સાબિતી : શેષ પ્રમેય પરથી, આપણે જાણીએ છીએ કે $p(x)=(x - a)\ q(x) + p(a)$.

(i) જો $p(a) = 0$ તો $p(x) = (x - a)\ q(x)$. આથી $x - a$ એ $p(x)$ નો અવયવ છે.

(ii) વળી $x - a$ એ $p(x)$ નો અવયવ હોય તો કોઇક બહુપદી $g(x)$ માટે $p(x) = (x - a)\ g(x)$

હવે, $p(a) = (a - a)\ g(a) = 0$.

ઉદાહરણ 11 : $x + 2$ એ $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ અને $2x + 4$ નો અવયવ છે કે નહી તે ચકાસો.

ઉકેલ : $x + 2$ નું શૂન્ય -2 છે.

ધારો કે, $p(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ અને $s(x) = 2x + 4$

$$p(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 5(-2) + 6$$
$$= -8 + 12 - 10 + 6$$
$$= 0$$

તેથી અવયવ પ્રમેય પરથી $x + 2$ એ $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ નો અવયવ છે.

વળી, $s(-2) = 2(-2) + 4 = 0$

તેથી $x + 2$ એ $2x + 4$ નો અવયવ છે. હકીકતમાં તમે અવયવ પ્રમેયનો ઉપયોગ કર્યા વગર પણ આ ચકાસી શકો છો, કારણ કે, $2x + 4 = 2(x + 2)$.

ઉદાહરણ 12 : જો $x - 1$ એ $4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ નો અવયવ હોય તો k ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : $x - 1$ એ $p(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ નો અવયવ છે.

$$\therefore\ p(1) = 0$$

હવે $p(1) = 4(1)^3 + 3(1)^2 - 4(1) + k$

$\therefore\ 4 + 3 - 4 + k = 0$

$\therefore\ k = -3$

હવે આપણે અવયવ પ્રમેયના ઉપયોગથી દ્વિઘાત અને ત્રિઘાત બહુપદીઓના અવયવ પાડવાનું શીખીશું.

તમે દ્વિઘાત બહુપદી $x^2 + lx + m$ ના અવયવો કેવી રીતે પાડવા તે જાણો છો. તેમાં મધ્યમ પદ lx ને વિભાજિત કરીને તમે અવયવો મેળવેલ. $ab = m$ બને તે રીતે મધ્યમપદ $lx = ax + bx$ તરીકે વિભાજિત થાય. પછી $x^2 + lx + m = (x + a)(x + b)$. ચાલો આપણે દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$, જ્યાં $a \neq 0$ અને a, b, c અચળ છે, ના અવયવો પાડવાનો પ્રયત્ન કરીએ.

મધ્યમ પદને વિભાજિત કરીને બહુપદી $ax^2 + bx + c$ ના અવયવો મેળવવાની રીત આ પ્રમાણે છે :

ધારો કે તેના અવયવો $(px + q)$ અને $(rx + s)$ છે.

$ax^2 + bx + c = (px + q)(rx + s) = pr\,x^2 + (ps + qr)\,x + qs$

x^2 ના સહગુણકોને સરખાવતાં, $a = pr$.

તે જ પ્રમાણે x ના સહગુણકોને સરખાવતાં $b = ps + qr$ અને અચળ પદોને સરખાવતાં $c = qs$.

આ આપણને બતાવે છે કે b એ ps અને qr નો સરવાળો છે. તેમનો ગુણાકાર $(ps)(qr) = (pr)(qs) = ac$.

તેથી $ax^2 + bx + c$ ના અવયવો પાડવા માટે આપણે b ને જેમનો ગુણાકાર ac થાય એવી બે સંખ્યાના સરવાળા તરીકે લખવું પડે. નીચેના ઉદાહરણ 13 પરથી આ વાત સરળતાથી સમજાશે.

ઉદાહરણ 13 : $6x^2 + 17x + 5$ ના અવયવો મધ્યમ પદને વિભાજિત કરીને અને અવયવ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને મેળવો.

ઉકેલ 1 : (*મધ્યમપદને વિભાજિત કરવાની રીત*) : આપણે એવી બે સંખ્યા p અને q શોધીએ કે જેથી $p + q = 17$ અને $pq = 6 \times 5 = 30$ થાય. હવે આપણે અવયવો મેળવીએ.

ચાલો આપણે 30 ના અવયવોની જોડનો વિચાર કરીએ. તેમાંની કેટલીક 1 અને 30, 2 અને 15, 3 અને 10, 5 અને 6 આ બધી જોડમાંથી 2 અને 15 ની જોડ આપણને $p + q = 17$ આપે છે.

તેથી $6x^2 + 17x + 5 = 6x^2 + (2 + 15)x + 5$

$$= 6x^2 + 2x + 15x + 5$$

$$= 2x(3x + 1) + 5(3x + 1)$$

$$= (3x + 1)(2x + 5)$$

ઉકેલ 2 : અવયવ પ્રમેયની મદદથી $6x^2 + 17x + 5 = 6\left(x^2 + \frac{17}{6}x + \frac{5}{6}\right) = 6\,p(x)$ કહો. જો a અને b, $p(x)$ નાં શૂન્ય હોય તો, $6x^2 + 17x + 5 = 6(x - a)(x - b)$. તેથી, $ab = \frac{5}{6}$. ચાલો a અને b ની કેટલીક સંભવિત કિંમતો જોઈએ.

$\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{5}{2}, \pm 1$. હવે, $p\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{17}{6}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{6}\neq 0$. પરંતુ $p\left(\frac{-1}{3}\right)=\left(\frac{-1}{3}\right)^2+\frac{17}{6}\left(\frac{-1}{3}\right)+\frac{5}{6} = 0$.

તેથી $\left(x+\frac{1}{3}\right)$ એ $p(x)$ નો અવયવ છે.

તે જ પ્રમાણે પ્રયત્નો દ્વારા $\left(x+\frac{5}{2}\right)$ એ $p(x)$ નો અવયવ છે તે નક્કી થઈ શકે.

$$6x^2 + 17x + 5 = 6\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)$$

$$= 6\left(\frac{3x+1}{3}\right)\left(\frac{2x+5}{2}\right)$$

$$= (3x+1)\,(2x+5)$$

ઉપરના ઉદાહરણમાં મધ્યમ પદના ભાગ પાડવાની રીત વધુ સરળ લાગે છે. છતાંયે ચાલો બીજું ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 14 : અવયવ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને $y^2 - 5y + 6$ ના અવયવ પાડો.

ઉકેલ : ધારો કે $p(y) = y^2 - 5y + 6$. હવે જો $p(y) = (y - a)\,(y - b)$, તો સ્પષ્ટ છે કે ab અચળ પદ છે. તેથી $ab = 6$. તેથી $p(y)$ ના અવયવો શોધવા માટે 6 ના અવયવોનો વિચાર કરીએ.

6 ના અવયવો : 1, 2, 3 અને 6

હવે, $p(2) = 2^2 - (5 \times 2) + 6 = 0$

તેથી, $y - 2$ એ $p(y)$ નો અવયવ છે.

આ ઉપરાંત, $p(3) = 3^2 - (5 \times 3) + 6 = 0$

તેથી, $y - 3$ એ પણ $y^2 - 5y + 6$નો અવયવ છે.

તેથી, $y^2 - 5y + 6 = (y - 2)(y - 3)$

આપણે નોંધીએ છીએ કે $y^2 - 5y + 6$ ના મધ્યમ પદ $-5y$ ને વિભાજિત કરીને પણ અવયવો મેળવી શકીએ.

ચાલો, ત્રિઘાત બહુપદીના અવયવો પાડવાનું વિચારીએ. અહીં ભાગ પાડવાની રીતનો ઉપયોગ એ શક્ય નથી. આપણે ઓછામાં ઓછો એક અવયવ નક્કી કરીએ તો જ રીત સરળ બને છે. એ તમે નીચેના ઉદાહરણમાં જોશો.

ઉદાહરણ 15 : અવયવ પાડો : $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$.

ઉકેલ : ધારો કે, $p(x) = x^3 - 23x^2 + 142x - 120$

હવે આપણે -120 ના બધા જ અવયવો વિચારતાં તેમાંનાં કેટલાંક $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm6, \pm8, \pm10, \pm12, \pm15, \pm20, \pm24, \pm30, \pm60$ છે.

આપણે પ્રયત્નો દ્વારા જાણી શકીએ કે $p(1) = 0$. તેથી $x - 1$ એ $p(x)$ નો અવયવ છે.

હવે, $x^3 - 23x^2 + 142x - 120 = x^3 - x^2 - 22x^2 + 22x + 120x - 120$

$= x^2(x - 1) - 22x(x - 1) + 120(x - 1)$ (કેમ ?)

$= (x - 1)(x^2 - 22x + 120)$ [$(x - 1)$ સામાન્ય લેતાં]

આપણે $p(x)$ ને $x - 1$ વડે ભાગીને પણ ઉપરોક્ત જવાબ મેળવી શકીએ.

હવે, $x^2 - 22x + 120$ ના અવયવો મધ્યમ પદને વિભાજીત કરીને અથવા અવયવ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને મેળવી શકીએ. મધ્યમ પદને વિભાજીત કરતાં,

$$x^2 - 22x + 120 = x^2 - 12x - 10x + 120$$

$$= x(x - 12) - 10(x - 12)$$

$$= (x - 12)(x - 10)$$

તેથી, $x^3 - 23x^2 - 142x - 120 = (x - 1)(x - 10)(x - 12)$

સ્વાધ્યાય 2.4

1. નીચે આપેલ બહુપદીમાંથી કઈ બહુપદીનો અવયવ $(x + 1)$ છે તે નક્કી કરો :

(i) $x^3 + x^2 + x + 1$ (ii) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

(iii) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$ (iv) $x^3 - x^2 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$

2. આપેલ બહુપદી $g(x)$ એ આપેલ બહુપદી $p(x)$ નો એક અવયવ છે કે નહિ તે અવયવ પ્રમેય પરથી નક્કી કરો.

(i) $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1,\ g(x) = x + 1$

(ii) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1,\ g(x) = x + 2$

(iii) $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6,\ g(x) = x - 3$

3. નીચેના દરેકમાં જો $x - 1$ એ $p(x)$ નો એક અવયવ હોય તો k ની કિંમત શોધો.

(i) $p(x) = x^2 + x + k$ (ii) $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$

(iii) $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$ (iv) $p(x) = kx^2 - 3x + k$

4. અવયવ પાડો :

(i) $12x^2 - 7x + 1$ (ii) $2x^2 + 7x + 3$

(iii) $6x^2 + 5x - 6$ (iv) $3x^2 - x - 4$

5. અવયવ પાડો :

(i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$ (ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

(iii) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$ (iv) $2y^3 + y^2 - 2y - 1$

2.6 બૈજિક નિત્યસમો

અગાઉના વર્ગોના અભ્યાસ પરથી તમને યાદ હશે કે **બૈજિક નિત્યસમો** એ આપેલ ચલની તમામ કિંમતો માટે સત્ય બૈજિક સમીકરણો જ છે. નીચેના તમામ નિત્યસમો તમે અગાઉના વર્ગોમાં શીખ્યા છે.

નિત્યસમ I : $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

નિત્યસમ II : $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

નિત્યસમ III : $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

નિત્યસમ IV : $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

બૈજિક પદાવલીઓના અવયવો પાડવા માટે તમે કેટલાક બૈજિક નિત્યસમોનો ઉપયોગ કરેલ છે. તમે ગણતરીઓ કરવામાં તેનો ઉપયોગ જોઇ શકો છો.

ઉદાહરણ 16 : યોગ્ય નિત્યસમનો યોગ્ય ઉપયોગ કરીને નીચેના ગુણાકાર મેળવો.

(i) $(x + 3)(x + 3)$ (ii) $(x - 3)(x + 5)$

ઉકેલ : (i) અહીં નિત્યસમ I નો ઉપયોગ કરતાં : $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$y = 3$ મૂકતાં, $(x + 3)(x + 3) = (x + 3)^2 = x^2 + 2(x)(3) + (3)^2$

$= x^2 + 6x + 9$

(ii) ઉપરના નિત્યસમ IV નો ઉપયોગ કરતાં, એટલે કે : $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$.

$(x - 3)(x + 5) = x^2 + (-3 + 5)x + (-3)(5)$

$= x^2 + 2x - 15$

ઉદાહરણ 17 : સીધો ગુણાકાર કર્યા સિવાય 105×106 ની કિંમત મેળવો.

ઉકેલ : $105 \times 106 = (100 + 5) \times (100 + 6)$

$= (100)^2 + (5 + 6)(100) + (5 \times 6)$, (નિત્યસમ IV નો ઉપયોગ કરતાં)

$= 10000 + 1100 + 30$

$= 11130$

ઉપરોક્ત દર્શાવેલ નિત્યસમોનો ઉપયોગ તમે પદાવલીઓનો ગુણાકાર કરવામાં કરેલ છે. આ નિત્યસમો બૈજિક પદાવલીઓના અવયવો પાડવામાં પણ ઉપયોગી છે. તમે હવે પછીનાં ઉદાહરણોમાં આ હકીકત જોઇ શકશો.

ઉદાહરણ 18 : અવયવ પાડો.

(i) $49a^2 + 70ab + 25b^2$ (ii) $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9}$

ઉકેલ : (i) અહીં $49a^2 = (7a)^2$, $25b^2 = (5b)^2$, $70ab = 2(7a)(5b)$

આપેલી પદાવલીને $x^2 + 2xy + y^2$, સાથે સરખાવતાં $x = 7a$ અને $y = 5b$.

નિત્યસમ I નો ઉપયોગ કરતાં,

$$49a^2 + 70ab + 25b^2 = (7a + 5b)^2 = (7a + 5b)(7a + 5b)$$

(ii) $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2$

હવે નિત્યસમ III સાથે સરખાવતાં,

$$\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}x + \frac{y}{3}\right)\left(\frac{5}{2}x - \frac{y}{3}\right)$$

અત્યાર સુધી આપણે તમામ ચાર નિત્યસમોનો ઉપયોગ દ્વિઘાત બહુપદીઓના ગુણાકાર કરવામાં કરેલ છે. ચાલો, આપણે નિત્યસમ I ને ત્રિપદી $x + y + z$ સુધી વિસ્તારીએ. આપણે $(x + y + z)^2$ નું વિસ્તરણ નિત્યસમ I નો ઉપયોગ કરીને મેળવીએ.

$x + y = t$ ધારતાં,

$$\begin{aligned}(x + y + z)^2 &= (t + z)^2\\ &= t^2 + 2tz + t^2 && \text{(નિત્યસમ I નો ઉપયોગ કરતાં)}\\ &= (x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2 && \text{(t ની કિંમત મૂકતાં)}\\ &= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2 && \text{(નિત્યસમ I નો ઉપયોગ કરતાં)}\\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx && \text{(પદોની પુનઃગોઠવણી કરતાં)}\end{aligned}$$

તેથી આપણને નીચેનું નિત્યસમ મળશે.

નિત્યસમ V : $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

નોંધ : જમણી બાજુની બહુપદી એ ડાબી બાજુની બહુપદીનું વિસ્તરણ છે. યાદ રાખો કે $(x + y + z)^2$ એ ત્રણ વર્ગવાળા પદ અને ત્રણ ગુણાકારના પદ ધરાવે છે.

ઉદાહરણ 19 : $(3a + 4b + 5c)^2$ નું વિસ્તરણ કરો.

ઉકેલ : આપેલ પદાવલિ $(x + y + z)^2$ સાથે સરખાતાં,

$x = 3a$, $y = 4b$ અને $z = 5c$.

નિત્યસમ V નો ઉપયોગ કરતાં,

$$\begin{aligned}(3a + 4b + 5c)^2 &= (3a)^2 + (4b)^2 + (5c)^2 + 2(3a)(4b) + 2(4b)(5c) + 2(5c)(3a)\\ &= 9a^2 + 16b^2 + 25c^2 + 24ab + 40bc + 30ac\end{aligned}$$

ઉદાહરણ 20 : $(4a - 2b - 3c)^2$ નું વિસ્તરણ કરો.

ઉકેલ : નિત્યસમ V નો ઉપયોગ કરતાં,

$$(4a - 2b - 3c)^2 = [4a + (-2b) + (-3c)]^2$$
$$= (4a)^2 + (-2b)^2 + (-3c)^2 + 2(4a)(-2b) + 2(-2b)(-3c) + 2(-3c)(4a)$$
$$= 16a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 16ab + 12bc - 24ac$$

ઉદાહરણ 21 : અવયવ પાડો : $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$.

ઉકેલ : $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz = (2x)^2 + (-y)^2 + (z)^2 + 2(2x)(-y) + 2(-y)(z) + 2(2x)(z)$

$= [2x + (-y) + z]^2$ (નિત્યસમ V નો ઉપયોગ કરતાં,)

$= (2x - y + z)^2 = (2x - y + z)(2x - y + z)$

અત્યાર સુધી આપણે બે ઘાતવાળા નિત્યસમો જોયા છે. ચાલો આપણે $(x + y)^3$ નો ઉકેલ મેળવવા માટે નિત્યસમ I નો ઉપયોગ કરીએ.

$$(x + y)^3 = (x + y)(x + y)^2$$
$$= (x + y)(x^2 + 2xy + y^2)$$
$$= x(x^2 + 2xy + y^2) + y(x^2 + 2xy + y^2)$$
$$= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3$$
$$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$= x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$$

આમ આપણને નીચેનું નિત્યસમ મળશે :

નિત્યસમ VI : $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

નિત્યસમ VI માં y ના બદલે $-y$ મૂકતાં,

નિત્યસમ VII : $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$

$= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

ઉદાહરણ 22 : નીચે આપેલા ઘનને વિસ્તૃત સ્વરૂપમાં લખો.

(i) $(3a + 4b)^3$ (ii) $(5p - 3q)^3$

ઉકેલ : (i) આપેલ પદાવલીને $(x + y)^3$ સાથે સરખાવતાં,

$x = 3a$ અને $y = 4b$.

તેથી નિત્યસમ VI નો ઉપયોગ કરતાં,

$$(3a + 4b)^3 = (3a)^3 + (4b)^3 + 3(3a)(4b)(3a + 4b)$$
$$= 27a^3 + 64b^3 + 108a^2b + 144ab^2$$

(ii) આપેલી પદાવલીને $(x-y)^3$ સાથે સરખાવતાં,

$$x = 5p, \quad y = 3q.$$

તેથી નિત્યસમ VII નો ઉપયોગ કરતાં,

$$(5p-3q)^3 = (5p)^3 - (3q)^3 - 3(5p)(3q)(5p-3q)$$

$$= 125p^3 - 27q^3 - 225p^2q + 135pq^2$$

ઉદાહરણ 23 : યોગ્ય નિત્યસમનો ઉપયોગ કરીને કિંમત શોધો.

(i) $(104)^3$ (ii) $(999)^3$

ઉકેલ : (i) $(104)^3 = (100 + 4)^3$

$= (100)^3 + (4)^3 + 3(100)(4)(100+4)$ (નિત્યસમ VI નો ઉપયોગ કરતાં)

$= 1000000 + 64 + 124800$

$= 1124864$

(ii) $(999)^3 = (1000-1)^3$

$= (1000)^3 - (1)^3 - 3(1000)(1)(1000-1)$ (નિત્યસમ VII નો ઉપયોગ કરતાં)

$= 1000000000 - 1 - 2997000$

$= 997002999$

ઉદાહરણ 24 : અવયવ પાડો : $8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$

ઉકેલ : આ પદાવલીને નીચે પ્રમાણે પણ લખી શકાય.

$$(2x)^3 + (3y)^3 + 3(4x^2)(3y) + 3(2x)(9y^2)$$

$$= (2x)^3 + (3y)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2$$

$= (2x+3y)^3$ (નિત્યસમ VI નો ઉપયોગ કરતાં)

$$= (2x+3y)(2x+3y)(2x+3y)$$

હવે, $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ નો વિચાર કરો.

વિસ્તરણ કરતાં,

$$x(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) + y(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) + z(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

$$= x^3 + xy^2 + xz^2 - x^2y - xyz - zx^2 + x^2y + y^3 + yz^2 - xy^2 - y^2z - xyz + x^2z + y^2z + z^3 - xyz - yz^2 - xz^2$$

$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ (સાદુંરૂપ આપતાં)

તેથી, આપણને નીચેનું નિત્યસમ મળશે.

નિત્યસમ VIII : $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

ઉદાહરણ 25 : અવયવ પાડો : $8x^3 + y^3 + 27z^3 - 18xyz$

ઉકેલ : $8x^3 + y^3 + 27z^3 - 18xyz = (2x)^3 + y^3 + (3z)^3 - 3(2x)(y)(3z)$

$$= (2x + y + 3z)[(2x)^2 + y^2 + (3z)^2 - (2x)(y) - (y)(3z) - (2x)(3z)]$$

$$= (2x + y + 3z)\ (4x^2 + y^2 + 9z^2 - 2xy - 3yz - 6xz)$$

સ્વાધ્યાય : 2.5

1. યોગ્ય નિત્યસમનો ઉપયોગ કરીને નીચેના ગુણાકાર મેળવો :

(i) $(x + 4)\ (x + 10)$ (ii) $(x + 8)\ (x - 10)$ (iii) $(3x + 4)\ (3x - 5)$

(iv) $\left(y^2 + \frac{3}{2}\right)\left(y^2 - \frac{3}{2}\right)$ (v) $(3 - 2x)\ (3 + 2x)$

2. સીધો ગુણાકાર કર્યા સિવાય નિત્યસમોનો ઉપયોગ કરીને નીચેના ગુણાકારની કિંમતો મેળવો :

(i) 103×107 (ii) 95×96 (iii) 104×96

3. યોગ્ય નિત્યસમનો ઉપયોગ કરી અવયવ પાડો :

(i) $9x^2 + 6xy + y^2$ (ii) $4y^2 - 4y + 1$ (iii) $x^2 - \frac{y^2}{100}$

4. યોગ્ય નિત્યસમનો ઉપયોગ કરીને વિસ્તરણ કરો :

(i) $(x + 2y + 4z)^2$ (ii) $(2x - y + z)^2$ (iii) $(-2x + 3y + 2z)^2$

(iv) $(3a - 7b - c)^2$ (v) $(-2x + 5y - 3z)^2$ (vi) $\left[\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + 1\right]^2$

5. અવયવ પાડો :

(i) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

(ii) $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}\ xy + 4\sqrt{2}\ yz - 8xz$

6. નીચેના ઘનનું વિસ્તરણ કરો :

(i) $(2x + 1)^3$ (ii) $(2a - 3b)^3$ (iii) $\left[\frac{3}{2}x + 1\right]^3$ (iv) $\left[x - \frac{2}{3}y\right]^3$

7. યોગ્ય નિત્યસમનો ઉપયોગ કરીને કિંમત મેળવો :

(i) $(99)^3$ (ii) $(102)^3$ (iii) $(998)^3$

8. નીચેના પૈકી પ્રત્યેકના અવયવ પાડો :

(i) $8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$ (ii) $8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$

(iii) $27 - 125a^3 - 135a + 225a^2$ (iv) $64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2$

(v) $27p^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p$

9. ચકાસો : (i) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ (ii) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

10. નીચેના પૈકી દરેકના અવયવ પાડો :

(i) $27y^3 + 125z^3$ (ii) $64m^3 - 343n^3$

[**સૂચન** : પ્રશ્ન 9 જુઓ]

11. અવયવ પાડો : $27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$

12. ચકાસો $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$

13. જો $x + y + z = 0$ તો સાબિત કરો કે $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

14. ઘનનું મૂલ્ય મેળવ્યા સિવાય નીચેના દરેકની કિંમતો મેળવો :

(i) $(-12)^3 + (7)^3 + (5)^3$

(ii) $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

15. નીચે લંબચોરસનાં ક્ષેત્રફળ દર્શાવેલ છે તેમની સંભવિત લંબાઇ અને પહોળાઇ શોધો :

(i)	(ii)
ક્ષેત્રફળ : $25a^2 - 35a + 12$	ક્ષેત્રફળ : $35y^2 + 13y - 12$

16. નીચે લંબઘનનાં ઘનફળ દર્શાવેલ છે. તેમનાં શક્ય પરિમાણ શોધો :

(i)	(ii)
ઘનફળ : $3x^2 - 12x$	ઘનફળ : $12ky^2 + 8ky - 20k$

2.7 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓ શીખ્યા :

1. એક ચલ x વાળી બૈજિક અભિવ્યક્તિને *બહુપદી* $p(x)$ સ્વરૂપમાં નીચે પ્રમાણે લખી શકાય

$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$

જ્યાં $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ અચળ છે અને $a_n \neq 0$.

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ એ અનુક્રમે $x^0, x, x^2, \ldots, x^n$ ના *સહગુણકો* છે અને બહુપદીની ઘાત n છે. $a_n \neq 0$ અને $a_nx^n, a_{n-1}x^{n-1}, \ldots, a_0$ ને બહુપદી $p(x)$નાં *પદો* કહે છે.

2. એક પદવાળી બહુપદીને એકપદી કહે છે.

3. બે પદવાળી બહુપદીને દ્વિપદી કહે છે.

4. ત્રણ પદવાળી બહુપદીને ત્રિપદી કહે છે.

5. જે બહુપદીની ઘાત 1 હોય તેને સુરેખ બહુપદી કહે છે.

6. જે બહુપદીની ઘાત 2 હોય તેને દ્વિઘાત બહુપદી કહે છે.

7. જે બહુપદીની ઘાત 3 હોય તેને ત્રિઘાત બહુપદી કહે છે.

8. જો $p(a) = 0$ હોય તો વાસ્તવિક સંખ્યા 'a' ને બહુપદીનું *શૂન્ય* કહે છે. વળી, 'a' ને સમીકરણ $p(x)=0$ નું બીજ પણ કહે છે.

9. દરેક એક ચલવાળી સુરેખ બહુપદીને અનન્ય શૂન્ય હોય છે. શૂન્ય સિવાયની અચળ બહુપદીને શૂન્ય હોતું નથી અને દરેક વાસ્તવિક સંખ્યા એ શૂન્ય બહુપદીનું શૂન્ય હોય છે.

10. **શેષ પ્રમેય :** જો બહુપદી $p(x)$ ની ઘાત 1 કે 1 કરતાં વધુ હોય અને તેને સુરેખ બહુપદી $x - a$ વડે ભાગવામાં આવે તો શેષ $p(a)$ આવે.

11. **અવયવ પ્રમેય :** જો $p(a) = 0$ હોય તો $x - a$ એ $p(x)$ નો અવયવ છે અને જો $x - a$ એ $p(x)$ નો અવયવ હોય તો $p(a) = 0$.

12. $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

13. $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

14. $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$

15. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)\,(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

પ્રકરણ 3

યામ ભૂમિતિ

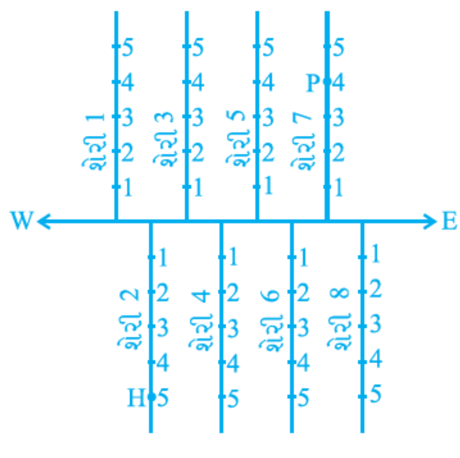
What's the good of Mercator's North Poles and Equators, Tropics, Zones and Meridian Lines ?' So the Bellman would cry; and crew would reply ' They are merely conventional signs!'

LEWIS CARROLL, *The Hunting of the Snark*

3.1 પ્રાસ્તાવિક

અગાઉ તમે સંખ્યારેખા પર બિંદુનું નિરૂપણ કરવાનું શીખી ગયાં છો. તમે એ પણ જાણો છો કે બિંદુને રેખા પર કેવી રીતે દર્શાવવું. વાસ્તવમાં મોટા ભાગની પરિસ્થિતિઓમાં, બિંદુનું ચોક્કસ સ્થાન દર્શાવવા એક કરતાં વધારે રેખાઓના સંદર્ભની જરૂર પડે છે. દાખલા તરીકે નીચે દર્શાવેલ પરિસ્થિતિનો વિચાર કરો :

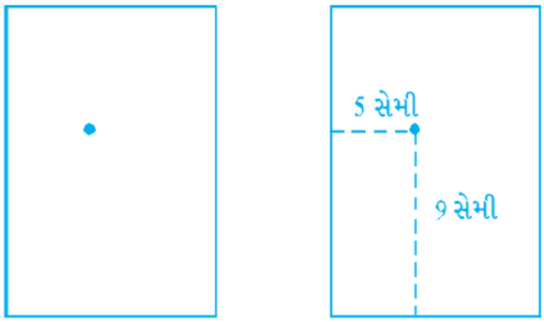
I. આકૃતિ 3.1 માં, રહેણાંક વિસ્તારમાં મુખ્ય રસ્તાઓ પૂર્વથી પશ્ચિમ દિશા તરફ અને શેરીનું નામાભિધાન પશ્ચિમથી પૂર્વ તરફ કરેલું છે. વળી, દરેક શેરી પર ઘરના નંબર દર્શાવેલ છે. અહીં આ પરિસ્થિતિમાં આપણા મિત્રનું ઘર શોધવા તે અંગે એક સંદર્ભ જાણતા હોઈએ તે પર્યાપ્ત છે ? તે માટે જો આપણે જાણીએ કે તે શેરી 2 માં રહે છે, તો આપણે તેનું ઘર સરળતાથી શોધી લઈશું ? ના. જે શેરીમાં મિત્રનું ઘર આવેલું છે તે શેરીનો નંબર અને તેના ઘરનો નંબર બંને જાણતા હોઈએ તો આવી માહિતી પરથી જેટલી સરળતા રહે તેટલી સરળતાથી નહિ. જો આપણે બીજી શેરીમાં અને ઘર નંબર 5 માં પહોંચવું હોય, તો સૌપ્રથમ બીજી શેરી ઓળખવી પડે અને ત્યાં પહોંચીને એ શેરીમાં 5 નંબરનું ઘર શોધી શકાય. આકૃતિ 3.1 માં



આકૃતિ 3.1

આ ચોક્કસ સ્થાન H દ્વારા દર્શાવવામાં આવ્યું છે. આ જ પ્રમાણે શેરી 7 માં 4 નંબરનું ઘર P દ્વારા દર્શાવેલ છે.

II. ધારો કે તમે કાગળના ટુકડા પર એક ટપકું કરો છો. [આકૃતિ.3.2(a)]. જો અમે તમને પૂછીએ કે 'કહો કાગળ પર ટપકાનું સ્થાન ક્યાં છે?' તમે કેવી રીતે જણાવશો ? કદાચ તમે તમારી રીતે કેટલાક પ્રયત્ન કરશો કે 'ટપકું કાગળના ઉપરના અર્ધતલના ભાગમાં છે' અથવા 'તે કાગળ પર ડાબી ધારની નજીક છે અથવા તે કાગળના ડાબી બાજુના ઉપરના ખૂણાની ઘણી નજીક છે.' શું આ મંતવ્યો પરથી ટપકાનું ચોક્કસ સ્થાન નક્કી કરાય ? ના ! પણ તમે એવું કહો કે ''ટપકું કાગળની ડાબી ધારથી 5 સેમી દૂર છે.'' તો તે આપણને વિચારવામાં મદદ કરશે. પણ ટપકાનું સ્થાન ચોક્કસ નક્કી કરાતું નથી. એક વધુ માર્ગદર્શન આપવામાં આવે, કે ટપકાનું સ્થાન તળિયેથી 9 સેમી ઉપર છે તો હવે તે ટપકું ખરેખર ક્યાં છે તે જાણી શકાય.



(a) (b)

આકૃતિ 3.2

આપણે ટપકાનું સ્થાન બે રેખા એટલે કે ડાબી ધાર અને તળિયાની ધારથી કેટલું અંતર છે તે પરથી નિશ્ચિત કરીએ છીએ [આકૃતિ.3.2(b)]. બીજા શબ્દોમાં, આપણા માટે બે સ્વતંત્ર માહિતી ટપકાનું સ્થાન નક્કી કરવા માટે જરૂરી છે.

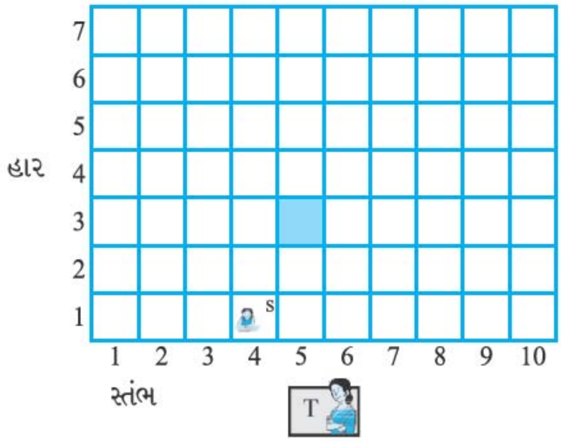
હવે, આપણે નીચે પ્રમાણે વર્ગખંડમાં 'બેઠક-વ્યવસ્થા'ની પ્રવૃત્તિ જાણીએ :

પ્રવૃત્તિ 1 (બેઠક-વ્યવસ્થા) : બધી પાટલીઓ સાથે રાખીને, તમારા વર્ગખંડની બધી પાટલીઓની બેઠક વ્યવસ્થાનું ચિત્ર તૈયાર કરીએ. દરેક પાટલીને ચોરસ તરીકે દર્શાવીએ. દરેક ચોરસમાં, જે પાટલી પર વિદ્યાર્થી બેસે છે તે દરેક પાટલી ઉપર વિદ્યાર્થીનું નામ લખીએ. દરેક વિદ્યાર્થીનું સ્થાન વર્ગખંડમાં બે સ્વતંત્ર માહિતીથી ચોક્કસ દર્શાવી શકાય.

(i) સ્તંભમાં તે ક્યાં બેસે છે.

(ii) હારમાં તે ક્યાં બેસે છે.

જો તમે પાંચમો સ્તંભ અને ત્રીજી હારમાં બેસો છો (આકૃતિ 3.3 માં રંગીન ચોરસ દર્શાવેલ છે.) તો તમારું સ્થાન (5,3) લખી શકાય. પ્રથમ સ્તંભ નંબર અને પછી હાર નંબર છે. શું આ સ્થાન (3, 5) ને સમાન છે ? તમારા વર્ગમાં બીજા વિદ્યાર્થીઓનાં નામો અને સ્થાનો દર્શાવો. ઉદાહરણ માટે જો સોનિયા ચોથા સ્તંભમાં અને પ્રથમ હારમાં બેઠી છે, તો તેનું સ્થાન S(4, 1) લખો. શિક્ષકનું ટેબલ તમારી બેઠક-વ્યવસ્થાનો ભાગ નથી. આપણે શિક્ષકને માત્ર કોઈ નિરીક્ષકના રૂપમાં લઈએ છીએ.

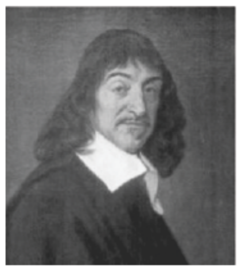


T શિક્ષકનું ટેબલ દર્શાવે છે
S સોનિયાની પાટલી દર્શાવે છે

આકૃતિ 3.3

ઉપરની ચર્ચા પરથી એવું અવલોકન કરી શકાય કે તમે કોઈ પણ પદાર્થનું સ્થાન બે લંબરેખાઓની મદદથી દર્શાવી શકો. 'ટપકા'ના સ્થાનમાં આપણને ટપકા માટે તળિયાની ધારથી અંતર તેમજ ડાબી ધારથી અંતર જરૂરી છે. બેઠક-વ્યવસ્થાની ગોઠવણીમાં, આપણને સ્તંભનો ક્રમાંક અને તે હારનો ક્રમાંક જરૂરી છે. આ સરળ વિચાર જ ગણિતશાસ્ત્રની ખૂબ જ પ્રતિષ્ઠિત મહત્ત્વની શાખા *'યામ ભૂમિતિ'*ના ઉદ્‌ભવનું પ્રથમ પગલું બન્યો. આપણું ધ્યેય આ પ્રકરણમાં યામ ભૂમિતિની કેટલીક પાયાની સંકલ્પનાઓ આપવાનો છે. આ વિશે તમે તમારાં ઉચ્ચ ધોરણોમાં આનાથી વધારે અભ્યાસ કરશો. આ અભ્યાસના વિકાસની શરૂઆત ફ્રેન્ચ તત્ત્વજ્ઞાની અને ગણિતજ્ઞ René Déscartes એ કરી હતી.

René Déscartes, the great French mathematician of the seventeenth century, liked to lie in bed and think! One day, when resting in bed, he solved the problem of describing the position of a point in a plane. His method was a development of the older idea of latitude and longitude. In honour of Déscartes, the system used for describing the position of a point in a plane is also known as the *Cartesian system.*



René Déscartes (1596 -1650)

આકૃતિ 3.4

સ્વાધ્યાય 3.1

1. બીજી કોઈ વ્યક્તિને તમારા અભ્યાસના ટેબલ પરના ટેબલ લૅમ્પનું સ્થાન કેવી રીતે વર્ણવશો ?
2. (શેરીનો નકશો) એક શહેરના બે મુખ્ય રસ્તાઓ શહેરના કેન્દ્ર આગળ એકબીજાને છેદે છે. આ બે રસ્તાઓ ઉત્તર-દક્ષિણ દિશાઓ અને પૂર્વ-પશ્ચિમ દિશાઓમાં છે. શહેરની બાકીની બધી શેરીઓ આ રસ્તાની સમાંતરે છે અને પરસ્પર 200 મીટર દૂર છે. દરેક દિશામાં 5 શેરીઓ છે. 1 સેમી = 200 મીટર માપ લઈ. તમારી નોટબુકમાં શહેરનું આદર્શ ચિત્ર દોરો. રસ્તાઓ/શેરીઓને સીધી રેખાઓ દ્વારા દર્શાવો.

તમારા નમૂનામાં શહેરમાં ઘણીબધી છેદતી શેરીઓ છે આ છેદતી શેરીઓ એક ઉત્તર-દક્ષિણ દિશામાં અને બીજી પૂર્વ-પશ્ચિમ દિશામાં જતી હોય તેવી બે શેરીઓની બનેલી છે. દરેક લંબ શેરી નીચેના અનુસંધાનમાં દર્શાવાય છે. જો બીજી શેરી ઉત્તર-દક્ષિણ દિશામાં અને પાંચમી શેરી પૂર્વ-પશ્ચિમ દિશામાં ક્યાંક મળતી હોય, તો આપણે તેને છેદતી શેરી (2, 5) કહીશું. આ રૂઢિનો ઉપયોગ કરી નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

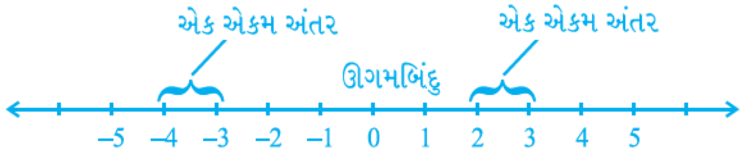
(i) કેટલી છેદતી શેરીઓનું નામાભિધાન (4, 3) તરીકે થઈ શકે ?

(ii) કેટલી છેદતી શેરીઓનું નામાભિધાન (3, 4) તરીકે થઈ શકે ?

3.2 કાર્તેઝિય પદ્ધતિ

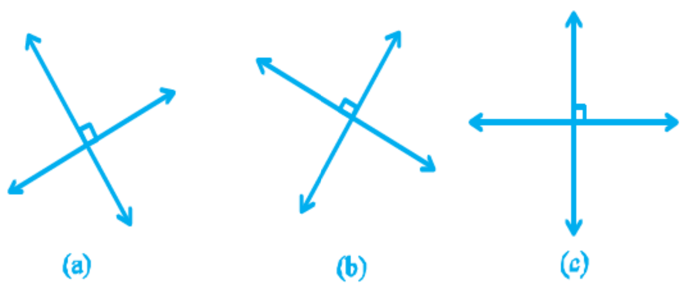
સંખ્યારેખાનો અભ્યાસ તમે 'સંખ્યા પદ્ધતિ'ના પ્રકરણમાં કરી ગયાં છો.

રેખા પર એક નિશ્ચિત બિંદુથી એકમ લંબાઈના ધન અંતર એક દિશામાં અને ઋણ અંતર બીજી દિશામાં દર્શાવ્યા છે. જે બિંદુથી અંતરો દર્શાવેલ છે તેને ઊગમબિંદુ કહે છે. એક રેખા પર સમાન અંતરે બિંદુઓ દર્શાવી સંખ્યા દ્વારા સંખ્યારેખા દર્શાવી છે. એકમ અંતરે સંખ્યા 1 દર્શાવાય, જ્યારે 3 એકમ અંતરે સંખ્યા '3' દર્શાવાય છે. '0' એ ઊગમબિંદુ દર્શાવે છે. ધન દિશામાં ઊગમબિંદુથી r અંતરે આવેલ બિંદુ સંખ્યા r દર્શાવે છે. ઋણ દિશામાં ઊગમબિંદુથી r અંતરે આવેલું બિંદુ સંખ્યા $-r$ દર્શાવે છે. સંખ્યારેખા પર ભિન્ન સંખ્યાઓનું સ્થાન આકૃતિ 3.5 માં દર્શાવ્યું છે.



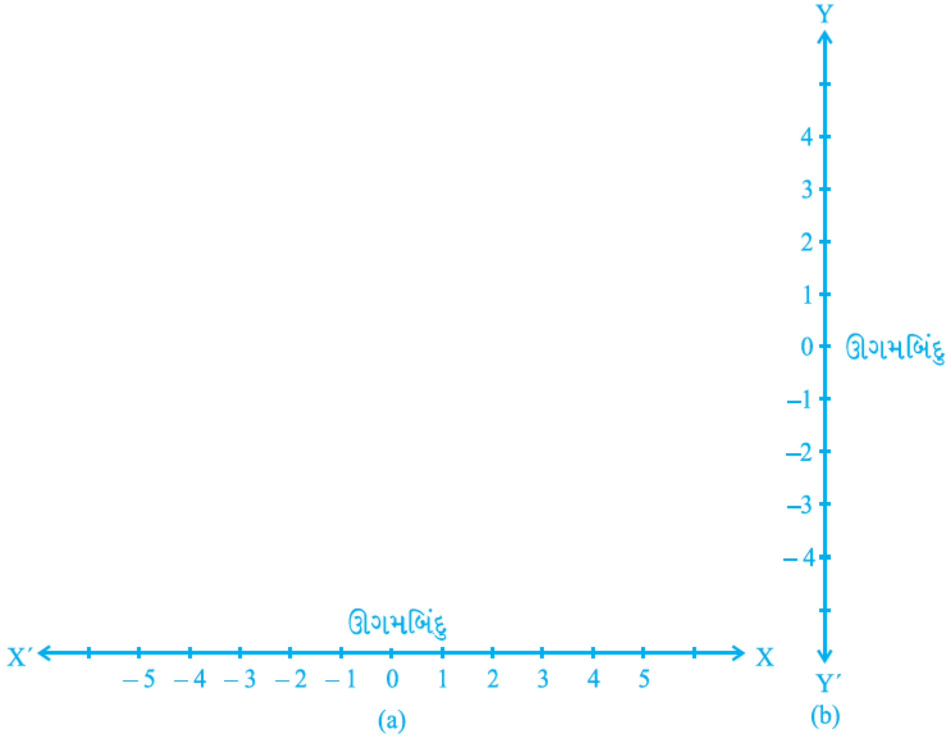
આકૃતિ 3.5

René Déscartesએ સમતલમાં બે રેખાઓને એકબીજીને લંબ દર્શાવવાનો વિચાર કર્યો અને સમતલમાં બિંદુનું સ્થાન નક્કી કરવા માટે આ રેખાઓનો સંદર્ભ લીધો. આકૃતિ 3.6માં દર્શાવ્યા મુજબ લંબરેખાઓ કોઈ પણ દિશામાં હોઈ શકે છે.



આકૃતિ 3.6

પણ જ્યારે આપણે આ પ્રકરણમાં બે રેખાઓથી બિંદુનું સ્થાન સમતલમાં નક્કી કરીએ ત્યારે એક સમક્ષિતિજ અને બીજી શિરોલંબ રેખા લઈશું. તે આકૃતિ 3.6(c) માં છે.

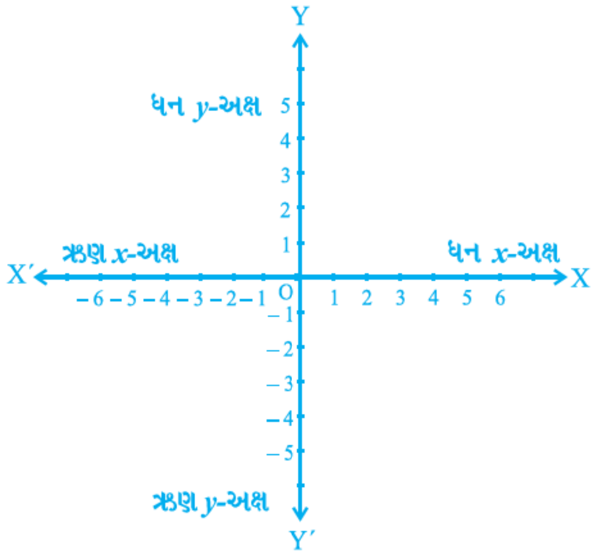


(a) (b)

આકૃતિ 3.7

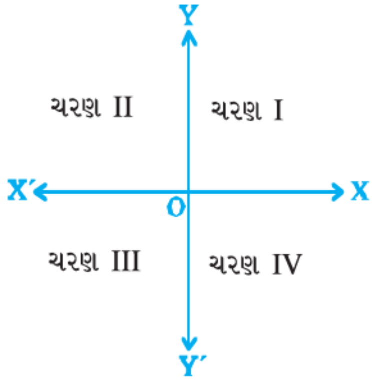
વાસ્તવિક રીતે આ બે રેખાઓ આ પ્રમાણે મેળવવામાં આવે છે. બે સંખ્યારેખાઓ X'X અને Y'Y પસંદ કરો. X'X ને સમક્ષિતિજ [આકૃતિ.3.7(a)] લઈ તેની ઉપર સંખ્યારેખાની જેમ સંખ્યાઓ લખો. આપણે તે જ રીતે સંખ્યારેખા Y'Y માટે કરો. ફેર એટલો છે કે Y'Y શિરોલંબ થશે, નહિ કે સમક્ષિતિજ. [આકૃતિ.3.7(b)]

બંને રેખાઓ એકબીજીને તેમનાં શૂન્યોમાં છેદે અથવા ઊગમબિંદુએ છેદે તે રીતે ગોઠવો. [આકૃતિ.3.8] સમક્ષિતિજ રેખા X'X ને x-અક્ષ અને શિરોલંબ રેખા Y'Y ને y-અક્ષ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. X'X અને Y'Y જે બિંદુએ લંબ છે તે બિંદુને ઊગમબિંદુ કહેવામાં આવે છે અને તેને O વડે દર્શાવાય છે. ધન સંખ્યાઓ OX અને OY પર હોય છે અને તેથી OX અને OY ને અનુક્રમે x-અક્ષ અને y-અક્ષની ધન દિશાઓ કહે છે. તે જ રીતે OX' અને OY' ને અનુક્રમે x-અક્ષ અને y-અક્ષની ઋણ દિશાઓ કહે છે.



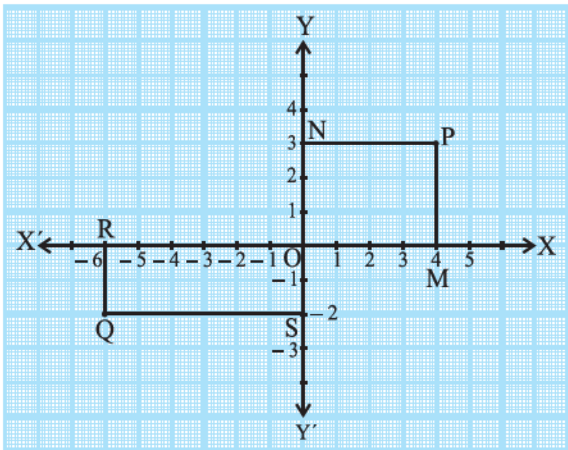
આકૃતિ.3.8

તમે કહી શકો છો કે, અક્ષો (એકવચનમાં શબ્દ 'અક્ષ') સમતલને ચાર ભાગમાં વહેંચે છે. આ ચાર ભાગને ચરણ કે પાદ કહેવામાં આવે છે (એક ચતુર્થાંશ ભાગ). OX થી વિષમઘડી દિશામાં તેમને ક્રમાંક I, II, III અને IV વડે દર્શાવાય છે(જુઓ આકૃતિ 3.9.) તેથી સમતલ, યામાક્ષો અને ચાર ચરણનો યોગગણ છે. આપણે સમતલને કાર્તેઝિય સમતલ અથવા યામ સમતલ અથવા xy-સમતલ કહીશું. અક્ષોને યામાક્ષો તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.



આકૃતિ 3.9

હવે, આપણે જોઈએ કે શા માટે આ પદ્ધતિ ગણિત માટે પાયાની છે અને તે કેવી રીતે ઉપયોગી છે. વિચારો કે નીચેના આલેખપત્રમાં અક્ષો દર્શાવ્યા છે. P અને Q અક્ષોથી કેટલા અંતરે છે તે તપાસીએ. આ માટે x-અક્ષ પર લંબરેખાખંડ PM અને y-અક્ષ પર લંબરેખાખંડ PN દોરો. તેવી જ રીતે આપણે લંબરેખાખંડ $\overline{QR}$ અને $\overline{QS}$ આકૃતિ 3.10 માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 3.10

તમે જોઈ શકશો કે,

(i) P બિંદુનું x-અક્ષની ધન દિશામાં y-અક્ષથી લંબઅંતર PN = OM = 4 એકમ છે.

(ii) P બિંદુનું y-અક્ષની ધન દિશામાં x-અક્ષથી લંબઅંતર PM = ON = 3 એકમ છે.

(iii) Q બિંદુનું x-અક્ષની ઋણ દિશામાં y-અક્ષથી લંબઅંતર OR = SQ = 6 એકમ છે.

(iv) Q બિંદુનું y-અક્ષની ઋણ દિશામાં x-અક્ષથી લંબઅંતર OS = RQ = 2 એકમ છે.

હવે, આ અંતરનો ઉપયોગ કરીને બિંદુઓ કેવી રીતે દર્શાવવા કે જેથી કોઈ મુશ્કેલી ના રહે ?

હવે આપણે નીચેની રીતનો ઉપયોગ કરીને બિંદુના યામ લખીશું :

(i) કોઈપણ બિંદુનો x-યામ એ તેનું y-અક્ષથી x-અક્ષની દિશામાં માપેલ લંબઅંતર છે.(જો અંતર x-અક્ષની ધન દિશામાં હોય તો તેનો x-યામ ધન છે અને જો અંતર x-અક્ષની ઋણ દિશામાં માપવામાં આવે, તો તેનો x-યામ ઋણ હોય છે). આમ, P નો x-યામ 4 છે અને Q નો x-યામ – 6 છે. x-યામને કોટિ પણ કહે છે.

(ii) કોઈ પણ બિંદુનો y-યામ તેનું x-અક્ષથી y-અક્ષની દિશામાં માપેલ લંબઅંતર છે.(જો તે અંતર y-અક્ષની ધન દિશામાં માપવામાં આવે, તો y-યામ ધન હોય છે તથા જો તે અંતર y-અક્ષની ઋણ દિશામાં માપવામાં આવે, તો તે y-યામ ઋણ હોય છે). બિંદુ P માટે તે 3 છે અને બિંદુ Q માટે – 2 છે. y-યામને ભુજ પણ કહે છે.

(iii) બિંદુના યામ લખતી વખતે પ્રથમ x-યામ અને તે પછી y-યામ લખવામાં આવે છે. યામને કૌંસમાં લખવામાં આવે છે. આથી બિંદુ P ના યામ (4, 3) અને બિંદુ Q ના યામ (– 6, – 2) છે. સમતલના પ્રત્યેક બિંદુને યામ દ્વારા અનન્ય રીતે દર્શાવાય છે. (3, 4) એ (4, 3) ને સમાન નથી.

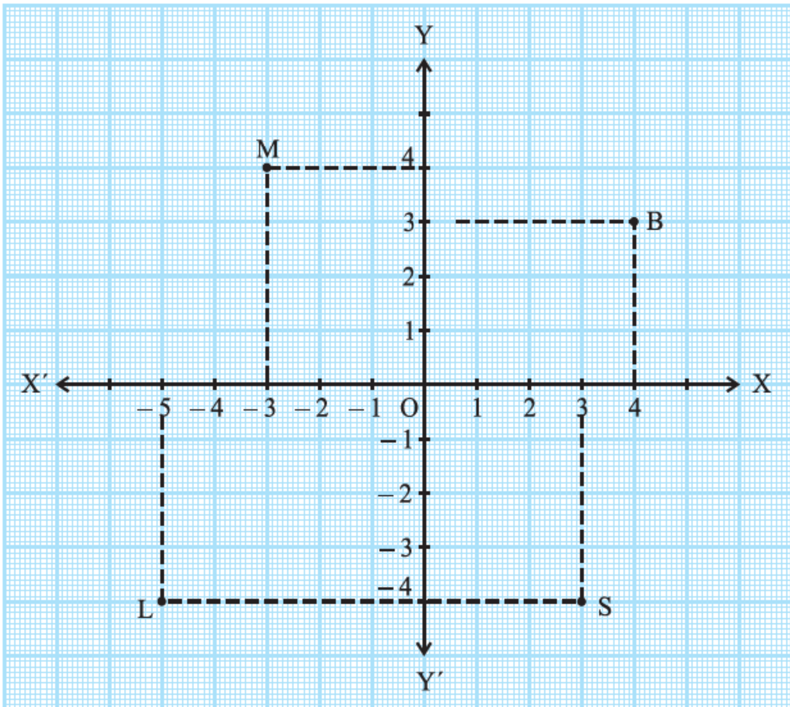
ઉદાહરણ 1 : આકૃતિ 3.11 જુઓ અને નીચેનાં વિધાનો પૂર્ણ કરો :

(i) બિંદુ B ના કોટિ અને ભુજ અનુક્રમે .... અને .... છે. આથી બિંદુ B ના યામ (........, ...) છે.

(ii) બિંદુ M ના x-યામ અને y-યામ અનુક્રમે .... અને .... છે. આથી બિંદુ M ના યામ (........, ...) છે.

(iii) બિંદુ L ના x-યામ અને y-યામ અનુક્રમે .... અને .... છે. આથી બિંદુ L ના યામ (........, ...) છે.

(iv) બિંદુ S ના x-યામ અને y-યામ અનુક્રમે .... અને .... છે. આથી બિંદુ S ના યામ (........, ...) છે.



આકૃતિ 3.11

ઉકેલ : (i) બિંદુ B એ y-અક્ષથી 4 એકમ અંતરે છે. આથી બિંદુ B નો x-યામ અથવા કોટિ 4 છે. બિંદુ B એ x-અક્ષથી 3 એકમ અંતરે છે, તેથી બિંદુ B નો y-યામ અથવા ભુજ 3 છે. આથી બિંદુ B ના યામ (4, 3) છે.

ઉપર (i) મુજબ,

(ii) બિંદુ M ના x-યામ અને y-યામ અનુક્રમે – 3 અને 4 છે. આથી બિંદુ M ના યામ (– 3, 4) છે.

(iii) બિંદુ L ના x-યામ અને y-યામ અનુક્રમે – 5 અને – 4 છે. આથી બિંદુ M ના યામ (– 5, – 4) છે.

(iv) બિંદુ S ના x-યામ અને y-યામ અનુક્રમે 3 અને – 4 છે. આથી બિંદુ S ના યામ (3, – 4) છે.

ઉદાહરણ 2 : આકૃતિ 3.12 માં અક્ષો ઉપરનાં બિંદુઓના યામ લખો :

ઉકેલ : તમે જોઇ શકશો કે,

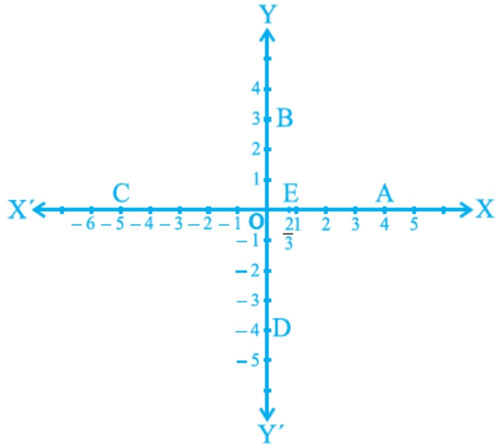
(i) બિંદુ A y-અક્ષથી + 4 અંતરે છે અને x-અક્ષ થી 0 અંતરે છે તેથી બિંદુ A નો x- યામ 4 છે અને y-યામ 0 છે. આથી બિંદુ A ના યામ (4, 0) છે.

(ii) શા માટે બિંદુ B ના યામ (0, 3) છે ?

(iii) શા માટે બિંદુ C ના યામ (– 5, 0) છે ?

(iv) શા માટે બિંદુ D ના યામ (0, – 4) છે ?

(v) શા માટે બિંદુ E ના યામ $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ છે ?



આકૃતિ.3.12

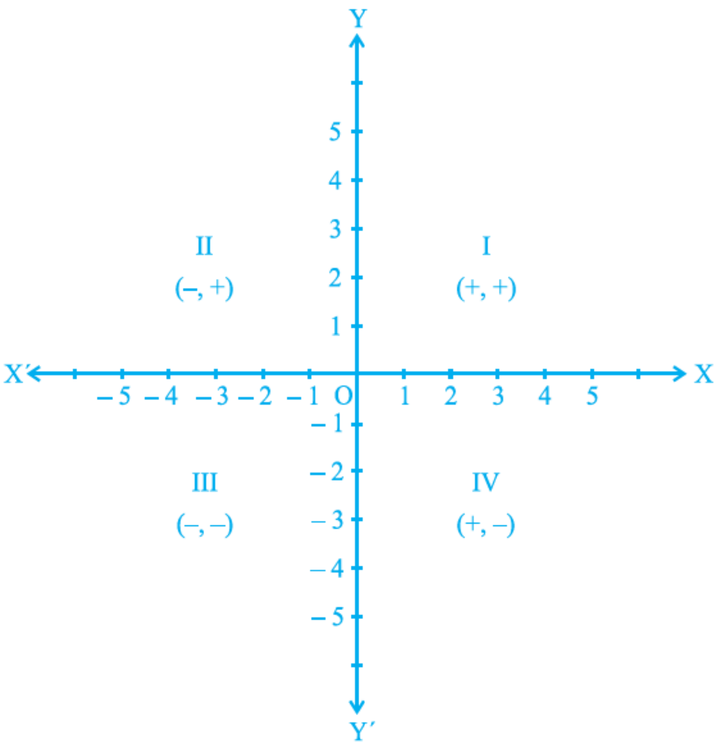
x-અક્ષના દરેક બિંદુનું x-અક્ષથી અંતર શૂન્ય છે. તેથી x-અક્ષ પરનાં પ્રત્યેક બિંદુનો y-યામ કાયમ માટે શૂન્ય છે. આ રીતે કોઈપણ બિંદુ x-અક્ષ પર હોય તો તેના યામ $(x, 0)$ થાય છે. અહીં x એ બિંદુનું y-અક્ષથી નિરપેક્ષ અંતર છે. તે જ રીતે કોઈ પણ બિંદુ y-અક્ષ પર હોય તો તેના યામ $(0, y)$ થાય છે. અહીં y એ x-અક્ષથી તે બિંદુનું નિરપેક્ષ અંતર છે. શા માટે ?

ઊગમબિંદુના યામો શું છે? તેનાં બંને અક્ષોથી અંતર શૂન્ય છે, તેથી x-યામ અને y-યામ બંને શૂન્ય છે, માટે ઊગમબિંદુના યામ (0, 0) છે.

ઉપરના ઉદાહરણ પરથી તમે નીચે પ્રમાણે અવલોકન કરી શકો કે બિંદુના યામોનાં ચિહ્નો પરથી બિંદુ ક્યા ચરણમાં છે તે નક્કી થાય છે.

(i) જો બિંદુ પ્રથમ ચરણમાં હોય તો, બિંદુનું સ્વરૂપ (+, +) થશે. પ્રથમ ચરણ ધન x-અક્ષ અને ધન y-અક્ષથી ઘેરાયેલ છે.

(ii) જો બિંદુ બીજા ચરણમાં હોય તો, બિંદુનું સ્વરૂપ (–, +) થશે. બીજું ચરણ ઋણ x-અક્ષ અને ધન y-અક્ષથી ઘેરાયેલ છે.



આકૃતિ 3.13

(iii) જો બિંદુ ત્રીજા ચરણમાં હોય, તો બિંદુનું સ્વરૂપ (–, –) થશે. ત્રીજું ચરણ ઋણ x-અક્ષ અને ઋણ y-અક્ષથી ઘેરાયેલ છે.

(iv) જો બિંદુ ચોથા ચરણમાં હોય, તો બિંદુનું સ્વરૂપ (+, –) થશે. ચોથું ચરણ ધન x-અક્ષ અને ઋણ y-અક્ષથી ઘેરાયેલ છે.(જુઓ આકૃતિ 3.13)

ટિપ્પણી : સમતલમાં બિંદુનું સ્થાન સૂચવવા માટે ઉપર જે પદ્ધતિની ચર્ચા કરી છે તે ફક્ત એક રૂઢિ છે, જે વિશ્વભરમાં સ્વીકાર્ય છે. અહીં ભુજ (y-યામ) પહેલા અને કોટિ (x-યામ) બીજા સ્થાને આવે તેવી પદ્ધતિ પણ વિકસાવી શકાય. તેમ છતાં કોઈ પણ સંદિગ્ધતાને દૂર રાખવા આપણે સમગ્ર વિશ્વમાં પ્રચલિત રૂઢિગત પદ્ધતિને અનુસરીશું.

સ્વાધ્યાય 3.2

1. નીચેના દરેક પ્રશ્નના જવાબ આપો :

(i) યામ-સમતલમાં કોઈપણ બિંદુ દર્શાવવા ઉપયોગમાં લેવાતી સમક્ષિતિજ અને શિરોલંબ રેખાઓનાં નામ શું છે ?

(ii) આ બે રેખાઓથી બનતા સમતલના દરેક ભાગનું નામ શું છે ?

(iii) આ બે રેખાઓ જ્યાં છેદે તે બિંદુનું નામ લખો.

2. આકૃતિ 3.14 જુઓ અને માગ્યા પ્રમાણે જવાબ લખો :

(i) બિંદુ B ના યામ જણાવો.

(ii) બિંદુ C ના યામ જણાવો.

(iii) (– 3, – 5) દ્વારા દર્શાવાતું બિંદુ લખો.

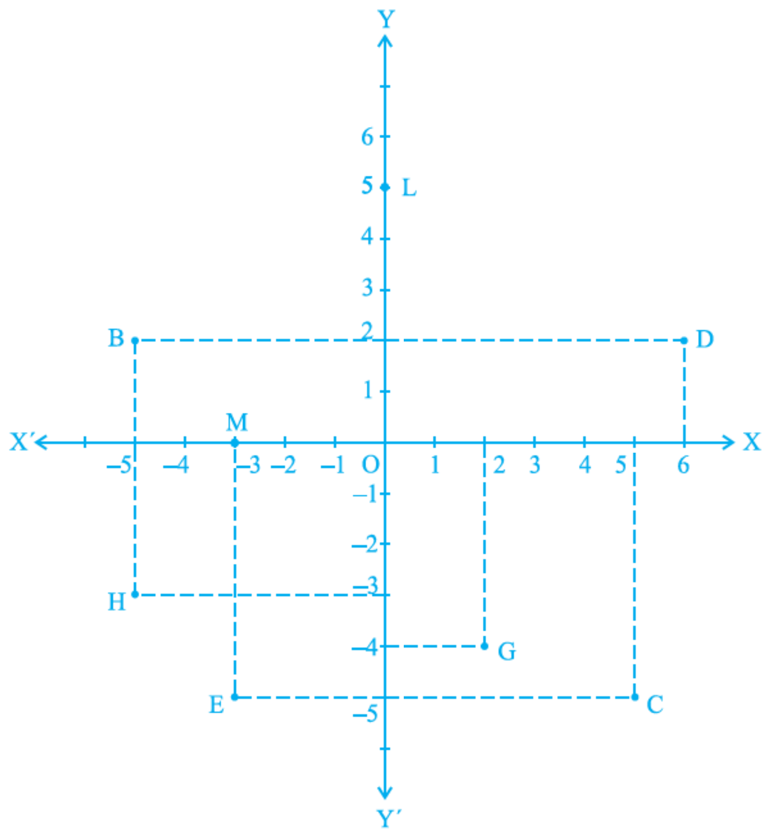
(iv) (2, – 4) દ્વારા દર્શાવાતું બિંદુ લખો.

(v) બિંદુ D નો x-યામ જણાવો.

(vi) બિંદુ H નો y-યામ જણાવો.

(vii) બિંદુ L ના યામ જણાવો.

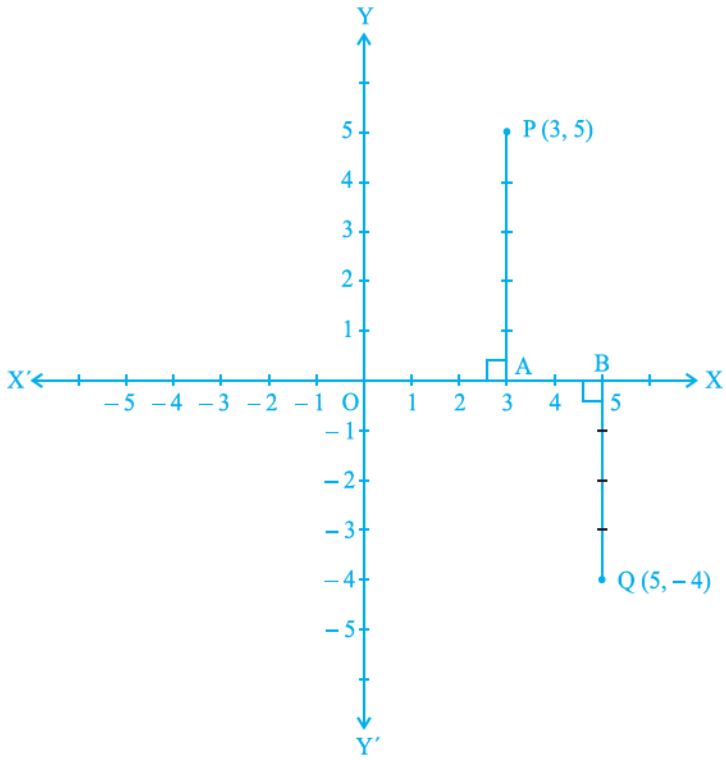
(viii) બિંદુ M ના યામ જણાવો.



આકૃતિ 3.14

3.3 જે બિંદુના યામ આપેલા હોય તે બિંદુનું નિરૂપણ

અત્યાર સુધી અમે તમારા માટે બિંદુઓ મૂક્યાં છે અને તમને તેમના યામ આપવાનું કહેવામાં આવ્યું છે. હવે જો આપણે બિંદુના યામ જાણતા હોઈએ તો એ બિંદુ સમતલમાં ક્યાં મુકાય તે દર્શાવીશું. આ કાર્ય પદ્ધતિને બિંદુનું 'નિરૂપણ' કહે છે.

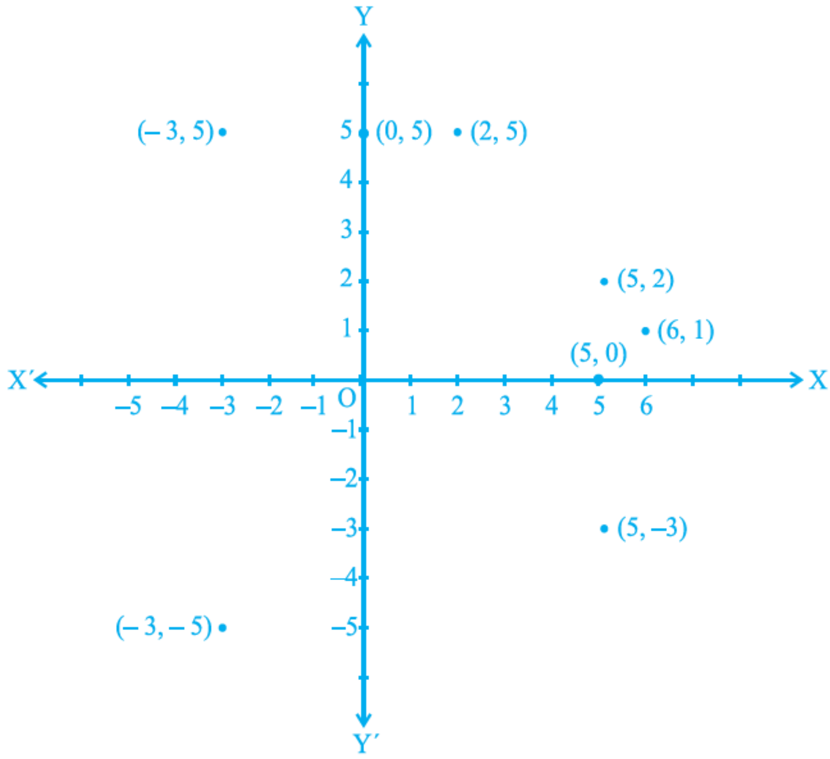


આકૃતિ 3.15

ધારો કે બિંદુના યામ (3, 5) છે. આપણે યામ-સમતલમાં આ બિંદુનું નિરૂપણ કરવું છે. આપણે યામાક્ષો દોરી અને બંને યામાક્ષો પર એક સેન્ટિમીટરના એક એકમ પસંદ કરી તેમને એકમ તરીકે દર્શાવીશું. બિંદુના યામ (3, 5) છે. તે આપણને જણાવે છે કે બિંદુનું ધન x-અક્ષ ઉપર y-અક્ષથી અંતર 3 છે તથા ધન y-અક્ષ ઉપર x-અક્ષથી અંતર 5 છે. ઊગમબિંદુ O થી શરૂ કરી ધન x-અક્ષ ઉપર 3 અંતર કાપો અને સંગત બિંદુ A દર્શાવો. A થી આપણે y-અક્ષની ધન દિશામાં 5 એકમ જાવ અને તેને સંગત બિંદુ P દર્શાવો. (જુઓ આકૃતિ 3.15.) તમે જોશો કે P નું y-અક્ષથી અંતર 3 એકમ અને x-અક્ષથી અંતર 5 એકમ છે. હવે P બિંદુનું સ્થાન નક્કી થયું. આપણે નોંધીએ કે P પ્રથમ ચરણમાં છે, P ના બંને યામ ધન છે. તેવી જ રીતે તમે બિંદુ Q(5, – 4)ને યામ-સમતલમાં દર્શાવી શકો છો. Q નું x-અક્ષથી ઋણ y-અક્ષની દિશામાં અંતર 4 એકમ છે. તેથી y-યામ – 4 છે. (જુઓ આકૃતિ 3.15.)બિંદુ Q ચોથા ચરણમાં છે (કેમ?)

ઉદાહરણ 3 : યામ-સમતલમાં બિંદુઓ (5, 0), (0, 5), (2, 5), (5, 2), (– 3, 5), (– 3, – 5), (5, – 3) અને (6, 1) ને દર્શાવો.

ઉકેલ : 1 સેમી = 1 એકમ લઈને આપણે x-અક્ષ અને y-અક્ષ દોરીશું. આકૃતિ 3.16 માં બિંદુઓનાં સ્થાન ટપકાં મૂકીને દર્શાવેલ છે.



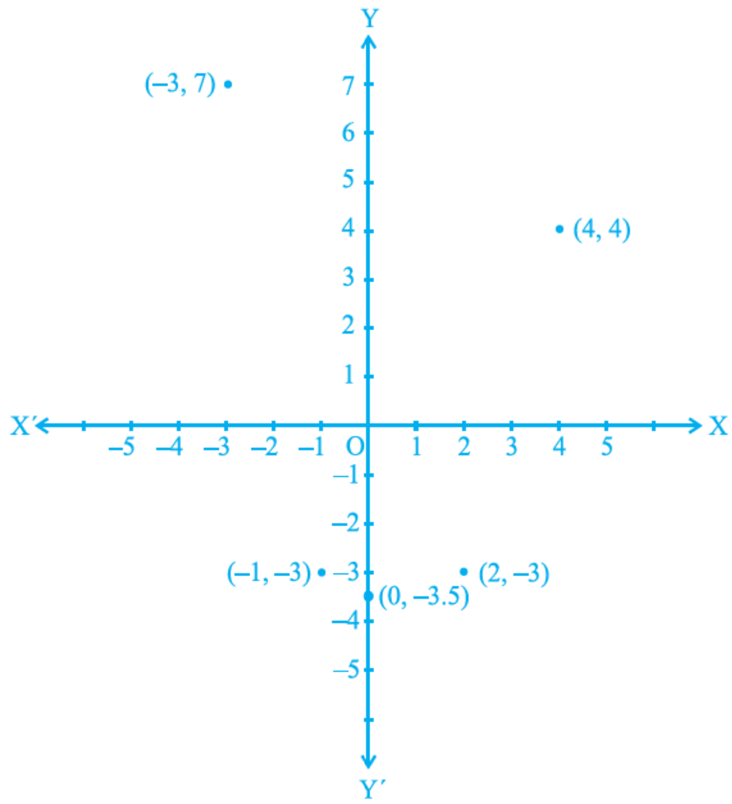
આકૃતિ 3.16

નોંધ: ઉપરનાં ઉદાહરણમાં તમે જોશો (5, 0) અને (0, 5) સમાન સ્થાને નથી. તેવી જ રીતે (5, 2) અને (2, 5) પણ ભિન્ન સ્થાને છે. વળી, (– 3, 5) અને (5, – 3) બિંદુઓ પણ ભિન્ન સ્થાને છે. બીજાં કેટલાંક ઉદાહરણથી તમે શોધી શકશો કે, *જો* $x \neq y$, *તો* (x, y) *નું સ્થાન યામ સમતલમાં* (y, x) *ના સ્થાનથી ભિન્ન છે.* તેથી જો આપણે x અને y ના યામની ફેરબદલ કરીએ તો (y, x)નું સ્થાન (x, y)ના સ્થાનથી ભિન્ન બનશે. આથી કહી શકાય કે, x અને y નો ક્રમ (x, y) અગત્યનો છે. તેથી (x, y) ને ક્રમયુક્ત જોડ કહેવાય છે. જો $x \neq y$ તો ક્રમયુક્ત જોડ $(x, y) \neq$ ક્રમયુક્ત જોડ (y, x), પરંતુ જો $x = y$ તો સ્પષ્ટ છે કે $(x, y) = (y, x)$.

ઉદાહરણ 4 : યામ-સમતલમાં નીચેની ક્રમયુક્ત જોડો (x, y) દર્શાવો. સ્કેલમાપ 1 સેમી = 1 એકમનો ઉપયોગ અક્ષો પર કરો :

x	– 3	0	– 1	4	2
y	7	–3.5	– 3	4	– 3

ઉકેલ : ક્રમયુક્ત જોડ કોષ્ટકમાં દર્શાવ્યાં તે બિંદુઓ (– 3, 7), (0, – 3.5), (– 1, – 3),(4, 4), (2, – 3) તરીકે દર્શાવી શકાય. આકૃતિ 3.17 માં બિંદુઓને ટપકાંની નિશાનીથી દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 3.17

પ્રવૃત્તિ 2 : બે વ્યક્તિઓની રમત (આવશ્યક સામગ્રી બે કાઉન્ટર અથવા સિક્કા, આલેખપત્ર, બે જુદા જુદા રંગનાં પાસા જેમકે લાલ અને લીલો.)

દરેક કાઉન્ટર (0, 0) પર મૂકો. દરેક ખેલાડી વારાફરતી બે પાસાંને ફેંકે. જ્યારે પ્રથમ ખેલાડી પાસા ફેંકે છે ત્યારે ધારો કે લાલ પાસામાં 3 દર્શાવે અને લીલા પાસામાં 1 દર્શાવે છે. તેથી તે કાઉન્ટર (3, 1) પર મૂકશે. તેવી જ રીતે જો બીજો ખેલાડી પાસા ફેંકે તો લાલ પાસા પર 2 અને લીલા પર 4 દર્શાવે છે. તેથી તે કાઉન્ટર (2, 4) પર મૂકશે. બીજીવાર ફેંકતાં જો પ્રથમ ખેલાડીને લાલ પાસા પર 1 અને લીલા પાસા પર 4 મળે છે. તેથી તે (3, 1) સ્થાન પરથી (3+1, 1+4) પર ચાલશે. એટલે કે x-યામમાં 1 ઉમેરતાં અને y-યામમાં 4 ઉમેરતાં મળશે.

આ રમતનો ઉદ્દેશ્ય કૂદકા માર્યા વગર (10, 10) પર પ્રથમ પહોંચવાનો છે. એટલે કે x-યામ અને y-યામની કિંમત 10 થી વધુ ન હોવી જોઈએ. બે ખેલાડીના કાઉન્ટર એક સ્થાન પર ભેગા થઈ જવા ન જોઈએ. પ્રથમ ખેલાડીનું કાઉન્ટર બીજા ખેલાડીના કાઉન્ટરના સ્થાનવાળા બિંદુ પર આવે, તો બીજા ખેલાડીનું કાઉન્ટર (0, 0) પર જતું રહે. જો કાઉન્ટર ભેગા થયા વગર ચાલવું શક્ય ન હોય, તો ખેલાડીનો વારો જાય. તમે વધુ મિત્ર સાથે રમવા માટે આ રમતનું વિસ્તરણ કરી શકો છો.

અવલોકન : તમે આગળના ધોરણમાં સમય-અંતર આલેખ, બાજુ-પરિમિતિ આલેખ જેવી ભિન્ન પરિસ્થિતિઓના આલેખ દોર્યા છે. તેની સાથે બિંદુના આલેખની પ્રક્રિયા સરખાવી શકાય. આવી સ્થિતિમાં આપણે x-અક્ષ તથા y-અક્ષની જગાએ અક્ષોને, t-અક્ષ, d-અક્ષ, s-અક્ષ, અથવા p-અક્ષ, વગેરે કહી શકીએ.

સ્વાધ્યાય 3.3

1. કયા ચરણમાં અથવા કયા અક્ષ ઉપર $(-2, 4), (3, -1), (-1, 0), (1, 2)$ અને $(-3, -5)$ બિંદુઓ છે? તમારા જવાબની ચકાસણી બિંદુઓને યામ-સમતલમાં દર્શાવી કરો.

2. નીચેના કોષ્ટકમાંથી સમતલમાં અનુકૂળ સ્કેલમાપના એકમોનું અંતર અક્ષો પર પસંદ કરીને (x, y) બિંદુઓનું નિરૂપણ કરો :

x	-2	-1	0	1	3
y	8	7	-1.25	3	-1

3.4 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં નીચેના મુદ્દાઓ વિશે અભ્યાસ કર્યો :

1. સમતલમાં વસ્તુનું સ્થાન અથવા બિંદુનું નિરૂપણ કરવામાં આપણને બે પરસ્પર લંબરેખાની જરૂર પડે. એક સમક્ષિતિજ અને બીજી શિરોલંબ.
2. સમતલને કાર્તેઝિય સમતલ અથવા યામ-સમતલ અથવા કાર્તેઝિય યામ સમતલ પણ કહે છે અને રેખાઓને યામાક્ષો કહે છે.
3. સમક્ષિતિજ રેખાને x-અક્ષ અને શિરોલંબ રેખાને y-અક્ષ કહે છે.
4. યામાક્ષો સમતલને ચાર ભાગોમાં વિભાજિત કરે છે. તેમને ચરણ કહે છે.
5. બે અક્ષોના છેદબિંદુને ઊગમબિંદુ કહેવાય છે.
6. બિંદુથી y-અક્ષ સુધીના યોગ્ય દિશામાં અંતરને x-યામ અથવા કોટિ અને બિંદુથી x-અક્ષ સુધીના યોગ્ય દિશામાં અંતરને y-યામ અથવા ભુજ કહેવાય છે.
7. જો x- યામ x અને y-યામ y હોય, તો (x, y) ને બિંદુના યામ કહેવાય છે.
8. x-અક્ષ પરના પ્રત્યેક બિંદુનું સ્વરૂપ $(x, 0)$ અને y-અક્ષ પરના પ્રત્યેક બિંદુનું સ્વરૂપ $(0, y)$ છે.
9. ઊગમબિંદુના યામ $(0, 0)$ છે.
10. પ્રથમ ચરણમાં બિંદુના યામ $(+, +)$, બીજા ચરણમાં $(-, +)$, ત્રીજા ચરણમાં $(-, -)$ અને ચોથા ચરણમાં $(+, -)$ સ્વરૂપના હોય છે. $+$ ધન વાસ્તવિક સંખ્યા અને $-$ ઋણ વાસ્તવિક સંખ્યા દર્શાવે છે.
11. જો $x \neq y$ તો $(x, y) \neq (y, x)$ અને જો $x = y$ તો $(x, y) = (y, x)$

પ્રકરણ 4

દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણો

The principal use of the Analytic Art is to bring Mathematical Problems to Equations and to exhibit those Equations in the most simple terms that can be.

—Edmund Halley

4.1 પ્રાસ્તાવિક

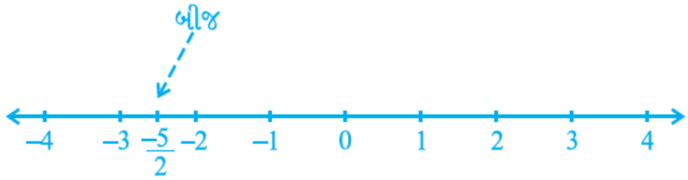
અગાઉના ધોરણોમાં તમે એક ચલ સુરેખ સમીકરણો વિશે જાણ્યું છે. તમે એક ચલ સુરેખ સમીકરણ લખી શકો ? તમે કહી શકો કે $x + 1 = 0$, $x + \sqrt{2} = 0$ અને $\sqrt{2}\, y + \sqrt{3} = 0$ એક ચલ સુરેખ સમીકરણોનાં ઉદાહરણો છે. તમે એ પણ જાણો છો કે આ પ્રકારનાં સમીકરણોને અનન્ય ઉકેલ હોય છે. તમને એ પણ યાદ હશે કે આવા ઉકેલ ને સંખ્યારેખા પર કેવી રીતે દર્શાવી શકાય. આ પ્રકરણમાં એક ચલ સુરેખ સમીકરણોના જ્ઞાનને ફરી યાદ કરીશું તથા તેને બે ચલ સુધી વિસ્તૃત કરીશું. તમે આવા પ્રશ્નોં વિચારી શકોઃ શું એક દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણને ઉકેલ હોય ? જો હા, તો તે અનન્ય હોય? કાર્તેઝિય યામ સમતલમાં આ ઉકેલ કેવી રીતે દર્શાવી શકાય ? આવા પ્રશ્નોના જવાબ માટે તમે પ્રકરણ-3 માં જે સંકલ્પનાઓનો અભ્યાસ કર્યો છે તેનો પણ ઉપયોગ કરી શકશો.

4.2 સુરેખ સમીકરણો

ચાલો, આપણે અગાઉ શું શીખી ગયા છીએ તે યાદ કરીએ. તો નીચે આપેલ સમીકરણ વિચારીએ.

$$2x + 5 = 0$$

તેનો ઉકેલ, એટલે કે આ સમીકરણનું બીજ $-\frac{5}{2}$ છે. આ બીજને સંખ્યારેખા પર આકૃતિ 4.1 પ્રમાણે દર્શાવી શકાયઃ



આકૃતિ 4.1

સમીકરણને ઉકેલતી વખતે તમારે હંમેશાં નીચે દર્શાવેલ મુદ્દાઓ ધ્યાન પર લેવા જોઈએ.

(i) સમીકરણની બંને બાજુમાં સમાન સંખ્યા ઉમેરો(અથવા તેમાંથી બાદ કરો)

(ii) સમીકરણની બંને બાજુએ સમાન શૂન્યેતર સંખ્યા વડે ગુણાકાર કે ભાગાકાર કરો ત્યારે સુરેખ સમીકરણનો ઉકેલ બદલાતો નથી.

હવે આપણે નીચેની પરિસ્થિતિ વિચારીએ:

નાગપુર ખાતે ભારત અને શ્રીલંકા વચ્ચે રમાયેલ એક દિવસીય આંતરરાષ્ટ્રીય ક્રિકેટ મેચમાં બે ભારતીય બેટ્સમેને સાથે મળી 176 રન બનાવ્યા. આ માહિતીને સમીકરણના સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

અહીં, તમે જોઈ શકો છો કે બેમાંથી એકેય ખેલાડીના રન તમે જાણતા નથી અર્થાત્ અહીં બે અજ્ઞાત સંખ્યાઓ છે. આપણે તેમને દર્શાવવા માટે સંજ્ઞા x અને y નો ઉપયોગ કરીશું. આથી, જો એક બેટ્સમેને કરેલ રન x અને બીજા બેટ્સમેને કરેલ રન y હોય તો,

$$x + y = 176.$$

માંગેલ સમીકરણ છે.

આ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનું એક ઉદાહરણ છે. સામાન્ય રીતે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણમાં ચલને x અને y વડે દર્શાવવાની પ્રથા છે, પરંતુ બીજા મૂળાક્ષરો પણ ઉપયોગમાં લઈ શકાય. દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણોનાં કેટલાંક ઉદાહરણો નીચે આપેલ છે.

$$1.2s + 3t = 5,\ p + 4q = 7,\ \pi u + 5v = 9 \text{ અને } 3 = \sqrt{2}\,x - 7y.$$

જુઓ કે, આ સમીકરણોને તમે અનુક્રમે $1.2s + 3t - 5 = 0$, $p + 4q - 7 = 0$, $\pi u + 5v - 9 = 0$ અને $\sqrt{2}\,x - 7y - 3 = 0$ સ્વરૂપે પણ દર્શાવી શકો.

આથી, જે સમીકરણને જ્યાં a, b અને c વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે તથા a અને b બંને એક સાથે શૂન્ય નથી તેવા સ્વરૂપ $ax + by + c = 0$ માં દર્શાવી શકાય તેને દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ કહે છે.

આનો અર્થ એ થાય કે તમે આવાં અનેક સમીકરણો લખી શકો.

ઉદાહરણ 1 : નીચે દર્શાવેલ દરેક સમીકરણને $ax + by + c = 0$ સ્વરૂપે દર્શાવો અને દરેકમાં a, b અને c ની કિંમતો દર્શાવો :

(i) $2x + 3y = 4.37$ (ii) $x - 4 = \sqrt{3}\,y$ (iii) $4 = 5x - 3y$ (iv) $2x = y$

ઉકેલ : (i) $2x + 3y = 4.37$ સમીકરણને $2x + 3y - 4.37 = 0$ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય. અહીં $a = 2$, $b = 3$ અને $c = -4.37$.

(ii) સમીકરણ $x - 4 = \sqrt{3}\,y$ ને $x - \sqrt{3}\,y - 4 = 0$ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય. અહીં $a = 1$, $b = -\sqrt{3}$ અને $c = -4$.

(iii) સમીકરણ $4 = 5x - 3y$ ને $5x - 3y - 4 = 0$ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય. અહીં $a = 5$, $b = -3$ અને $c = -4$.

તમે આ સમીકરણને $-5x + 3y + 4 = 0$ સ્વરૂપે પણ લખી શકાય તે બાબતમાં સંમત છો?આ કિસ્સામાં $a = -5$, $b = 3$ અને $c = 4$.

(iv) સમીકરણ $2x = y$ ને $2x - y + 0 = 0$ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય. અહીં $a = 2$, $b = -1$ અને $c = 0$.

$ax + b = 0$ પ્રકારનાં સમીકરણો પણ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણોનાં ઉદાહરણો છે, કારણ કે તેમને $ax + 0 \cdot y + b = 0$ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય.

ઉદાહરણ તરીકે, $4 - 3x = 0$ ને $-3x + 0 \cdot y + 4 = 0$ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય.

ઉદાહરણ 2 : નીચે દર્શાવેલ દરેક સમીકરણને દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ સ્વરૂપે દર્શાવો.

(i) $x = -5$ (ii) $y = 2$ (iii) $2x = 3$ (iv) $5y = 2$

ઉકેલ : (i) $x = -5$ ને $1 \cdot x + 0 \cdot y = -5$ અથવા $1 \cdot x + 0 \cdot y + 5 = 0$ તરીકે દર્શાવી શકાય.

(ii) $y = 2$ ને $0 \cdot x + 1 \cdot y = 2$ અથવા $0 \cdot x + 1 \cdot y - 2 = 0$ તરીકે દર્શાવી શકાય.

(iii) $2x = 3$ ને $2x + 0 \cdot y - 3 = 0$ તરીકે દર્શાવી શકાય.

(iv) $5y = 2$ ને $0 \cdot x + 5y - 2 = 0$ તરીકે દર્શાવી શકાય.

સ્વાધ્યાય 4.1

1. ''નોટબુકની કિંમત પેનની કિંમત કરતાં બમણી(બે ગણી) છે'' આ વિધાનને દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ સ્વરૂપે દર્શાવો.

   (નોટબુકની કિંમત ₹ x તથા પેનની કિંમત ₹ y લો).

2. નીચે દર્શાવેલા દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણોને $ax + by + c = 0$ તરીકે દર્શાવો અને દરેક કિસ્સામાં a, b અને c ની કિંમત શોધો :

   (i) $2x + 3y = 9.3\overline{5}$ (ii) $x - \frac{y}{5} - 10 = 0$ (iii) $-2x + 3y = 6$ (iv) $x = 3y$

   (v) $2x = -5y$ (vi) $3x + 2 = 0$ (vii) $y - 2 = 0$ (viii) $5 = 2x$

4.3 સુરેખ સમીકરણનો ઉકેલ

તમે જોયું કે દરેક એકચલ સુરેખ સમીકરણને અનન્ય ઉકેલ હોય છે. દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણના ઉકેલ અંગે તમે શું કહી શકો? સમીકરણમાં બે ચલ હોવાથી ઉકેલમાં કિંમતોની જોડ મળે અને તેમાં x માટે એક કિંમત અને y માટે એક કિંમત મળે. આ કિંમતો આપેલા સમીકરણનું સમાધાન કરે. આપણે એક સમીકરણ $2x + 3y = 12$ નો વિચાર કરીએ અહીં, $x = 3$ અને $y = 2$ તેનો એક ઉકેલ છે કારણ કે $x = 3$ અને $y = 2$ ની કિંમત ઉપરના સમીકરણમાં મૂકતાં તમને,

$$2x + 3y = (2 \times 3) + (3 \times 2) = 12 \text{ મળશે.}$$

આ ઉકેલને ક્રમયુક્ત જોડ (3, 2) સ્વરૂપે લખી શકાય. તેમાં પ્રથમ x ની કિંમત અને તે પછી y ની કિંમત લખાય છે.

આ જ પ્રમાણે (0, 4) પણ ઉપરોક્ત સમીકરણનો ઉકેલ છે.

બીજી રીતે જોતાં (1, 4) એ $2x + 3y = 12$ નો ઉકેલ નથી કારણ કે $x = 1$ અને $y = 4$ મૂકતાં આપણને $2x + 3y = 14$ મળે અને 12 ન મળે (જમણી બાજુની કિંમત ન મળે). નોંધો કે (0, 4) એક ઉકેલ છે, પરંતુ (4, 0) ઉકેલ નથી.

$2x + 3y = 12$ માટે તમે ઓછામાં ઓછા બે ઉકેલ (3, 2) અને (0, 4) જોયા. તમે બીજા કોઈ ઉકેલ મેળવી શકો? શું તમે સંમત છો કે (6, 0) પણ એક અન્ય ઉકેલ છે? આ જ પ્રમાણે ચકાસો. હકીકતે આ પ્રમાણે આપણે ઘણા બધા ઉકેલો મેળવી શકીએ. $2x + 3y = 12$ માં તમારી પસંદગીની x ની કોઈ પણ કિંમત લો (જેમ કે $x = 2$) આથી સમીકરણ $4 + 3y = 12$ માં રૂપાંતરિત થશે. તે એક ચલ સુરેખ સમીકરણ છે. તેને ઉકેલતાં તમને $y = \frac{8}{3}$ મળશે. આથી $\left(2, \frac{8}{3}\right)$ એ $2x + 3y = 12$ નો અન્ય ઉકેલ છે. આ જ પ્રમાણે $x = -5$ પસંદ કરતાં સમીકરણ $-10 + 3y = 12$ મળશે. તે કિંમત $y = \frac{22}{3}$ આપશે. આથી $\left(-5, \frac{22}{3}\right)$ એ $2x + 3y = 12$ નો એક અન્ય ઉકેલ છે. આમ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણના વિવિધ ઉકેલનો કોઈ અંત નથી. આમ, *એક દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણને અનંત ઉકેલ હોય છે.*

ઉદાહરણ 3 : સમીકરણ $x + 2y = 6$ ના ચાર ભિન્ન ઉકેલ મેળવો.

ઉકેલ : $x = 2, y = 2$ ચકાસતાં તે ઉકેલ છે, કારણ કે $x = 2, y = 2$ માટે

$$x + 2y = 2 + 4 = 6$$

હવે $x = 0$ પસંદ કરીએ. x ની આ કિંમત મૂકવાથી આપેલ સમીકરણનું રૂપાંતર $2y = 6$ માં થઈ જશે. તેને અનન્ય ઉકેલ $y = 3$ હોય. આથી $x = 0, y = 3$ પણ $x + 2y = 6$ નો ઉકેલ થાય. આ જ પ્રમાણે $y = 0$ લેવાથી, આપેલ સમીકરણ $x = 6$ માં રૂપાંતરીત થશે. આથી $x = 6, y = 0$ પણ સમીકરણ $x + 2y = 6$ નો ઉકેલ થાય. અંતે,આપણે $y = 1$ લઈએ તો આપેલ સમીકરણ $x + 2 = 6$ માં રૂપાંતરીત થશે. તેનો ઉકેલ $x = 4$. થાય. આથી (4, 1) પણ આપેલ સમીકરણનો ઉકેલ થાય. આથી આપેલા સમીકરણના અનંત ઉકેલો પૈકીના ચાર ઉકેલ (2, 2), (0, 3), (6, 0) અને (4, 1) છે.

ટિપ્પણી : અહીં આપણે નોંધીએ કે $x = 0$ મૂકવાથી તેને સંગત y ની કિંમત મળશે. તેથી સમીકરણનો એક ઉકેલ મળશે. આ જ પ્રમાણે આપણે $y = 0$ મૂકીશું તો તેને અનુરૂપ x ની કિંમત મળશે.

ઉદાહરણ 4 : નીચે આપેલા પ્રત્યેક સમીકરણના બે ઉકેલ શોધો :

(i) $4x + 3y = 12$

(ii) $2x + 5y = 0$

(iii) $3y + 4 = 0$

ઉકેલ : (i) $x = 0$ લેતાં, આપણને $3y = 12$ મળે. તેથી $y = 4$ આમ, (0, 4) આપેલ સમીકરણનો એક ઉકેલ થાય. આ જ પ્રમાણે $y = 0$ લેવાથી આપણને $x = 3$ મળે. તેથી (3, 0) પણ ઉકેલ થાય.

(ii) $x = 0$ લેવાથી આપણને $5y = 0$ મળે જેથી $y = 0$ થાય. આમ (0, 0) આપેલ સમીકરણનો એક ઉકેલ થાય. હવે જો તમે $y = 0$ લેશો તો ફરીથી તમને (0, 0) ઉકેલ તરીકે મળશે. તે અગાઉનો ઉકેલ જ છે. બીજો ઉકેલ મેળવવા $x = 1$ લો. આથી તમે y ની અનુરૂપ કિંમત $-\frac{2}{5}$ ચકાસી શકશો. આથી $\left(1, -\frac{2}{5}\right)$ એ $2x + 5y = 0$ નો બીજો ઉકેલ છે.

(iii) સમીકરણ $3y + 4 = 0$ ને $0 \cdot x + 3y + 4 = 0$ સ્વરૂપે લખી શકાય. x ની કોઈપણ કિંમત માટે તમને $y = -\frac{4}{3}$ મળશે. આથી, બે ઉકેલો $\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ અને $\left(1, -\frac{4}{3}\right)$ મળે.

સ્વાધ્યાય 4.2

1. નીચેના પૈકી કયો વિકલ્પ ખરો છે અને શા માટે ?

$y = 3x + 5$ ને

(i) અનન્ય ઉકેલ હોય. (ii) માત્ર બે ઉકેલ હોય. (iii) અનંત ઉકેલ હોય.

2. નીચેના પૈકી પ્રત્યેક સમીકરણના ચાર ઉકેલ લખો :

(i) $2x + y = 7$ (ii) $\pi x + y = 9$ (iii) $x = 4y$

3. નીચેનામાંથી કયા બિંદુઓ સમીકરણ $x - 2y = 4$ ના ઉકેલ છે. અને કયાં બિંદુઓ ઉકેલ નથી તે ચકાસો :

(i) $(0, 2)$ (ii) $(2, 0)$ (iii) $(4, 0)$

(iv) $\left(\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\right)$ (v) $(1, 1)$

4. જો $x = 2, y = 1$ એ સમીકરણ $2x + 3y = k$ નો એક ઉકેલ હોય તો k ની કિંમત શોધો.

4.4 દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનો આલેખ

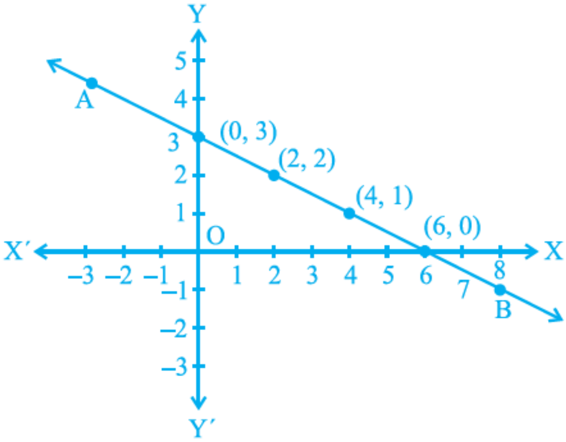
અત્યાર સુધી તમે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણના ઉકેલ બીજગણિતની રીતે મેળવ્યા હવે આપણે તેનું ભૌમિતિક નિરૂપણ જોઈએ. તમે જાણો છો કે આવા પ્રત્યેક સમીકરણના અનંત ઉકેલ હોય છે. આપણે તેમને યામ સમતલમાં કેવી રીતે દર્શાવી શકીએ ? તમને એવો અંદાજ આવી ગયો હશે કે આપણે ઉકેલને ક્રમયુક્ત જોડ તરીકે દર્શાવી શકીએ છીએ.

ઉદાહરણ 3 ના સુરેખ સમીકરણ $x + 2y = 6$ ના ઉકેલોને x ની કિંમતોને અનુરૂપ નીચે y ની કિંમતો દર્શાવી નીચે દર્શાવેલ કોષ્ટક સ્વરૂપમાં રજુ કરી શકાય. (1)

કોષ્ટક 1

x	0	2	4	6	. . .
y	3	2	1	0	. . .

અગાઉના પ્રકરણમાં તમે બિંદુઓનું આલેખપત્ર પર કેવી રીતે નિરૂપણ કરી શકાય તે શીખ્યા છો. ચાલો આપણે બિંદુઓ (0, 3), (2, 2), (4, 1) અને (6, 0) નું આલેખપત્ર પર નિરૂપણ કરીએ. હવે આમાંના કોઈ પણ બે બિંદુઓને જોડી રેખા મેળવો. ચાલો આપણે તેને રેખા AB કહીએ (જુઓ આકૃતિ 4.2).



આકૃતિ. 4.2

તમે જોયું કે બીજાં બે બિંદુઓ પણ રેખા AB પર આવેલા છે ? હવે આ રેખા પરનું બીજુ બિંદુ લો જેમ કે (8, –1). શું તે એક ઉકેલ છે? હકીકતમાં $8 + 2(-1) = 6$. આથી (8, –1) એક ઉકેલ છે. રેખા AB

પરનું અન્ય કોઇ બિંદુ મેળવો અને ચકાસો કે તેના યામ સમીકરણનું સમાધાન કરે છે કે નહીં. હવે રેખા AB પર ન હોય તેવું બિંદુ લો જેમ કે (2, 0). શું તેના યામ સમીકરણનું સમાધાન કરે છે? ચકાસો અને જુઓ કે તે બિંદુના યામ સમીકરણનું સમાધાન કરતા નથી.

ચાલો આપણા અવલોકનોની એક યાદી બનાવીએ :

1. જેના યામ સમીકરણ (1) નું સમાધાન કરે છે તેવું પ્રત્યેક બિંદુ રેખા AB પર આવેલ છે.

2. રેખા AB પર આવેલ દરેક બિંદુ (a, b) એ સમીકરણ(1)નો ઉકેલ $x = a, y = b$ આપે છે .

3. રેખા AB પર આવેલ ન હોય તેવું કોઇપણ બિંદુ સમીકરણ (1)નો ઉકેલ નથી.

આથી તમે એવા નિષ્કર્ષ પર આવી શકો કે રેખા પરનું દરેક બિંદુ સમીકરણનું સમાધાન કરે છે અને સમીકરણના દરેક ઉકેલનું બિંદુ રેખા પર આવેલ હોય. હકીકતમાં કોઈ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનું ભૌમિતિક રીતે નિરૂપણ કરતાં બનતી રેખા એ સમીકરણના ઉકેલોનો સમૂહ છે. તેને સુરેખ સમીકરણનો *આલેખ* કહે છે. આથી દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનો આલેખ મેળવવા માટે તેના બે ઉકેલોને અનુરૂપ બે બિંદુઓને આલેખ પર દર્શાવો અને તેને જોડી રેખા બનાવો તે પૂરતું છે. જો કે બે કરતાં વધુ બિંદુઓનું નિરૂપણ કરવું સલાહભર્યું છે જેથી તમે આલેખની ચોકસાઇ તાત્કાલિક ચકાસી શકો.

નોંધ : એક ઘાત બહુપદીય સમીકરણ $ax + by + c = 0$ એ સુરેખ સમીકરણ છે અને તેનું ભૌમિતિક નિરૂપણ રેખા છે.

ઉદાહરણ 5 : જે રેખા પર બિંદુ (1, 2) આવેલ હોય તે રેખાનું સમીકરણ મેળવો. આવાં કેટલાં સમીકરણ હોય ?

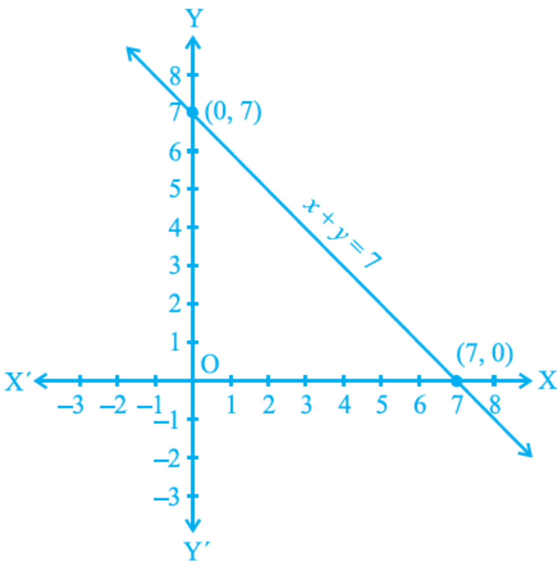
ઉકેલ : અહીં (1, 2) એ તમે જે સુરેખ સમીકરણ શોધવા માંગો છો તેનો ઉકેલ છે. આથી તમારે બિંદુ (1, 2) માંથી પસાર થતી રેખા શોધવી પડે. આવા સુરેખ સમીકરણનું એક ઉદાહરણ $x + y = 3$ થાય બીજાં ઉદાહરણો $y - x = 1$, $y = 2x$ થાય. કારણ કે આ બધા નું સમાધાન (1, 2)ના યામ દ્વારા થાય છે. હકીકતે તો એવાં જે બિંદુ (1, 2) ના યામોનું સમાધાન કરે તેવા અનંત સુરેખ સમીકરણો મળે. તમે આ સત્ય આકૃતિ દ્વારા જોઈ શકશો ?

ઉદાહરણ 6 : $x + y = 7$ નો આલેખ દોરો :

ઉકેલ : આલેખ દોરવા માટે આપણને આ સમીકરણના ઓછામાં ઓછા બે ઉકેલની જરૂર પડશે. તમે ચકાસી જુઓ કે $x = 0, y = 7$, અને $x = 7, y = 0$ એ આપેલ સમીકરણના ઉકેલ છે. આથી, આલેખ દોરવા માટે તમે નીચેના કોષ્ટકનો ઉપયોગ કરી શકો.

કોષ્ટક 2

x	0	7
y	7	0



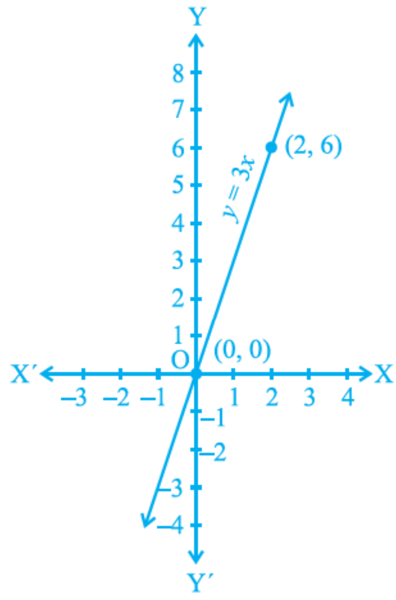
આકૃતિ. 4.3

કોષ્ટક 2 માંથી બે બિંદુઓ લઇ આલેખ પર દર્શાવો અને ત્યારબાદ આ બિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખા બનાવો (જૂઓ આકૃતિ 4.3).

ઉદાહરણ 7 : તમે જાણો છો કે વસ્તુ પર લાગતું બળ એ વસ્તુ પર ઉદ્ભવતા પ્રવેગના સમપ્રમાણમાં હોય છે. આ પરિસ્થિતિ દર્શાવતું સમીકરણ લખો અને આલેખ પર તે દર્શાવો.

ઉકેલ : અહીં સંકળાયેલા ચલ એ બળ અને પ્રવેગ છે, ધારો કે લાગુ પડતું બળ y એકમ અને ઉત્પન્ન થતો પ્રવેગ x એકમ છે. ગુણોત્તર પ્રમાણ અનુસાર તમે આ હકીકતને $y = kx$, સ્વરૂપે દર્શાવી શકો, જ્યાં k અચળ છે. (તમારા વિજ્ઞાનના અભ્યાસ પરથી તમે જાણો છો કે હકીકતમાં k એ વસ્તુનું દળ છે)

હવે, આપણે k ની કિંમત જાણતા નથી. આથી આપણે $y = kx$ નો ચોક્કસ આલેખ ન દોરી શકીએ. હકીકતે જો આપણને k ની ચોક્કસ કિંમત આપવામાં આવે તો આપણે તેનો આલેખ દોરી શકીએ. ધારો કે $k = 3$. આથી આપણે $y = 3x$ દર્શાવતી રેખા દોરી શકીએ. આ માટે આપણે તેના ઉકેલ પૈકી બે ઉકેલ શોધીએ જેમ કે (0, 0) અને (2, 6) (જુઓ આકૃતિ 4.4).



આકૃતિ. 4.4

આલેખ પરથી આપણે જોઈ શકીએ કે જ્યારે 3 એકમ બળ લાગુ થાય ત્યારે 1 એકમ પ્રવેગ ઉત્પન્ન થાય. વળી એ પણ જુઓ કે (0, 0) આલેખ પર આવેલું છે એનો અર્થ એ થાય કે જ્યારે લાગુ પડતું બળ 0 એકમ હોય તો ઉત્પન્ન થતો પ્રવેગ પણ 0 એકમ થાય.

નોંધ : $y = kx$ સ્વરૂપના સમીકરણનો આલેખ રેખા હોય અને તે હંમેશાં ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થાય છે.

ઉદાહરણ 8 : આકૃતિ 4.5 માં દર્શાવેલા દરેક આલેખ માટે નીચે આપેલા વિકલ્પોમાંથી કયા સમીકરણનો આલેખ છે તે પસંદ કરો :

(a) આકૃતિ 4.5 (i) માટે

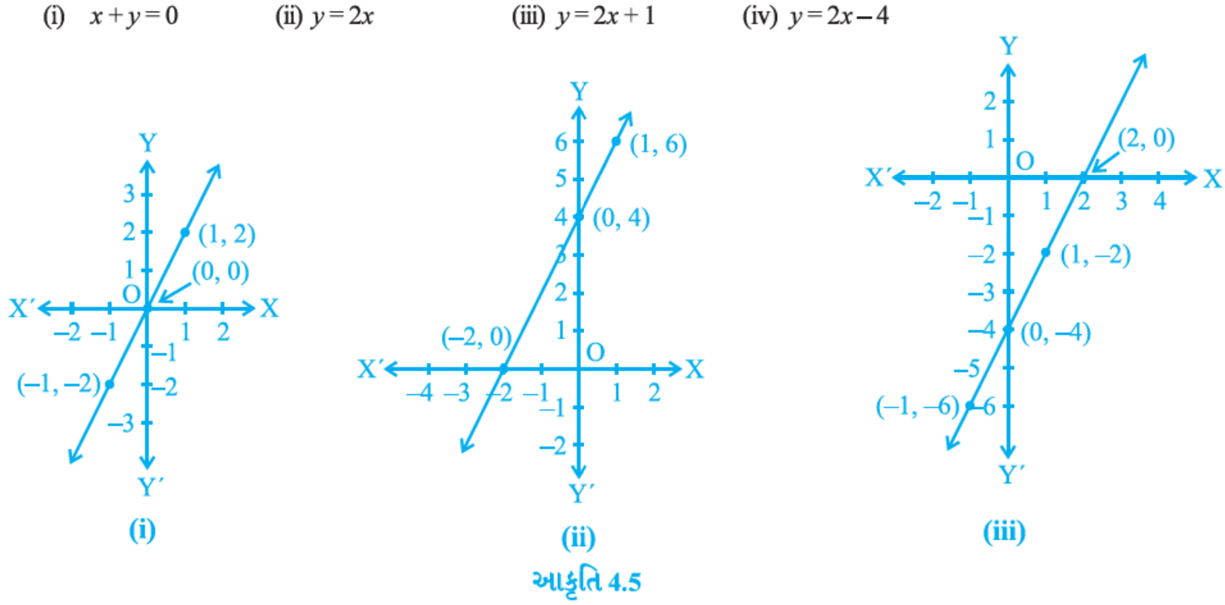
(i) $x + y = 0$ (ii) $y = 2x$ (iii) $y = x$ (iv) $y = 2x + 1$

(b) આકૃતિ 4.5 (ii) માટે

(i) $x + y = 0$ (ii) $y = 2x$ (iii) $y = 2x + 4$ (iv) $y = x - 4$

(c) આકૃતિ 4.5 (iii) માટે

(i) $x + y = 0$ (ii) $y = 2x$ (iii) $y = 2x + 1$ (iv) $y = 2x - 4$



આકૃતિ 4.5

ઉકેલ : (a) આકૃતિ 4.5 (i) માં રેખા પર બિંદુઓ $(-1, -2)$, $(0, 0)$, $(1, 2)$ આવેલા છે. ચકાસતાં જાણવા મળે કે $y = 2x$ સમીકરણ આ આલેખ સાથે સંગત છે. તમે જોઇ શકો છો કે દરેક કિસ્સામાં y-યામની કિંમત x-યામની કિંમત કરતાં બમણી થાય છે.

(b) આકૃતિ 4.5 (ii) માં રેખા પરના બિંદુઓ $(-2, 0)$, $(0, 4)$, $(1, 6)$ છે. તમે જાણો છો કે આલેખ(રેખા) પરના બિંદુઓના યામ સમીકરણ $y = 2x + 4$ નું સમાધાન કરે છે. આથી $y = 2x + 4$ એ આકૃતિ 4.5 (ii) ના આલેખને અનુરૂપ સમીકરણ છે.

(c) આકૃતિ 4.5 (iii) માં રેખા પરના બિંદુઓ $(-1, -6)$, $(0, -4)$, $(1, -2)$, $(2, 0)$ છે. જે ચકાસતાં તમે જોઇ શકો છો કે સમીકરણ $y = 2x - 4$ આપેલા આલેખ(રેખા)ને અનુરૂપ છે.

સ્વાધ્યાય 4.3

1. નીચે દર્શાવેલા પ્રત્યેક દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ માટે આલેખ દોરો :

(i) $x + y = 4$ (ii) $x - y = 2$ (iii) $y = 3x$ (iv) $3 = 2x + y$

2. બિંદુ $(2, 14)$ માંથી પસાર થતી બે રેખાઓનાં સમીકરણો આપો. આવી બીજી કેટલી રેખાઓ મેળવી શકાય અને શા માટે?

3. જો બિંદુ $(3, 4)$ સમીકરણ $3y = ax + 7$ ના આલેખ પરનું એક બિંદુ હોય તો a ની કિંમત શોધો.

4. એક શહેરમાં ટેક્સી ભાડુ આ પ્રમાણે છે : પ્રથમ કિલોમીટર માટે ભાડુ ₹ 8 અને ત્યારબાદના દરેક કિલોમીટર માટે ભાડુ ₹ 5 પ્રતિ કિલોમીટર છે. કાપેલ અંતર x કિલોમીટર અને કુલ ભાડુ ₹ y લઈ આ માહિતી માટે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ લખો અને તેનો આલેખ દોરો.

5. આકૃતિ 4.6 અને આકૃતિ 4.7 માં આપેલા આલેખ માટે નીચે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય સમીકરણ પસંદ કરો.

આકૃતિ 4. 6 માટે

(i) $y = x$

(ii) $x + y = 0$

(iii) $y = 2x$

(iv) $2 + 3y = 7x$

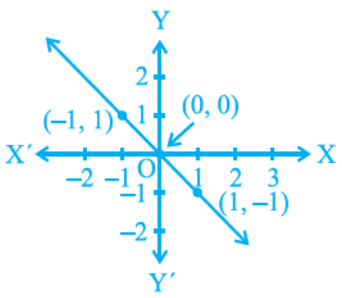
આકૃતિ 4.7 માટે

(i) $y = x + 2$

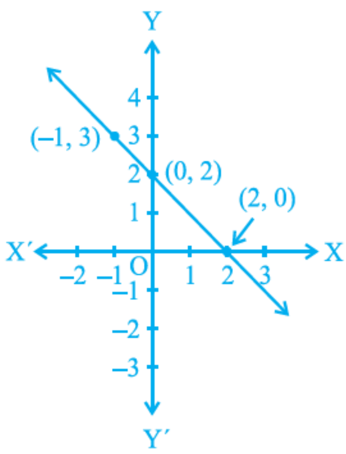
(ii) $y = x - 2$

(iii) $y = -x + 2$

(iv) $x + 2y = 6$



આકૃતિ 4.6



આકૃતિ 4.7

6. જો અચળ બળ લગાડવાથી એક પદાર્થ પર થતું કાર્ય તે પદાર્થ દ્વારા કપાયેલા અંતરના સમપ્રમાણમાં હોય તો, આ બાબત ને બે ચલ વાળા સમીકરણના સ્વરૂપમાં રજૂ કરો અને 5 એકમ અચળ બળ લઇ તેનો આલેખ દોરો અને આલેખ પરથી પદાર્થ દ્વારા કપાયેલ અંતર (i) 2 એકમ (ii) 0 એકમ હોય ત્યારે થતું કાર્ય શોધો.

7. ધોરણ-9 ની બે વિદ્યાર્થિનીઓ યામિની અને ફાતિમાએ ભૂકંપગ્રસ્ત લોકો માટે પ્રધાનમંત્રી રાહતફંડમાં સંયુક્ત રીતે ₹ 100 ફાળો આપ્યો. આ માહિતી આધારિત દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ લખો. (તમે તેમના ફાળાની રકમને ₹ x અને ₹ y લઇ શકો) આ સમીકરણ આધારિત આલેખ દોરો.

8. યુ. એસ. એ અને કેનેડા જેવા દેશમાં તાપમાન ફેરનહીટમાં મપાય છે. ભારત જેવા દેશમાં તાપમાન સેલ્સિયસમાં મપાય છે. અહીં ફેરનહીટનું સેલ્સિયસમાં રૂપાંતર કરતું સુરેખ સમીકરણ આપેલ છે.

$$F = \left(\frac{9}{5}\right)C + 32$$

(i) ઉપર દર્શાવેલ સુરેખ સમીકરણમાં x-અક્ષ પર સેલ્સિયસ અને y-અક્ષ પર ફેરનહીટ લઇ આલેખ દોરો.

(ii) જો તાપમાન 30°C હોય, તો ફેરનહીટ માં શું તાપમાન થાય?

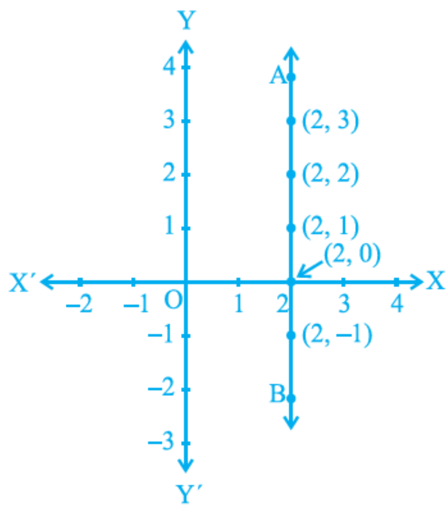
(iii) જો તાપમાન 95°F હોય, તો સેલ્સિયસમાં તાપમાન કેટલું હોય ?

(iv) જો તાપમાન 0°C હોય, તો ફેરનહીટમાં તાપમાન કેટલું હોય અને જો તાપમાન 0°F હોય તો સેલ્સિયસમાં તાપમાન કેટલું હોય ?

(v) ફેરનહીટ અને સેલ્સિયસમાં સંખ્યાત્મક રીતે સમાન હોય તેવું તાપમાન હોય ? જો હા, તો તે શોધો.

4.5 x-અક્ષ અને y-અક્ષને સમાંતર રેખાઓનાં સમીકરણો

કાર્તેઝિય સમતલમાં આપેલાં બિંદુના યામો કેવી રીતે લખવા તે તમે શીખી ગયા છો. બિંદુઓ (2, 0), (–3, 0), (4, 0) અને કોઈપણ વાસ્તવિક સંખ્યા n માટે $(n, 0)$ કાર્તેઝિય સમતલમાં કયાં આવેલા હોય તે તમે જાણો છો? હા, બધા જ બિંદુઓ x-અક્ષ પર આવેલા છે. પરંતુ શા માટે તે તમે જાણો છો? કારણ કે x-અક્ષ પરના દરેક બિંદુનો y-યામ 0 હોય. હકીકતમાં x-અક્ષ પરનું દરેક બિંદુ $(x, 0)$ સ્વરૂપમાં હોય. હવે તમે x-અક્ષ ના સમીકરણનું અનુમાન કરી શકો? તે $y = 0$ દ્વારા અપાય છે. આપણે નોંધીએ કે $y = 0$ ને $0 \cdot x + 1 \cdot y = 0$ દ્વારા વ્યક્ત કરી શકાય. આ જ પ્રમાણે $x = 0$ દ્વારા y - અક્ષનું સમીકરણ દર્શાવી શકાય.



આકૃતિ 4.8

હવે સમીકરણ $x - 2 = 0$ નો વિચાર કરો. જો આ સમીકરણને એક ચલ સમીકરણ ગણવામાં આવે તો $x = 2$ તેનો અનન્ય ઉકેલ થાય. તે સંખ્યારેખા પરનું બિંદુ છે. જો કે જયારે તેને દ્વિચલ સમીકરણ ગણવામાં આવે ત્યારે તેને $x + 0 \cdot y - 2 = 0$ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય.તેને અનંત ઉકેલો હોય. હકીકતમાં આ બધા જ ઉકેલો $(2, r)$

સ્વરૂપે હોય જ્યાં r એ કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય. વળી તમે ચકાસી પણ શકો કે $(2, r)$ સ્વરૂપનું દરેક બિંદુ આ સમીકરણનો ઉકેલ હોય. આથી $x - 2 = 0$ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણને રેખા AB તરીકે આકૃતિ 4.8. ના આલેખ દ્વારા દર્શાવી શકાય.

ઉદાહરણ 9 : સમીકરણ $2x + 1 = x - 3$ ને ઉકેલો અને તેના ઉકેલને (i) સંખ્યારેખા પર (ii) કાર્તેઝિય સમતલમાં દર્શાવો.

ઉકેલ: $2x + 1 = x - 3$ ઉકેલવા

$$2x - x = -3 - 1$$

આથી, $x = -4$

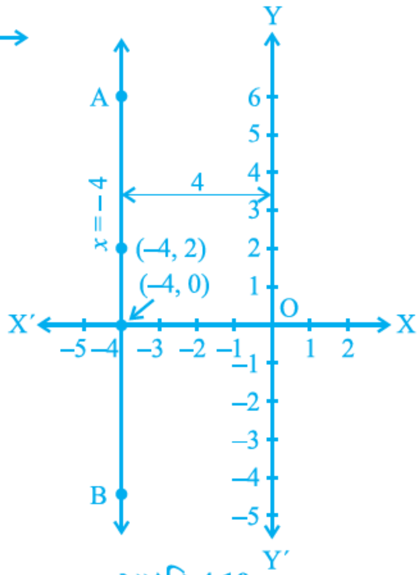
(i) આ ઉકેલને આકૃતિ 4.9 માં સંખ્યારેખા પર દર્શાવેલ છે. અત્રે $x = -4$ ને એક ચલ સમીકરણ તરીકે લીધેલ છે.

આકૃતિ 4.9

(ii) આપણે જાણીએ છીએ કે $x = -4$ ને $x + 0 \cdot y = -4$ તરીકે લખી શકાય. તે ચલ x અને y માટેનું એક દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ થાય. હવે y ની બધી જ કિંમતો સ્વીકાર્ય છે. કારણ કે $0 \cdot y$ હંમેશા 0 થશે. $x = -4$ સમીકરણનો ઉકેલ થશે જ. આમ આપેલા સમીકરણના બે ઉકેલ $x = -4, y = 0$ અને $x = -4, y = 2$ થાય.

અહીં નોંધીએ કે રેખા AB નો આલેખ y-અક્ષને સમાંતર છે અને તેની ડાબી બાજુએ 4 એકમ અંતરે છે (જુઓ આકૃતિ 4.10).

આ જ પ્રમાણે $y = 3$ અથવા $0 \cdot x + 1 \cdot y = 3$ પ્રકારના સમીકરણ પરથી મેળવેલ રેખા x-અક્ષને સમાંતર હોય.



આકૃતિ 4.10

સ્વાધ્યાય 4.4

1. $y = 3$ સમીકરણનું (i) એક ચલમાં (ii) બે ચલમાં ભૌમિતિક નિરૂપણ દર્શાવો.

2. સમીકરણ $2x + 9 = 0$ નું (i) એક ચલમાં (ii) બે ચલમાં ભૌમિતિક નિરૂપણ દર્શાવો.

4.6 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓ વિશે અભ્યાસ કર્યો.

1. સમીકરણ $ax + by + c = 0$ (જ્યાં a, b અને c વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે તથા a અને b એક સાથે શૂન્ય નથી.) ને દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ કહે છે.

2. દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણને અનંત ઉકેલ હોય છે.

3. પ્રત્યેક દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનો આલેખ રેખા છે.

4. $x = 0$ એ y-અક્ષનું સમીકરણ છે અને $y = 0$ એ x-અક્ષનું સમીકરણ છે.

5. $x = a$ નો આલેખ y-અક્ષને સમાંતર રેખા છે. $(a \neq 0)$

6. $y = a$ નો આલેખ x-અક્ષને સમાંતર રેખા છે. $(a \neq 0)$

7. $y = mx$ દ્વારા મળતા સમીકરણની રેખા ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થાય છે.

8. દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણના આલેખમાં રેખા પરનું પ્રત્યેક બિંદુ એ તે સમીકરણનો ઉકેલ છે. ઉપરાંત પ્રત્યેક દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનો ઉકેલ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણના આલેખ પરનું બિંદુ છે.

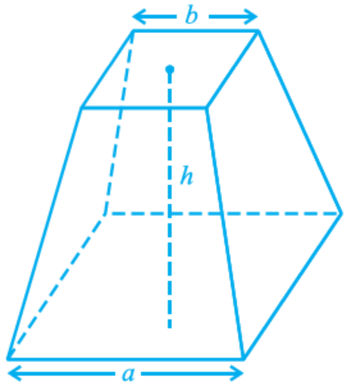
પ્રકરણ 5

યુક્લિડની ભૂમિતિનો પરિચય

5.1 પ્રાસ્તાવિક

ભૂમિતિ માટેનો અંગ્રેજી શબ્દ '*Geometry*' છે. *Geometry* શબ્દ બે ગ્રીક શબ્દના સંયોજનથી બનેલો છે. '*geo*' અને '*metrein*', *Geo*નો અર્થ પૃથ્વી અને '*metrein*'નો અર્થ માપવું થાય. જમીનના માપનની જરૂરિયાતમાંથી ભૂમિતિનો ઉદ્ભવ થયો છે. પ્રાચીન સંસ્કૃતિમાં ગણિતની આ શાખાનો અભ્યાસ વિવિધ સ્વરૂપે થયો હતો. ઇજિપ્ત, બેબીલોનિયા, ચીન, ભારત, ગ્રીસ, ઇંકાઝ જેવી તે સમયની સંસ્કૃતિના લોકોને પડતી કેટલીક વ્યાવહારિક સમસ્યાઓનો સામનો કરવા માટે ભૂમિતિના વિકાસની જરૂરિયાત ઊભી થઇ.

ઉદાહરણ તરીકે જ્યારે નાઈલ નદીમાં પૂર આવતું હતું ત્યારે આસપાસનાં ક્ષેત્રના જમીનમાલિકોની ખેતરની સાથે જોડાયેલ સીમાઓનો નાશ થઈ જતો હતો. આવી પૂર હોનારત પછી સીમાઓની પુનઃસ્થાપના કરવામાં આવતી હતી. આ હેતુ માટે ઇજિપ્તના નાગરિકોએ ક્ષેત્રફળની ગણતરી માટેના સરળ નિયમો તેમજ સરળ રચના કરવા માટે ભૌમિતિક તક્નીક વિકસાવી. તે ધાન્ય-ભંડારના ઘનફળની ગણતરી તથા પિરામિડના આડછેદ માટે તેમજ નહેર અને પિરામિડના બાંધકામ માટે પણ ભૂમિતિના જ્ઞાનનો ઉપયોગ કરતા હતા. તે કપાયેલ પિરામિડ (આડછેદ)ના ઘનફળની ગણતરી શોધવા માટેના ઉચિત સૂત્રો પણ જાણતા હતા. (જુઓ આકૃતિ 5.1.) તમે જાણો છો કે પિરામિડ ઘન આકૃતિ છે. તેનો પાયો ત્રિકોણ, ચોરસ કે અન્ય બહુકોણ હોય છે અને તેની બાજુની સપાટીઓ ઉપરના એક બિંદુમાં મળતા ત્રિકોણો બનાવે છે.

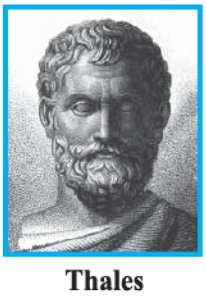


આકૃતિ 5.1
પિરામિડનો આડછેદ

ભારતીય ઉપખંડમાં હડપ્પા અને મોહેંજો-દરો વગેરેનાં ખોદકામ વખતે એ જાણવા મળ્યું કે સિંધુખીણની સંસ્કૃતિ (અંદાજે ઈ.પૂ. 3000)માં ભૂમિતિનો વ્યાપક ઉપયોગ જોવા મળ્યો હતો. તે ઉચ્ચ પ્રકારનો સંગઠિત સમાજ હતો. શહેરો યોજનાબદ્ધ અને સુવ્યવસ્થિત હતા. શહેરો ઉત્તમ રીતે વિકસિત હતા અને ખૂબ સારી રીતે નિર્માણ પામ્યા હતા. ઉદાહરણ તરીકે રસ્તાઓ એકબીજાને સમાંતર અને ગટર-વ્યવસ્થા ભૂગર્ભમાં હતી. મકાનના ઓરડાઓ જુદા જુદા આકારના હતા તે બતાવે છે કે નગરજનો માપન અને વ્યાવહારિક અંકગણિતમાં કુશળ હતા. બાંધકામમાં ઉપયોગમાં લેવાતી ઈંટો ભઠ્ઠામાં પકવવામાં આવતી હતી અને તેની લંબાઈ, પહોળાઈ અને જાડાઈનો ગુણોત્તર 4:2:1 હતો.

પ્રાચીન ભારતમાં ***સૂલ્બાસૂત્ર*** (ઈ. પૂર્વે 800-500) એ ભૌમિતિક રચનાઓ માટે મહત્ત્વપૂર્ણ ગ્રંથ હતો. વૈદિકકાળમાં ભૂમિતિનો ઉદ્ભવ પૂજા માટેની જરૂરી વિવિધ પ્રકારની વેદીઓ અને અગ્નિકુંડોના નિર્માણ કાર્યથી થયો હતો. પવિત્ર અગ્નિને વધુ પ્રભાવશાળી બનાવવા માટે તેના સ્થાન, આકાર અને ક્ષેત્રફળની બાબતમાં સ્પષ્ટ રીતે નક્કી થયેલ આદેશોનું પાલન થતું હતું. ગૃહસ્થ કર્મકાંડ માટે ચોરસ અને વર્તુળાકાર વેદીઓનો ઉપયોગ થતો હતો. જાહેર પૂજા સ્થળો માટે લંબચોરસ, ત્રિકોણ અને સમલંબના સંયોજનથી બનતા આકારના પ્રયોગ જરૂરી હતા. શ્રીયંત્ર (*અથર્વવેદ*માં આપેલ) એ અંદરોઅંદર ગૂંથાયેલા નવ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણનું સંયોજન છે. આ ત્રિકોણ એવી ચોક્કસ રીતે ગોઠવાયેલ છે કે તેમાંથી 43 ઉપત્રિકોણ બને છે. જો કે વેદીઓને બનાવવા માટે શુદ્ધ ભૌમિતિક પદ્ધતિનો ઉપયોગ થયો હતો. છતાં પણ તેની પાછળના સિદ્ધાંતોની ચર્ચા કરવામાં આવેલ નથી.

આ ઉદાહરણો દર્શાવે છે કે, ભૂમિતિનો વિકાસ અને તેનો ઉપયોગ વિશ્વના દરેક સ્થાન પર થતો હતો. પરંતુ તે બહુ અવ્યવસ્થિત રીતે થઈ રહ્યું હતું. પ્રાચીન વિશ્વમાં ભૂમિતિના આ વિકાસની આ ગતિવિધિઓની એક રોચક વાત એ છે કે તેનું જ્ઞાન પેઢીઓ સુધી મૌખિક રીતે અથવા તાડના વૃક્ષના પાન પર સંદેશ લખીને અથવા કેટલીક અન્ય પદ્ધતિઓ દ્વારા આપવામાં આવતું હતું. આ ઉપરાંત આપણને એ પણ જોવા મળે છે કે બેબીલોનિયન જેવી કેટલીક સંસ્કૃતિઓમાં ભૂમિતિ ખૂબ વ્યવહારલક્ષી દૃષ્ટિકોણવાળા વિષય સુધી સીમિત રહી. તેમજ આવું જ ભારત અને રોમમાં રહ્યું. ઇજિપ્તવાસીઓ દ્વારા વિકાસ પામેલ ભૂમિતિમાં મુખ્યત્વે પરિણામોનું કથન જ સમાવિષ્ટ થતું હતું. તેમાં વિધિ(પ્રક્રિયા)ઓના કોઈ વ્યાપક નિયમ આપવામાં આવ્યા નથી. ખરેખર બેબીલોન અને ઇજિપ્તવાસીઓએ ભૂમિતિનો ઉપયોગ મોટા ભાગે વ્યાવહારિક કાર્યો માટે જ કર્યો તથા તેને એક ક્રમબદ્ધ વિજ્ઞાનના રૂપમાં વિકસિત કરવા માટે ખૂબ જ ઓછું કામ થયું. પરંતુ ગ્રીક જેવી સંસ્કૃતિઓમાં એ *તર્ક* પર ભાર આપવામાં આવતો હતો કે કેટલીક રચનાઓ કઈ રીતે થાય છે. ગ્રીસવાસીઓની રુચિ અનુમાનિત તર્કનો ઉપયોગ કરીને તેમણે સ્થાપિત કરેલાં વિધાનોની સત્યાર્થતા ચકાસવામાં હતી. (જુઓ પરિશિષ્ટ 1.)



Thales
(ઈ.પૂ. 640 – 546)
આકૃતિ 5.2

એક ગ્રીક ગણિતશાસ્ત્રી ***Thales***ને એ વાતનો શ્રેય જાય છે કે, તેઓએ સૌથી પહેલા જ્ઞાત સાબિતી આપી. આ સાબિતી એ કથનની હતી કે વર્તુળનો વ્યાસ વર્તુળને સમવિભાજિત કરે છે (બે સમાન ભાગમાં વિભાજિત). ***Thales***ના એક અતિ પ્રસિદ્ધ શિષ્ય ***Pythagoras*** (ઈ.પૂ. 572) હતા. તેમનું નામ તમે ચોક્કસ સાંભળ્યું હશે. પાયથાગોરસ અને તેના સાથીઓએ અનેક ભૌમિતિક ગુણધર્મોની શોધ કરી અને ભૂમિતિના સિદ્ધાંતનો મહદ્ અંશે વિકાસ કર્યો. આ પ્રક્રિયા

ઈ.પૂ. 300 સુધી ચાલુ રહી. આ સમયે ઇજિપ્તના એલેક્ઝાન્ડ્રિયાના એક ગણિત શિક્ષક ***Euclid***એ તે સમય સુધી જાણીતા ગણિતના બધા જ જ્ઞાનને એકત્રિત કર્યું અને ***'Elements'*** નામના તેમના પ્રસિદ્ધ ગ્રંથના રૂપમાં તેને વ્યવસ્થિત કર્યું. તેમણે ***Elements***ને 13 પ્રકરણોમાં વિભાજિત કર્યું. તેમાંથી પ્રત્યેકને પુસ્તક માનવામાં આવે છે. આ પુસ્તકો સમગ્ર વિશ્વના ભૂમિતિ સંબંધિત સમજણને આવનારી પેઢીઓ સુધી પ્રભાવિત કરશે.

Euclid (ઈ.પૂ. 325 – 265)

આકૃતિ 5.3

આ પ્રકરણમાં આપણે ભૂમિતિના યુક્લિડના અભિગમની ચર્ચા કરીશું અને તેને ભૂમિતિના વર્તમાન સ્વરૂપ સાથે જોડવાનો પ્રયાસ કરીશું.

5.2 યુક્લિડની વ્યાખ્યાઓ, સ્વયં સિધ્ધ સત્યો અને પૂર્વધારણાઓ

યુક્લિડના સમયમાં ગ્રીસના ગણિતશાસ્ત્રીઓએ જેમાં તે રહેતા હતા તેવા વિશ્વના એક અમૂર્ત મૉડેલ (પ્રતિમાન) તરીકે ભૂમિતિને કલ્પી. આસપાસની વસ્તુઓના અવલોકન પરથી બિંદુ, રેખા, સમતલ, સપાટી વગેરેની ધારણાઓ સ્થાપિત કરવામાં આવી. અવકાશ અને તેની આસપાસના ઘન પદાર્થના અભ્યાસ પરથી ઘન પદાર્થની અમૂર્ત ભૂમિતિની સંકલ્પના વિકસિત કરવામાં આવી. એક ઘન પદાર્થને આકાર હોય છે, માપ અને સ્થાન હોય છે તથા તેને એક સ્થાનથી બીજા સ્થાન સુધી લઈ જઈ શકાય છે. તેની સીમાઓને પૃષ્ઠ કહે છે. તે અવકાશના એક ભાગને બીજા ભાગથી અલગ કરે છે અને તેને કોઈ જાડાઈ હોતી નથી. પૃષ્ઠની સીમા એ વક્ર અથવા સીધી રેખાઓ હોય છે. આ રેખાઓને અંત્યબિંદુઓ હોય છે.

ઘન પદાર્થથી બિંદુઓ (ઘન પદાર્થ-સમતલ-રેખાઓ-બિંદુ) સુધીનાં ત્રણ ચરણનો વિચાર કરો. પ્રત્યેક ચરણમાં આપણે એક વિસ્તરણથી વંચિત થઈએ છીએ. તેને આપણે ***પરિમાણ*** (*dimension*) પણ કહીએ છીએ. આ માટે એવું કહેવાય છે કે એક ઘન પદાર્થને ત્રણ પરિમાણ, પૃષ્ઠ(સપાટી)ને બે પરિમાણ તથા રેખાને એક પરિમાણ હોય છે અને બિંદુને કોઈ પરિમાણ હોતું નથી. યુક્લિડે આ વિધાનોને સંક્ષિપ્ત રીતે વ્યાખ્યાઓના રૂપમાં રજૂ કર્યાં. તેમણે પોતાના આ સ્પષ્ટીકરણોની શરૂઆત '*Elements*' ના પુસ્તક1 માં 23 વ્યાખ્યાઓ આપીને કરી. આમાંથી કેટલીક વ્યાખ્યાઓ નીચે આપવામાં આવી છે :

1. *બિંદુ*ને કોઈ ભાગ નથી.
2. *રેખા* એ પહોળાઈ વગરની લંબાઈ છે.
3. રેખાના *અંતમાં બિંદુ*ઓ હોય છે.
4. જે પોતાના પર બિંદુઓની સાથે *સમાન* રીતે રહેલી હોય એવી રેખા એક સીધી રેખા છે.
5. *પૃષ્ઠ*ને માત્ર લંબાઈ અને પહોળાઈ હોય છે.
6. પૃષ્ઠની ધાર રેખાઓ હોય છે.
7. જે સપાટી પોતાના પરની સીધી રેખાઓની સાથે એકસમાન રીતે રહેલ હોય તેવી સપાટી એ *સમતલ* છે.

જો તમે ધ્યાનપૂર્વક આ વ્યાખ્યાઓને જોશો તો તમને લાગશે કે કેટલાંક પદો જેવાં કે ભાગ, પહોળાઈ, લંબાઈ, સરખે ભાગે વહેંચણી વગેરેને આગળ જતાં વધુ સ્પષ્ટ રીતે સમજવાની જરૂર છે. ઉદાહરણ તરીકે યુક્લિડે આપેલી બિંદુની વ્યાખ્યાનો વિચાર કરો. આ વ્યાખ્યામાં 'એક ભાગને' વ્યાખ્યાયિત કરવાની જરૂર છે. માની લો કે જે 'ક્ષેત્રફળ' રોકે તેને 'એક ભાગ' કહીએ તો આપણે ફરી 'ક્ષેત્રફળ' ને વ્યાખ્યાયિત કરવાની જરૂર રહેશે. એટલે કે એક વસ્તુને વ્યાખ્યાયિત કરવા માટે આપણે અનેક વસ્તુઓને વ્યાખ્યાયિત કરવાની જરૂર પડે છે અને કોઈ અંત વગરની વ્યાખ્યાઓની લાંબી શૃંખલા પ્રાપ્ત થઈ શકે છે. ઉપર આપેલી વ્યાખ્યાઓની તુલનામાં બિંદુની ભૌમિતિક કલ્પનાને સાહજિક રીતે સમજીશું. આ કારણથી ગણિતશાસ્ત્રીઓને કેટલાંક ભૌમિતિક પદોને અવ્યાખ્યાયિત (*undefined*) માની લેવામાં આવે એ સુવિધાજનક લાગ્યું. આ રીતે એક બિંદુની ભૌમિતિક સંકલ્પના વધુ સાહજિકપણે સમજીશું. આપણે બિંદુને એક નાના ટપકા સ્વરૂપે દર્શાવીએ છીએ. પરંતુ આ સૂક્ષ્મ ટપકાનું કંઈક ને કંઈક પરિમાણ ચોક્કસ હોય છે.

આ પ્રકારની સમસ્યા ઉપર્યુક્ત વ્યાખ્યા 2 માં પણ આવે છે. તેમાં પહોળાઈ અને લંબાઈનો ઉલ્લેખ આવે છે અને તેમાંના કોઈને પણ પહેલાં વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવ્યા નથી. આ કારણથી કોઈ પણ વિષયના અભ્યાસ માટે કેટલાંક પદોને અવ્યાખ્યાયિત રાખવામાં આવ્યાં છે. આ માટે ભૂમિતિમાં આપણે બિંદુ, રેખા અને સમતલ (યુક્લિડના શબ્દોમાં સમતલ સપાટી)ને અવ્યાખ્યાયિત પદના રૂપમાં માનીને આપવામાં આવે છે. માત્ર એ વાત જરૂરી છે કે આપણે તેને સાહજિક રીતે દર્શાવી શકીએ છીએ અથવા '*ભૌતિક નમૂના*' ની મદદથી સ્પષ્ટ કરી શકીએ છીએ.

યુક્લિડે તેની વ્યાખ્યાઓથી શરૂ કરતાં તેમાંના કેટલાક ગુણધર્મોને સાબિત કર્યા વગર સત્ય વિધાન માનવાની કલ્પના કરી. આ કલ્પનાઓ વાસ્તવમાં 'સ્પષ્ટપણે વૈશ્વિક સત્ય' હતી. તેમણે તેને બે ભાગમાં વિભાજિત કર્યાં. આ ભાગ હતાઃ સ્વયંસિદ્ધ સત્ય અને પૂર્વધારણાઓ. તેમણે **પૂર્વધારણા** શબ્દનો ઉપયોગ તેવી કલ્પનાઓ માટે કર્યો, કે જે વિશિષ્ટ રીતે ભૂમિતિથી સંબંધિત હોય બીજી તરફ એવી સામાન્ય સંકલ્પનાઓ હતી (જેને ઘણી વાર **સ્વયંસિદ્ધ સત્યો** કહે છે.) જેનો હંમેશાં ગણિતમાં પ્રયોગ કરાયો અને તેને માત્ર ભૂમિતિ સાથે જ વિશેષ સંબંધ ન હતો. સ્વયંસિદ્ધ સત્યો અને પૂર્વધારણાઓની વધુ જાણકારી માટે પરિશિષ્ટ 1 જુઓ. *યુક્લિડની કેટલીક પૂર્વધારણાઓ* નીચે આપવામાં આવી છે. આ તેના પોતાના ક્રમમાં નથી.

(1) *એક વસ્તુને સમાન હોય તેવી વસ્તુઓ એકબીજીને સમાન થાય.*

(2) *સરખામાં સરખું ઉમેરીએ તો સરવાળા સરખા રહે.*

(3) *સરખામાંથી સરખા બાદ કરીએ તો બાદબાકી (શેષફળ) સરખી રહે.*

(4) *એકબીજા પર બંધબેસતી આવતી વસ્તુઓ એકબીજીને સરખી રહે.*

(5) *આખું તેના ભાગ કરતા મોટું હોય છે.*

(6) *સરખી વસ્તુઓના બમણા એકબીજાને સમાન હોય છે.*

(7) *એક જ વસ્તુઓના અડધા એકબીજાને સમાન થાય.*

આ 'સામાન્ય સંકલ્પનાઓ' કોઈ પ્રકારનાં **માપ**(*Magnitudes*)ના સંદર્ભમાં કહેવામાં આવી છે. પ્રથમ સામાન્ય સંકલ્પનાનો

સમતલીય આકૃતિઓ માટે પ્રયોગ કરી શકાય છે. ઉદાહરણ તરીકે જો એક ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ એક લંબચોરસના ક્ષેત્રફળની બરાબર હોય અને આ લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ કોઈ ચોરસના ક્ષેત્રફળની બરાબર હોય, તો ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ પણ ચોરસના ક્ષેત્રફળની બરાબર હોય.

એક જ પ્રકારના માપની સરખામણી કરી શકાય છે અને તેનો સરવાળો પણ થઈ શકે છે. પરંતુ અહીં અલગ અલગ પ્રકારના માપની સરખામણી કરી શકાતી નથી. ઉદાહરણ તરીકે એક રેખાને એક લંબચોરસમાં ઉમેરી શકાતી નથી અને તે જ રીતે ખૂણાની એક પંચકોણ સાથે તુલના કરી શકાતી નથી.

ઉપર આપવામાં આવેલી ચોથી પૂર્વધારણા એવું બતાવતી હોય તેવું પ્રતિત થાય છે કે જે બે વસ્તુઓ સમાન હોય (અથવા એક જ હોય) તે એકબીજાની બરાબર હોય છે. બીજા શબ્દોમાં કોઈ પણ વસ્તુ પોતાને સમાન હોય છે. આ એકબીજાની ઉપર મૂકવાના સિદ્ધાંતની તર્કસંગતતા પ્રગટ કરે છે. પૂર્વધારણા 5 "*થી મોટું છે* (*greater than*)"ની વ્યાખ્યા આપે છે. ઉદાહરણ તરીકે જો કોઈ રાશિ B કોઈ અન્ય રાશિ A નો એક ભાગ હોય, તો A ને રાશિ B અને એક અન્ય રાશિ C ના સરવાળાના રૂપમાં લઈ શકાય છે. સાંકેતિક રૂપમાં લખતાં $A>B$ નો અર્થ એવો છે કે કોઈ રાશિ C એવી છે કે જેથી $A = B + C$ થાય.

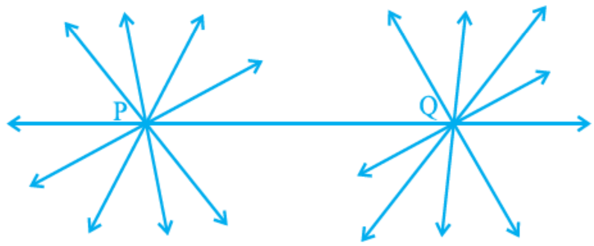
આવો હવે **યુક્લિડની પાંચ પૂર્વધારણાઓ**ની ચર્ચા કરીએ તે આ પ્રકારે છે.

પૂર્વધારણા 1 : *એક બિંદુમાંથી બીજા બિંદુ સુધી થઈને પસાર થતી એક સીધી રેખા દોરી શકાય.*

આ પૂર્વધારણા આપણને સૂચવે છે કે, બે ભિન્ન બિંદુઓમાંથી પસાર થતી ઓછામાં ઓછી એક રેખા અવશ્ય દોરી શકાય છે. પરંતુ આ પરથી એ જાણવા મળતું નથી કે આવી એકથી વધુ સીધી રેખાઓ હોય કે નહિ. પરંતુ યુક્લિડે પોતાના તમામ કાર્યમાં કંઈ સૂચિત કર્યા વગર વારંવાર કલ્પના કરી છે કે બે ભિન્ન બિંદુઓમાંથી એક અનન્ય રેખા દોરી શકાય છે. આ પરિણામને એક પૂર્વધારણાના રૂપમાં નીચે આપેલ છે :

પૂર્વધારણા 5.1 : *આપેલાં બે ભિન્ન બિંદુઓમાંથી પસાર થતી અનન્ય રેખા હોય છે.*

બિંદુ P માંથી પસાર થતી કેટલી રેખાઓ હોઈ શકે જે બિંદુ Q માંથી પણ પસાર થાય ? (જુઓ આકૃતિ 5.4.) તેવી માત્ર એક રેખા PQ છે. જે બિંદુ Q માંથી પસાર થતી હોય તેવી કેટલી રેખાઓ બિંદુ P માંથી પણ પસાર થાય છે? એવી માત્ર એક જ છે, એટલે કે રેખા PQ છે. આ માટે ઉપરનું વિધાન એક સ્વયંસિદ્ધ સત્ય છે અને તે માટે આપણે તેને એક પૂર્વધારણાના રૂપમાં માનીએ છીએ.



આકૃતિ 5.4

પૂર્વધારણા 2 : *સાન્ત રેખાને અનંત સુધી લંબાવી શકાય.*

આપણે નોંધીએ કે જેને આપણે આજકાલ રેખાખંડ કહીએ છીએ તેને યુક્લિડે સાન્ત રેખા કહ્યું હતું. આથી અત્યારના

પરિપ્રેક્ષ્યમાં બીજી પૂર્વધારણા એવું કહે છે કે, એક રેખાખંડને બંને તરફ લંબાવતાં એક રેખા બનાવી શકાય છે. (જુઓ આકૃતિ 5.5,)

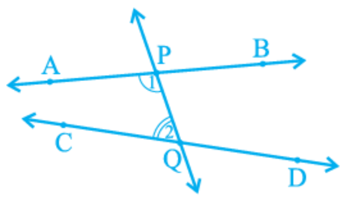
આકૃતિ 5.5

પૂર્વધારણા 3 : *કોઈ પણ બિંદુને કેન્દ્ર લઈ તથા કોઈ પણ લંબાઈની ત્રિજ્યા લઈ વર્તુળ રચી શકાય.*

પૂર્વધારણા 4 : *બધા જ કાટખૂણા એકબીજા સાથે સરખા થાય.*

પૂર્વધારણા 5 : *જો બે રેખાઓને કોઈ ત્રીજી રેખા છેદે અને આ રેખાની એક જ બાજુ તરફના બે અંતઃકોણોનો સરવાળો બે કાટખૂણા કરતાં ઓછો હોય, તો પ્રથમ બે રેખાઓને આ ખૂણાઓ તરફ અનંત સુધી લંબાવતા તે એકબીજીને છેદે છે.*

ઉદાહરણ તરીકે આકૃતિ 5.6 માં રેખા PQ, રેખાઓ AB અને CD પર એવી રીતે છેદે કે અંતઃકોણો 1 અને 2 નો સરવાળો 180° કરતા ઓછો છે. તે PQ ની ડાબી બાજુ આવેલ છે. તેથી રેખાઓ AB અને CD અંતમાં PQ ની ડાબી તરફ છેદશે.



આકૃતિ 5.6

ઉપરની પાંચ પૂર્વધારણાઓને માત્ર જોવાથી આપણને એ સ્પષ્ટ ખ્યાલ આવે છે કે, અન્ય પૂર્વધારણાઓની તુલનામાં પૂર્વધારણા 5 થોડી વધુ જટિલ છે. બીજી તરફ પૂર્વધારણા 1 થી 4 એટલી સરળ અને સ્પષ્ટ છે કે તેમને સ્વયંસિદ્ધ સત્યના રૂપમાં માની લેવામાં આવે છે. પરંતુ તેને સાબિત કરવી શક્ય નથી. આ માટે આ વિધાનો સાબિતી વગર સ્વીકારી લેવામાં આવે છે. (જુઓ પરિશિષ્ટ 1.) આ જટિલતાને કારણે પાંચમી પૂર્વધારણા પર આગળના વિભાગમાં વિશેષ ધ્યાન દેવામાં આવશે.

આજકાલ 'પૂર્વધારણા' અને 'સ્વયંસિદ્ધ સત્ય' બંને પદોનો એકબીજા માટે એક જ અર્થમાં પ્રયોગ કરવામાં આવે છે. ખરેખર પૂર્વધારણા એ **ક્રિયા** (verb) છે જ્યારે આપણે કહીએ છીએ કે 'ચાલો પૂર્વધારણા કરીએ' તો તેનો અર્થ છે કે ચાલો વિશ્વમાં નોંધાતી (જોવા મળતી) ઘટનાઓના આધારે કંઈક વિધાન કહીએ. તેની સત્યાર્થતાની ચકાસણી પછીથી કરવામાં આવે છે. જો તે સત્ય હોય તો તેને પૂર્વધારણાના રૂપમાં સ્વીકારી લેવામાં આવે છે.

જો સ્વયંસિદ્ધ સત્યો પરથી એવું કોઈ વિધાન રચવું અસંભવ હોય જે કોઈ અન્ય સ્વયંસિદ્ધ સત્ય અથવા પહેલાં સાબિત કરેલ કોઈ વિધાનથી વિરોધાભાસી હોય તો સ્વયંસિદ્ધ સત્યોનું માળખુ સુસંગત કહેવાય છે. (જુઓ પરિશિષ્ટ 1.) આથી જો સ્વયંસિદ્ધ સત્યનું કોઈ માળખું આપેલ હોય, તો તે સુનિશ્ચિત કરવુ જરૂરી છે કે આ માળખું સુસંગત હોય.

યુક્લિડે પોતાની પૂર્વધારણા અને સ્વયંસિદ્ધ સત્યો આપ્યા પછી તેનો ઉપયોગ અન્ય પરિણામોને સાબિત કરવામાં કર્યો પછી આ પરિણામોનો ઉપયોગ કરીને તેણે અનુમાનિક તર્ક દ્વારા કેટલાંક પરિણામો સાબિત કર્યાં. જે વિધાનોને સાબિત કર્યાં, તે પ્રમેય કહેવાય છે. યુક્લિડે તેમનાં સ્વયંસિદ્ધ સત્યો, પૂર્વધારણાઓ વ્યાખ્યાઓ અને પહેલાં સાબિત કરેલાં

પ્રમેયોનો ઉપયોગ કરીને એક તર્કસંગત શ્રૃંખલામાં 465 સાધ્ય અનુમાનિત કર્યા. ભૂમિતિનાં કેટલાંક આગળનાં પ્રકરણોમાં તમે આ સ્વયંસિદ્ધ સત્યોનો ઉપયોગ કરીને કેટલાક પ્રમેયો સાબિત કરશો.

ચાલો આગળ આવનારાં ઉદાહરણોમાં જોઈએ કે યુક્લિડે કેટલાંક પરિણામો સાબિત કરવા માટે પોતાનાં સ્વયંસિદ્ધ સત્યો અને પૂર્વધારણાઓનો ઉપયોગ કેવી રીતે કર્યો.

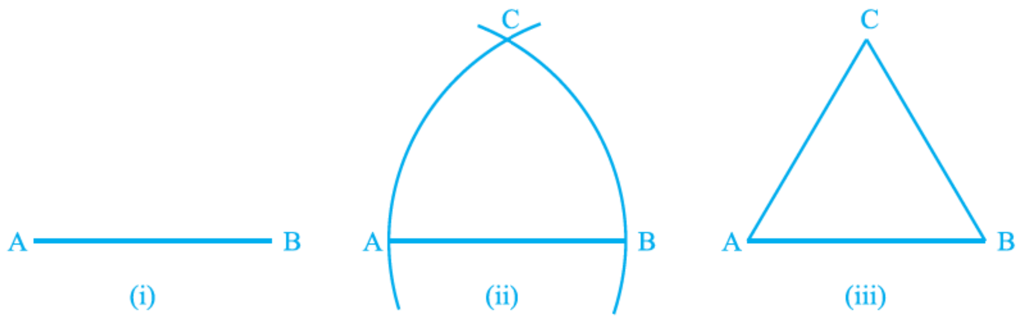
ઉદાહરણ 1 : જો A, B અને C એક રેખા પર આવેલાં ત્રણ બિંદુઓ હોય અને B બિંદુ એ A અને C ની વચ્ચે આવેલ હોય, (જુઓ આકૃતિ 5.7.) તો સાબિત કરો કે $AB + BC = AC$.

આકૃતિ 5.7

ઉકેલ : ઉપરની આકૃતિમાં $AB + BC$ ની સાથે AC સંપાતિ છે. વળી યુક્લિડનું સ્વયંસિદ્ધ સત્ય (4) કહે છે કે વસ્તુઓ જો પરસ્પર બંધબેસતી હોય તે એકબીજાની બરાબર હોય છે. આથી તે સાબિત થાય છે કે $AB + BC = AC$ છે. એ વાત ધ્યાનમાં રહે કે, આ ઉકેલમાં તે સ્વીકારી લેવામાં આવ્યું છે કે બે બિંદુઓમાંથી પસાર થતી એક અનન્ય રેખા હોય છે.

ઉદાહરણ 2 : સાબિત કરો કે આપેલા રેખાખંડ પર એક સમબાજુ ત્રિકોણની રચના કરી શકાય છે.

ઉકેલ : ઉપરના વિધાનમાં આપેલ લંબાઈનો રેખાખંડ AB છે. [જુઓ આકૃતિ 5.8(i).]



આકૃતિ 5.8

અહીંયાં તમારે કંઈક રચના કરવાની આવશ્યકતા છે. યુક્લિડની પૂર્વધારણા 3 નો ઉપયોગ કરીને તમે બિંદુ A ને કેન્દ્ર અને AB ને ત્રિજ્યા લઈ એક વર્તુળ રચી શકો છો. [જુઓ આકૃતિ 5.8(ii).] તે જ રીતે B ને કેન્દ્ર માનીને અને BA ત્રિજ્યા લઈને એક અન્ય વર્તુળને રચી શકાય છે. માની લો કે આ બંને વર્તુળ બિંદુ C માં છેદે છે. હવે રેખાખંડો AC અને BC દોરીને ΔABC બનાવો. [જુઓ આકૃતિ 5.8 (iii).]

આ માટે તમારે એ સાબિત કરવાનું છે કે આ ત્રિકોણ એક સમબાજુ ત્રિકોણ છે એટલે કે $AB = AC = BC$.

હવે, $AB = AC$ છે. (એક વર્તુળની ત્રિજ્યા) (1)

તે જ રીતે $AB = BC$ (એક જ વર્તુળની ત્રિજ્યા) (2)

ઉપરની બંને હકીકત અને યુક્લિડની પ્રથમ પૂર્વધારણા કે જે એક વસ્તુને સમાન હોય તેવી વસ્તુઓ એકબીજાને સમાન થાય તે પરથી તારવી શકાય કે $AB = BC = AC$ છે.

આથી, ΔABC એક સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

એ નોંધીએ કે અહીં યુક્લિડે ક્યાંય બતાવ્યા વગર એ માની લીધું છે કે કેન્દ્રો A અને B ને લઈને બનાવેલા વર્તુળ પરસ્પર એક બિંદુમાં છેદે.

હવે આપણે એક પ્રમેય સાબિત કરીશું જે વિવિધ પરિણામોમાં અનેક વખત ઉપયોગમાં લેવાય છે.

પ્રમેય 5.1 : *બે ભિન્ન રેખાઓમાં એકથી વધુ સામાન્ય બિંદુ ન હોઈ શકે.*

સાબિતી : અહીં આપણને બે રેખાઓ l અને m આપેલ છે. આપણે એ સાબિત કરવું છે કે, l અને m માં એકથી વધુ બિંદુ સામાન્ય નથી.

થોડી વાર માટે એવું ધારી લઈએ કે આ બે રેખાઓ બે ભિન્ન બિંદુઓ P અને Q માં એકબીજીને છેદે છે.

આ રીતે બે ભિન્ન બિંદુઓ P અને Q માંથી પસાર થતી બે રેખાઓ l અને m મળે છે. પરંતુ આ ધારણા પૂર્વધારણા 'આપેલ બે બિંદુઓમાંથી પસાર થતી એક અનન્ય રેખા હોય છે' ની વિરુદ્ધ છે. આથી આપણે જે ધારણાથી ચાલ્યા હતા કે 'બે રેખાઓ બે ભિન્ન બિંદુઓમાંથી પસાર થાય છે' તે ખોટી છે.

આનાથી આપણે શું નિષ્કર્ષ તારવી શકીએ? આપણે એ નિષ્કર્ષ તારવવા માટે પ્રેરાઈએ છીએ કે બે ભિન્ન રેખાઓમાં એકથી વધુ બિંદુ સામાન્ય ન હોય.

સ્વાધ્યાય 5.1

1. નીચે આપેલાં વિધાનોમાંથી કયાં વિધાનો સત્ય છે અને કયાં વિધાનો અસત્ય છે? તમારા જવાબ માટે કારણો આપો :
   (i) એક બિંદુમાંથી પસાર થતી માત્ર એક રેખા દોરી શકાય છે.
   (ii) બે ભિન્ન બિંદુઓમાંથી પસાર થતી અસંખ્ય રેખાઓ હોય છે.
   (iii) એક સાન્ત રેખાને બંને તરફ અનિશ્ચિત રીતે લંબાવી શકાય છે.
   (iv) જો બે વર્તુળ સમાન છે તો તેમની ત્રિજ્યાઓ સમાન હોય છે
   (v) આકૃતિ 5.9 માં જો $AB = PQ$ અને $PQ = XY$ છે, તો $AB = XY$ થાય.

આકૃતિ 5.9

2. નીચે આપેલાં પદોની વ્યાખ્યા આપો. શું તેના માટે કોઈ એવાં પદ છે જેને વ્યાખ્યાયિત કરવાની જરૂર છે ? એ કયા છે? અને તમે તેને કેવી રીતે વ્યાખ્યાયિત કરશો?

   (i) સમાંતર રેખાઓ (ii) લંબરેખાઓ (iii)રેખાખંડ (iv) વર્તુળની ત્રિજયા (v) ચોરસ

3. નીચે આપેલ બે પૂર્વધારણાઓનો વિચાર કરો :

(i) જો બે ભિન્ન બિંદુ A અને B આપ્યાં હોય, તો તેમની વચ્ચે હોય તેવું એક બિંદુ C મળે.

(ii) એક રેખા પર ન આવેલાં હોય તેવાં ઓછામાં ઓછા ત્રણ બિંદુઓ મળે.

શું આ પૂર્વધારણાઓમાં કોઈ અવ્યાખ્યાયિત પદ છે? શું આ પૂર્વધારણાઓ સુસંગત છે? શું આ પૂર્વધારણાઓ યુક્લિડની પૂર્વધારણામાંથી મળે છે? સ્પષ્ટ કરો.

4. જો AC = BC થાય તેવું બિંદુ C બિંદુઓ A અને B ની વચ્ચે હોય, તો સાબિત કરો કે $AC = \frac{1}{2}AB$ છે. આકૃતિ દોરીને તેને સ્પષ્ટ કરો.

5. પ્રશ્ન 4 માં, બિંદુ C રેખાખંડ AB નું એક મધ્યબિંદુ કહેવાય છે. સાબિત કરો કે દરેક રેખાખંડને એક અને માત્ર એક જ મધ્યબિંદુ હોય.

6. આકૃતિ 5.10 માં જો AC = BD હોય, તો સાબિત કરો કે AB = CD છે.

આકૃતિ 5.10

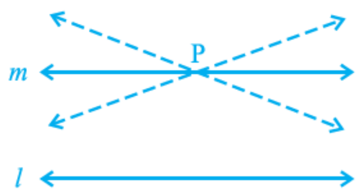
7. યુક્લિડનાં સ્વયંસિદ્ધ સત્યોની યાદીમાં આપેલ સ્વયંસિદ્ધ સત્ય 5 એક સનાતન સત્ય કેમ માનવામાં આવે છે? (યાદ રાખો કે આ પ્રશ્ન પાંચમી પૂર્વધારણા સાથે સંબંધિત નથી.)

5.3 યુક્લિડની પાંચમી પૂર્વધારણાને સમકક્ષ વિધાનો

ગણિતના ઇતિહાસમાં યુક્લિડની પાંચમી પૂર્વધારણા ખૂબ નોંધપાત્ર છે. વિભાગ 5.2 પરથી તેને ફરી યાદ કરો. આ પૂર્વધારણાના પરિણામ સ્વરૂપ જો બે રેખાઓને છેદતી રેખાની એક તરફના બંને અંતઃકોણોનો સરવાળો 180° થાય, તો બંને રેખાઓ ક્યારેય છેદી ન શકે. આ પૂર્વધારણાને સમકક્ષ અનેક વિધાનો છે. તેમાંથી એક **પ્લેફેરની પૂર્વધારણા** (*Playfair's Axiom*) છે. (તે સ્કૉટલૅન્ડના એક ગણિતશાસ્ત્રી *John Playfair* એ 1729 માં આપી હતી.) તે આ પ્રકારે છે.

દરેક રેખા l અને તેના પર ન હોય તેવા પ્રત્યેક બિંદુ P માટે એક અનન્ય રેખા m એવી હોય છે, જે P માંથી પસાર થાય છે અને l ને સમાંતર છે.

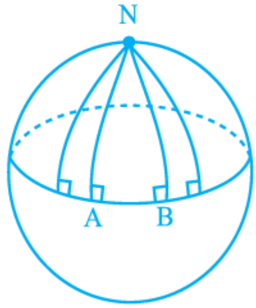
આકૃતિ 5.11 માં તમે જોઈ શકો છો કે P માંથી પસાર થતી બધી રેખાઓમાંથી માત્ર રેખા m જ l ને સમાંતર છે.



આકૃતિ 5.11

આ પરિણામને નીચે પ્રમાણેના સ્વરૂપમાં રજૂ કરી શકાય છે :

બે છેદતી ભિન્ન રેખાઓ એક જ રેખાને સમાંતર ન હોઈ શકે.



આકૃતિ 5.12

યુક્લિડને તેમનાં પ્રથમ 28 પ્રમેયો સાબિત કરવામાં પાંચમી પૂર્વધારણાની કોઈ જરૂર ન પડી. અનેક ગણિતશાસ્ત્રી અને યુક્લિડને પોતાને હવે વિશ્વાસ હતો કે પાંચમી પૂર્વધારણા હકીકતમાં એક પ્રમેય છે. તેને પ્રથમ ચાર પૂર્વધારણાઓ અને સ્વયંસિદ્ધ સત્યોની સહાયતાથી સાબિત કરી શકાય છે. પરંતુ પાંચમી પૂર્વધારણાને પ્રમેયના રૂપમાં સાબિત કરવામાં અસફળ રહ્યા. પરંતુ આ પ્રયત્નોને કારણે એક મહત્ત્વપૂર્ણ ઉપલબ્ધિ થઈ. આ ઉપલબ્ધિ સ્વરૂપે અનેક અન્ય ભૂમિતિઓની રચના થઈ. આ ભૂમિતિઓ યુક્લિડીય ભૂમિતિથી બહુ જ અલગ છે. તેને ***અયુક્લિડીય ભૂમિતિ*** *(Non-Euclidean geometry)* કહેવામાં આવે છે. આ ભૂમિતિઓની રચનાને સંકલ્પનાઓના ઇતિહાસમાં એક સીમાચિહ્ન માનવામાં આવે છે. કારણ કે ત્યાં સુધી દરેક વ્યક્તિ એ વિશ્વાસ રાખતી હતી કે યુક્લિડની ભૂમિતિ જ એક માત્ર ભૂમિતિ હતી અને સંપૂર્ણ વિશ્વ યુક્લિડમય ગોલીય છે. જે વિશ્વમાં આપણે રહીએ છીએ તેની ભૂમિતિ અયુકિલડિય છે. વાસ્તવમાં આ **ગોલીય ભૂમિતિ** *(spherical geometry)* કહેવાય છે. ગોલીય ભૂમિતિમાં રેખાઓ સીધી હોતી નથી. આ રેખાઓ **દીર્ઘ વર્તુળો**ના *(great circles)* ભાગ હોય છે. (તે એક ગોલક અને તેના કેન્દ્રમાંથી પસાર થઈને જતા સમતલોના છેદથી પ્રાપ્ત વર્તુળ હોય છે). આકૃતિ 5.12 માં વિષયવૃત્તીય રેખાઓ AN અને BN (જે એક ગોળાના દીર્ઘ વર્તુળના ભાગ છે) એક જ રેખા AB પર લંબ છે. પરંતુ તે એકબીજાને મળે છે છતાં રેખા AB ના એક જ તરફના અંતઃકોણોનો સરવાળો બે કાટકોણથી ઓછો નથી. (વાસ્તવમાં આ $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$) છે. સાથે જ નોંધીએ કે ત્રિકોણ NAB ના ખૂણાનો સરવાળો 180° થી વધુ છે, કારણ કે $\angle A + \angle B = 180^\circ$ છે. આ પ્રકારે યુકિલડીય ભૂમિતિ માત્ર એક જ સમતલમાં બનતી આકૃતિઓ માટે જ માન્ય છે. વક્ર સપાટીમાં તે નિષ્ફળ જાય છે.

હવે, એક ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ 3 : આપેલ વિધાન પર વિચાર કરો : એવી સીધી રેખાઓની જોડનું અસ્તિત્વ છે, જે એકબીજાથી પ્રત્યેક જગ્યાએથી સમાન અંતરે આવેલી હોય. શું આ યુક્લિડની પાંચમી પૂર્વધારણાનું એક પ્રત્યક્ષ પરિણામ છે? સ્પષ્ટ કરો.

ઉકેલ : એક રેખા l લો અને રેખા પર ન હોય તેવું એક બિંદુ P લો. યુક્લિડની પાંચમી પૂર્વધારણાને સમકક્ષ પ્લેફેરની પૂર્વધારણા પરથી. આપણે જાણીએ છીએ કે P માંથી પસાર થતી (l ને સમાંતર હોય તેવી) એક અનન્ય રેખા m છે .

હવે બિંદુનું એક રેખાથી અંતર તે બિંદુથી રેખા પર દોરેલાં લંબની લંબાઈ હોય છે. m પર આવેલ કોઈ બિંદુથી રેખા l સુધીનું અંતર અને l પર આવેલ કોઈ બિંદુથી રેખા m નું અંતર હંમેશાં સમાન થશે. આથી આ બંને રેખાઓ l અને m દરેક સ્થાન પર એકબીજાથી સમાન અંતરે છે.

નોંધ : આગળનાં કેટલાંક પ્રકરણોમાં તમે જે અભ્યાસ કરશો તે યુક્લિડની ભૂમિતિ હશે. પરંતુ તેમાં આપણા દ્વારા ઉપયોગ કરેલ પૂર્વધારણા અને પ્રમેય યુક્લિડનાં સ્વયંસિદ્ધ સત્યો અને પ્રમેયથી અલગ હોઈ શકે છે.

સ્વાધ્યાય 5.2

1. તમે યુક્લિડની પાંચમી પૂર્વધારણાને સરળતાથી સમજી શકાય તેમ કેવી રીતે લખી શકશો?

2. શું યુક્લિડની પાંચમી પૂર્વધારણા પરથી સમાંતર રેખાઓનું અસ્તિત્વ નક્કી થાય છે? સ્પષ્ટ કરો.

5.4 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો.

1. યુક્લિડે બિંદુ, રેખા અને સમતલને વ્યાખ્યાયિત કર્યા છે, પરંતુ ગણિતશાસ્ત્રીઓએ વ્યાખ્યાઓનો સ્વીકાર કર્યો નથી. આ માટે ભૂમિતિમાં તેને હવે અવ્યાખ્યાયિત પદોના રૂપમાં લેવામાં આવે છે.
2. સ્વયંસિદ્ધ સત્ય અને પૂર્વધારણાઓ એવી કલ્પનાઓ છે જે સ્પષ્ટ રીતે સનાતન સત્ય છે અને તેને સાબિત કરી ન શકાય.
3. પ્રમેયો એ એવા વિધાનો છે કે જેઓ વ્યાખ્યાઓ, સ્વયંસિધ્ધ સત્યો, અગાઉ સાબિત કરેલા પ્રમેયો અને આનુમાનિક તર્કનો ઉપયોગ કરી સાબિત કરી શકાય છે.
4. યુક્લિડની કેટલીક પૂર્વધારણાઓ

   (1) એક વસ્તુને સમાન હોય તેવી વસ્તુઓ એકબીજીને સમાન થાય.

   (2) સમાનમાં સમાન ઉમેરીએ તો સરવાળા સમાન રહે.

   (3) સમાનમાંથી સમાન બાદ કરીએ તો બાદબાકી સમાન રહે.

   (4) એકબીજા પર બંધબેસતી આવતી વસ્તુઓ એકબીજીને સમાન રહે.

   (5) આખું તેના ભાગ કરતાં મોટું હોય છે.

   (6) સરખી વસ્તુઓના બમણા એકબીજાને સમાન હોય છે.

   (7) એક જ વસ્તુઓના અડધાં એકબીજાને સમાન થાય.
5. યુક્લિડની પૂર્વધારણાઓ :

   પૂર્વધારણા 1 : એક બિંદુમાંથી બીજા બિંદુ સુધી એક સીધી રેખા દોરી શકાય.

   પૂર્વધારણા 2 : સાન્ત રેખાને અનંત સુધી લંબાવી શકાય.

   પૂર્વધારણા 3 : કોઈ પણ બિંદુને કેન્દ્ર લઈ તથા કોઈપણ લંબાઈની ત્રિજ્યા લઈ વર્તુળ રચી શકાય.

   પૂર્વધારણા 4 : બધા જ કાટખૂણા એકબીજાને સમાન હોય.

   પૂર્વધારણા 5 : જો બે રેખાઓને કોઈ ત્રીજી રેખા છેદે અને આ રેખાની એક જ બાજુ તરફના બે અંતઃકોણોનો સરવાળો બે કાટખૂણા કરતાં ઓછો હોય, તો પ્રથમ બે રેખાઓને આ ખૂણાઓ તરફ અનંત સુધી લંબાવતાં તેઓ એકબીજીને છેદે છે.
6. યુક્લિડની પાંચમી પૂર્વધારણાને સમકક્ષ વિધાનો.

   (i) દરેક રેખા l અને તેના પર ન હોય તેવા પ્રત્યેક બિંદુ P ને સંગત P માંથી પસાર થતી અને l ને સમાંતર હોય તેવી એક અનન્ય રેખા m મળે.

   (ii) બે ભિન્ન અને એકબીજીને છેદતી રેખાઓ એક જ રેખાને સમાંતર હોઈ શકે નહિ.
7. યુક્લિડની પાંચમી પૂર્વધારણાને સાબિત કરવા માટે પ્રથમ ચાર પૂર્વધારણાનો ઉપયોગ નિષ્ફળ ગયો પરંતુ તેને લીધે બીજી અનેક ભૂમિતિઓની શોધ થઈ તેમને અયુક્લિડિય ભૂમિતિ કહેવામાં આવે છે.

પ્રકરણ 6

રેખાઓ અને ખૂણાઓ

6.1 પ્રાસ્તાવિક

તમે આગળના પ્રકરણ 5માં શીખી ગયાં કે એક રેખા દોરવા માટે ઓછામાં ઓછાં બે ભિન્ન બિંદુઓ જોઈએ. તમે અગાઉ કેટલીક પૂર્વધારણાઓનો અભ્યાસ કરી ગયાં અને તેની મદદથી કેટલાંક વિધાનો સાબિત કર્યાં. આ પ્રકરણમાં તમે બે રેખાઓ પરસ્પર એકબીજીને છેદે તેથી બનતા ખૂણાઓ અને કોઈ રેખા બે કે વધારે સમાંતર રેખાઓને ભિન્ન બિંદુઓમાં છેદે તેથી બનતા ખૂણાઓના ગુણધર્મો વિશે અભ્યાસ કરશો. તદ્ઉપરાંત આ ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરીને કેટલાંક વિધાનોને આનુમાનિક તર્ક દ્વારા સાબિત કરશો. (જુઓ પરિશિષ્ટ 1.) તમે અગાઉના ધોરણમાં વિવિધ પ્રવૃત્તિ દ્વારા આ વિધાનોની ચકાસણી કરી ગયા છો.

તમારા રોજિંદા જીવનમાં સમતલ સપાટીની ધાર વચ્ચે જુદા જુદા પ્રકારના ખૂણાઓ બનતા જુઓ છો. સમતલ સપાટીનો ઉપયોગ કરીને આ પ્રકારના નમૂના બનાવવા માટે તમને ખૂણાઓનું સંપૂર્ણ જ્ઞાન હોવું જોઈએ. ઉદાહરણ તરીકે માનો કે તમે શાળાના કોઈ પ્રદર્શનમાં વાંસની લાકડીઓનો ઉપયોગ કરીને ઝૂંપડીનો નમૂનો બનાવવા માંગો છો. વિચારો કે તમે તે કેવી રીતે બનાવશો ? તેના માટે તમે કેટલીક લાકડીઓ એકબીજીને સમાંતર અને કેટલીક લાકડીઓ ત્રાંસી ગોઠવશો. જ્યારે શિલ્પીએ એક બહુમાળી મકાનનો નકશો દોરવો હોય તો તેણે ભિન્ન ખૂણાઓ પર પરસ્પર છેદતી રેખાઓ અને સમાંતર રેખાઓ દોરવી પડશે. શું તમે માનો છો કે આ રેખાઓ અને ખૂણાઓના ગુણધર્મોના જ્ઞાન વગર તે ઈમારતનો નકશો બનાવી શકશે ?

વિજ્ઞાનમાં તમે કિરણોની રેખાકૃતિ દોરીને પ્રકાશના ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કરો છો. ઉદાહરણ તરીકે જ્યારે પ્રકાશ એક માધ્યમમાંથી બીજા માધ્યમમાં જાય ત્યારે થતાં પ્રકાશના વિભાજનનો અભ્યાસ કરવા તમે પરસ્પર છેદતી અને સમાંતર

રેખાઓના ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરો છો. જ્યારે બે કે તેથી વધુ બળ એક જ પદાર્થ પર લાગે ત્યારે તમે જે આકૃતિ દોરો છો, તેમાં પદાર્થ પર બળોની પરિણામી અસરના અભ્યાસ માટે બળોને દિશાયુક્ત રેખાખંડો દ્વારા દર્શાવો છો. તે સમયે તમારે કિરણો (અથવા રેખાખંડો) એકબીજાને સમાંતર હોય કે પરસ્પર એકબીજાને છેદે ત્યારે બનતા ખૂણાઓ વચ્ચે શો સંબંધ છે તે જાણવું જરૂરી છે. ટાવરની ઊંચાઈ કે દીવાદાંડીથી વહાણનું અંતર શોધવા માટે સમક્ષિતિજ કિરણ અને દૃષ્ટિકિરણ વચ્ચે બનતા ખૂણા વિશે જાણવું જરૂરી છે. જેમાં રેખાઓ અને ખૂણાઓનો ઉપયોગ થતો હોય એવાં બીજાં ઘણાં ઉદાહરણો આપી શકાય. હવે પછીના ભૂમિતિનાં પ્રકરણોમાં વધુમાં વધુ ઉપયોગી નવા ગુણધર્મો તારવવા તમે રેખાઓ અને ખૂણાઓના આ ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરશો.

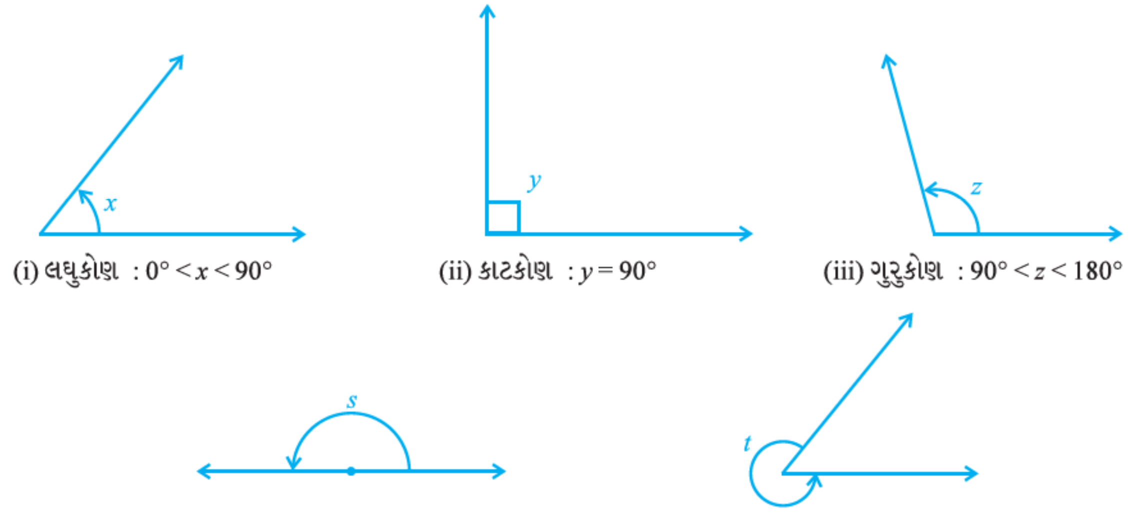
તો ચાલો તમે પહેલાં જેનો અગાઉના ધોરણમાં અભ્યાસ કરી ગયાં છો તે રેખાઓ અને ખૂણા સંબંધિત કેટલાંક પદો તથા વ્યાખ્યાઓનું પુનરાવર્તન કરી લઈએ.

6.2 મૂળભૂત પદો તથા વ્યાખ્યાઓ

યાદ રાખો કે બે અંત્યબિંદુઓવાળા રેખાના ભાગને *રેખાખંડ* કહેવાય. એક જ અંત્યબિંદુ ધરાવતા રેખાના ભાગને કિરણ કહેવાય છે. યાદ રાખો કે રેખાખંડ AB ને $\overline{AB}$ અને તેની લંબાઈને AB વડે દર્શાવાય છે. કિરણ AB ને $\overrightarrow{AB}$ તથા રેખાને $\overleftrightarrow{AB}$ વડે દર્શાવાય છે. છતાં પણ આપણે આ સંકેતોનો ઉપયોગ કરીશું નહિ અને રેખાખંડ AB, કિરણ AB, રેખાખંડ AB ની લંબાઈ અને રેખા AB ને એકના એક જ સંકેત વડે દર્શાવીશું. તમને તેનો અર્થ સંદર્ભથી સ્પષ્ટ થઈ જશે. ક્યારેક ક્યારેક રેખાઓને દર્શાવવા અંગ્રેજી મૂળાક્ષરો l, m, n વગેરેનો ઉપયોગ કરીશું.

જો ત્રણ કે ત્રણથી વધારે બિંદુઓ એક જ રેખા પર આવેલા હોય, તો તે બિંદુઓને સમરેખ બિંદુઓ કહેવાય છે. અન્યથા તે અસમરેખ બિંદુઓ કહેવાય છે.

યાદ રાખો કે જ્યારે બે કિરણો એક સામાન્ય અંત્યબિંદુમાંથી ઉદ્ભવે ત્યારે *ખૂણો* બને છે. અહીં ખૂણો બનાવતાં કિરણોને ખૂણાની ***બાજુઓ*** કહેવામાં આવે છે અને સામાન્ય અંત્યબિંદુને ખૂણાનું ***શિરોબિંદુ*** કહે છે. તમે અગાઉના ધોરણમાં વિવિધ પ્રકારના ખૂણાઓ જેમકે **લઘુકોણ** (*acute angle*), **ગુરુકોણ** (*obtuse angle*), **કાટકોણ** (*right angle*), **સરળકોણ** (*straight angle*) અને **વિપરીત કોણ** (*reflex angle*) વિશે શીખી ગયાં છો. (જુઓ આકૃતિ 6.1.)

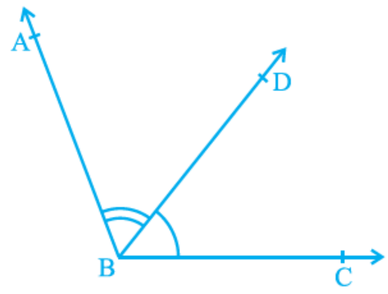


(i) લઘુકોણ : $0° < x < 90°$ (ii) કાટકોણ : $y = 90°$ (iii) ગુરુકોણ : $90° < z < 180°$

(iv) સરળકોણ : $s = 180°$ (v) વિપરીત કોણ : $180° < t < 360°$

આકૃતિ 6.1 ખૂણાના પ્રકારો

લઘુકોણનું માપ 0° થી 90° ની વચ્ચે હોય છે. **કાટકોણ**નું માપ બરાબર 90° હોય. 90° કરતાં વધારે અને 180° કરતાં ઓછા માપના ખૂણાને **ગુરુકોણ** કહે છે. યાદ રાખો કે ***સરળકોણ*** 180° ના માપનો હોય છે અને 180° કરતાં વધારે અને 360° કરતાં ઓછા માપના ખૂણાને ***વિપરીત કોણ*** કહે છે. વળી, જે બે ખૂણાઓના માપનો સરવાળો 90° થાય છે તે ખૂણાઓને એકબીજાના ***કોટિકોણ*** *(complementary angles)* કહે છે અને જે બે ખૂણાઓના માપનો સરવાળો 180° થાય છે તે ખૂણાઓને એકબીજાના ***પૂરક કોણ*** *(supplementary angles)* કહે છે.



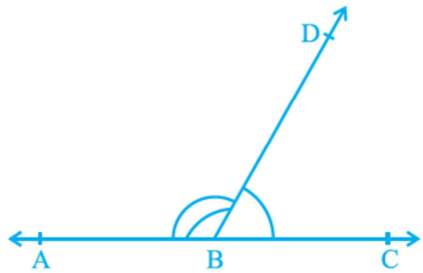
આકૃતિ 6.2 આસન્ન કોણ

અગાઉના ધોરણમાં તમે ***આસન્નકોણ*** *(adjacent angles)* વિશે શીખી ગયા છો. (જુઓ આકૃતિ 6.2.) જો બે ખૂણાઓનું શિરોબિંદુ એક જ હોય, એક ભુજ સામાન્ય હોય અને સામાન્ય ન હોય તેવા ભુજ એ સામાન્ય ભુજની જુદી જુદી બાજુએ હોય તેવા બે ખૂણાઓને આસન્નકોણ કહેવાય.

આકૃતિ 6.2 માં $\angle$ ABD અને $\angle$ DBC આસન્ન કોણ છે. કિરણ BD તેમનો સામાન્ય ભુજ છે. બિંદુ B એ સામાન્ય શિરોબિંદુ છે અને કિરણ BA અને કિરણ BC સામાન્ય ન હોય તેવા ભુજ છે. વળી જ્યારે બે ખૂણાઓ આસન્ન ખૂણાઓ હોય, ત્યારે તેમના માપનો સરવાળો હંમેશાં સામાન્ય ન હોય તેવા ભુજથી બનતા ખૂણાના માપ જેટલો હોય છે. તેથી, આપણે લખી શકીએ કે,

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$$

તમે એ પણ નોંધ લો કે $\angle$ ABC અને $\angle$ ABD આસન્ન ખૂણાઓ નથી. શા માટે ? કારણ કે તેમના સામાન્ય ન હોય તે ભુજ કિરણ BD અને કિરણ BC એ સામાન્ય ભુજ BA ની એક જ બાજુએ આવેલા છે.

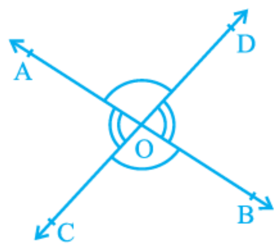


આકૃતિ 6.3 ખૂણાઓની રૈખિક જોડ

જો આકૃતિ 6.2 માં સામાન્ય ન હોય તેવા ભુજ BA અને BC એક રેખા બનાવે તો તેમની આકૃતિ 6.3 જેવી દેખાશે. ત્યારે $\angle$ ABD અને $\angle$ DBC એ ***ખૂણાઓની રૈખિક જોડ*** *(pair of linear angles)* કહેવાય છે.

તમે એ પણ જાણો છો કે બે રેખાઓ AB અને CD એ એકબીજાને પરસ્પર O બિંદુમાં છેદે તો ***અભિકોણો*** *(vertically oppositeangles)*ની બે જોડ બને છે (આકૃતિ 6.4). તેમાંથી એક જોડ $\angle$ AOD અને $\angle$ BOC છે.

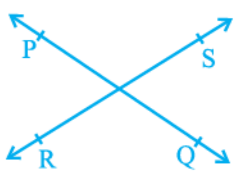
શું તમે બીજી જોડ શોધી શકશો ?



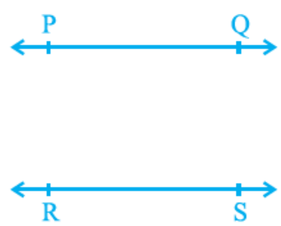
આકૃતિ 6.4 અભિકોણની જોડ

6.3 પરસ્પર છેદતી અને પરસ્પર ન છેદતી રેખાઓ

એક કાગળ પર બે ભિન્ન રેખાઓ PQ અને RS દોરો. તમે જોશો કે આ રેખાઓને બે પ્રકારે દોરી શકાય છે. તે આકૃતિ 6.5(i) અને આકૃતિ 6.5(ii) માં દર્શાવેલ છે.



(i) છેદતી રેખાઓ



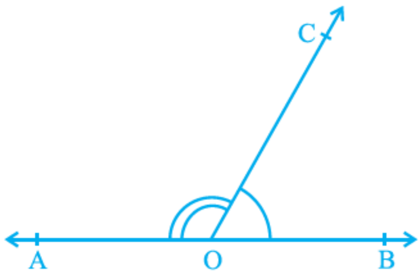
(ii) છેદતી ન હોય તેવી (સમાંતર) રેખાઓ

આકૃતિ 6.5 બે રેખાઓને દોરવાના ભિન્ન પ્રકાર

રેખાની એ કલ્પનાને પણ યાદ કરો કે તે બંને છેડેથી અનંત સુધી વિસ્તરેલ હોય છે. રેખાઓ PQ અને RS આકૃતિ 6.5(i)માં છેદતી રેખાઓ છે અને આકૃતિ 6.5(ii)માં બંને રેખાઓ સમાંતર છે. ધ્યાન રાખો કે આ બંને સમાંતર રેખાઓનાં ભિન્ન બિંદુઓ પર તેના સામાન્ય લંબની લંબાઈઓ સમાન રહેશે. આ સમાન લંબાઈ બંને સમાંતર ***રેખાઓની વચ્ચેનું અંતર*** *(distance between parallel lines)* કહેવાય છે.

6.4 ખૂણાઓની જોડ

વિભાગ 6.2 માં તમે ખૂણાઓની કેટલીક જોડ જેમકે કોટિકોણ, પૂરકકોણ, આસન્નકોણ, ખૂણાની રૈખિક જોડ વગેરેની વ્યાખ્યાઓ વિશે શીખી ગયાં છો. શું તમે આ ખૂણાઓ વચ્ચેના કોઈ સંબંધ વિશે વિચારી શકો છો ? હવે, કોઈ કિરણ કોઈ રેખાને છેદે તો બનતા ખૂણાઓના સંબંધ પર વિચાર કરીએ. આ પરિસ્થિતિ આકૃતિ 6.6 માં દર્શાવેલ છે. રેખાને AB અને કિરણને OC કહો. બિંદુ O પર બનતા ખૂણા કયા છે ? એ $\angle AOC$, $\angle BOC$ અને $\angle AOB$ છે.



આકૃતિ 6.6 ખૂણાઓની રૈખિક જોડ

શું આપણે $\angle AOC + \angle BOC = \angle AOB$ લખી શકીએ છીએ? હા! (શા માટે? વિભાગ 6.2 માં આપેલ આસન્ન ખૂણાઓ જુઓ.) (1)

$\angle AOB$ નું માપ શું છે ? તે 180° છે. (શા માટે?) (2)

શું (1) અને (2) પરથી તમે કહી શકો કે, $\angle AOC + \angle BOC = 180°$ છે? હા! (શા માટે?)

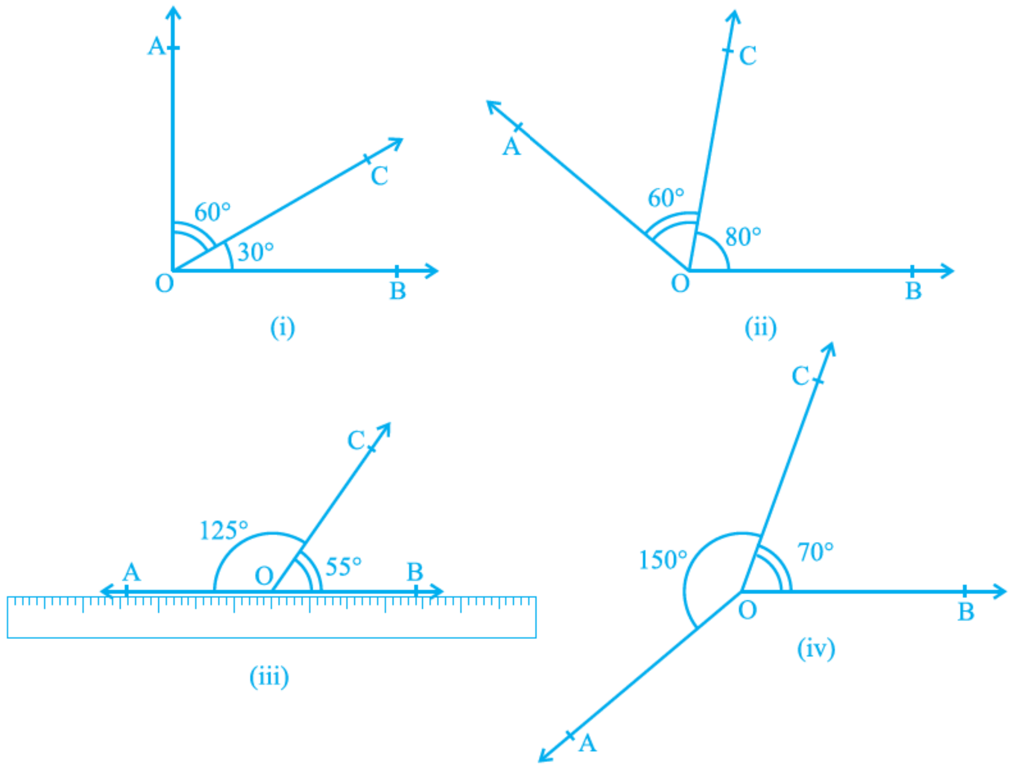
ઉપરની ચર્ચાના આધારે આપણે નીચેની પૂર્વધારણા લખી શકીએ છીએ :

પૂર્વધારણા 6.1 : *જે કિરણનું ઉદ્ભવબિંદુ રેખા પર હોય તેવા કિરણ અને રેખાથી બનતાં બંને ખૂણાઓનો સરવાળો 180° થાય છે.*

યાદ કરીએ કે જ્યારે બે આસન્નકોણોનો સરવાળો 180° થાય ત્યારે તે *ખૂણાઓની એક રૈખિક જોડ* બનાવે છે. પૂર્વધારણા 6.1 માં એ આપેલ છે કે એક કિરણ એક રેખાને છેદે છે. આ પરથી આપણે તારણ કાઢ્યું કે આ પ્રકારે બનેલા બંને આસન્ન ખૂણાઓનો સરવાળો 180° થાય છે. શું આપણે પૂર્વધારણા 6.1નું પ્રતીપ લખી શકીએ ? એટલે કે પૂર્વધારણા 6.1ના 'તારણ'ને પક્ષ છે તેમ માનીએ અને જે પક્ષ 'આપેલ છે' તેને તારણ માનીએ. આથી, તે નીચે પ્રમાણે બને છે :

(A) જો બે આસન્નકોણોનો સરવાળો 180° હોય, તો સામાન્ય કિરણ એક રેખા પર આવેલ છે.(અર્થાત્ અસામાન્ય બાજુઓ એક જ રેખામાં છે.)

હવે આપણે જોઈએ કે પૂર્વધારણા 6.1 અને વિધાન (A) એકબીજાથી વિરુધ્ધ છે. આપણે તેમાંના પ્રત્યેકને બીજાનું ***પ્રતીપ****(converse)* કહીશું. આપણે એ નથી જાણતા કે વિધાન (A) સત્ય છે કે નહિ. ચાલો તેની તપાસ કરીએ. આકૃતિ 6.7માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે જુદાં જુદાં માપના આસન્નકોણ દોરો. દરેક વિકલ્પમાં અસામાન્ય બાજુઓ પૈકી કોઈપણ એક તરફ સીધી પટ્ટી રાખો. શું બીજી અસામાન્ય બાજુ માપપટ્ટીની તરફ રહેશે?



આકૃતિ 6.7 જુદાં જુદાં માપના આસન્નકોણો

તમે જોશો કે માત્ર આકૃતિ 6.7 (iii) માં જ બંને સામાન્ય બાજુઓ સીધી પટ્ટીની સામે છે, એટલે કે A, O અને B એક જ રેખા પર આવેલાં છે અને કિરણ OC આ રેખા પર આવેલ છે. સાથે એ પણ જુઓ કે $\angle AOC + \angle COB = 125° + 55° = 180°$ છે. આ પરથી તમે તારણ કાઢી શકો કે વિધાન (A) સત્ય છે. આથી, તમે તેને પૂર્વધારણા રૂપે નીચે પ્રમાણે લખી શકો છો :

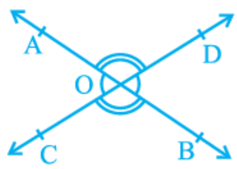
પૂર્વધારણા 6.2 : *જો બે આસન્નકોણોનો સરવાળો 180° હોય, તો તેની સામાન્ય ન હોય તેવી બાજુઓ એક રેખા બનાવે છે.*

સ્પષ્ટ કારણોસર, ઉપરની બંને પૂર્વધારણાઓ એકત્રિત કરતાં તેમને સંયુક્ત રૂપે *રૈખિક જોડની પૂર્વધારણા* કહે છે.

આવો હવે જ્યારે બે રેખાઓ છેદતી હોય એવી પરિસ્થિતિ ચકાસીએ.

અગાઉના ધોરણમાંથી તમને યાદ હશે કે બે રેખાઓ પરસ્પર છેદતી હોય તો અભિકોણ સમાન હોય છે. ચાલો તે પરિણામને સાબિત કરીએ. સાબિતીમાં રહેલ સોપાન માટે પરિશિષ્ટ 1 જુઓ અને નીચે આપેલ સાબિતીને સમજતી વખતે તેમને ધ્યાનમાં રાખો :

પ્રમેય 6.1 : *પરસ્પર છેદતી બે રેખાથી બનતા અભિકોણ સમાન હોય છે.*



આકૃતિ 6.8 અભિકોણ

સાબિતી : ઉપરના વિધાનમાં એ આપેલ છે કે બે રેખાઓ પરસ્પર છેદે છે. આથી માનો કે બે રેખાઓ AB અને CD પરસ્પર O બિંદુમાં છેદે છે તે આકૃતિ 6.8 માં દર્શાવેલ છે. આનાથી આપણને અભિકોણની નીચેની બે જોડીઓ મળે છે :

(i) $\angle AOC$ અને $\angle BOD$ (ii) $\angle AOD$ અને $\angle BOC$.

આપણે સાબિત કરવું છે કે $\angle AOC = \angle BOD$ અને $\angle AOD = \angle BOC$ છે.

હવે, કિરણ OA રેખા CD પર આવેલ છે.

આથી, $\angle AOC + \angle AOD = 180°$ (રૈખિક જોડની પૂર્વધારણા) (1)

શું આપણે $\angle AOD + \angle BOD = 180°$ સાબિત કરી શકીશું ? હા ! (કેમ ?) (2)

(1) અને (2) પરથી આપણે લખી શકીએ કે,

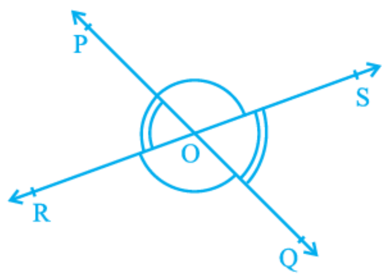
$$\angle AOC + \angle AOD = \angle AOD + \angle BOD$$

આના પરથી તારણ મળે છે કે $\angle AOC = \angle BOD$ (વિભાગ 5.2, પૂર્વધારણા 3 જુઓ.)

તે જ રીતે આપણે સાબિત કરી શકીએ કે $\angle AOD = \angle BOC$

આવો, હવે રૈખિક જોડની પૂર્વધારણા અને પ્રમેય 6.1 પર આધારિત કેટલાંક ઉદાહરણ ઉકેલીએ.

ઉદાહરણ 1 : આકૃતિ 6.9 માં રેખા PQ અને રેખા RS એકબીજાને બિંદુ O માં છેદે છે. જો $\angle POR : \angle ROQ = 5 : 7$ હોય, તો તમામ ખૂણાઓ શોધો.



આકૃતિ 6.9

ઉકેલ : $\angle POR + \angle ROQ = 180°$ (ખૂણાની રૈખિક જોડ)

પરંતુ $\angle POR : \angle ROQ = 5 : 7$ (પક્ષ)

તેથી $\angle POR = \frac{5}{12} \times 180° = 75°$

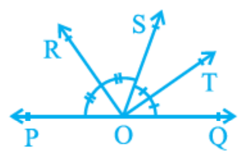
તે જ રીતે, $\angle ROQ = \frac{7}{12} \times 180° = 105°$

હવે, $\angle POS = \angle ROQ = 105°$ (અભિકોણ)

અને $\angle SOQ = \angle POR = 75°$ (અભિકોણ)

ઉદાહરણ 2 : આકૃતિ 6.10 માં, કિરણ OS રેખા POQ પર છે. કિરણ OR અને કિરણ OT એ અનુક્રમે $\angle POS$ અને $\angle SOQ$ ના કોણદ્વિભાજક છે. જો $\angle POS = x$, તો $\angle ROT$ શોધો.

ઉકેલ : કિરણ OS રેખા POQ પર છે.



આકૃતિ 6.10

તેથી, $\angle POS + \angle SOQ = 180°$

પરંતુ, $\angle POS = x$

તેથી, $x + \angle SOQ = 180°$

માટે, $\angle SOQ = 180° - x$

હવે કિરણ OR એ $\angle POS$ નો દ્વિભાજક છે. તેથી,

$$\angle ROS = \frac{1}{2} \times \angle POS$$

$$= \frac{1}{2} \times x = \frac{x}{2}$$

તે જ રીતે $\angle \text{SOT} = \frac{1}{2} \times \angle \text{SOQ}$

$= \frac{1}{2} \times (180° - x)$

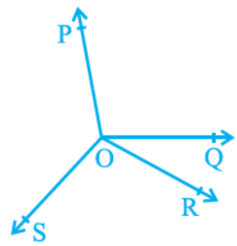
$= 90° - \frac{x}{2}$

હવે, $\angle \text{ROT} = \angle \text{ROS} + \angle \text{SOT}$

$= \frac{x}{2} + 90° - \frac{x}{2}$

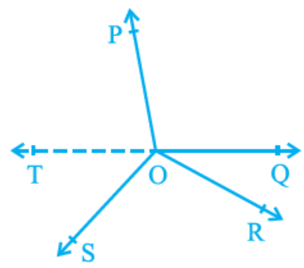
$= 90°$

ઉદાહરણ 3 : આકૃતિ 6.11માં OP, OQ, OR અને OS ચાર કિરણ છે. તો સાબિત કરો કે $\angle \text{POQ} + \angle \text{QOR} + \angle \text{SOR} + \angle \text{POS} = 360°$.



આકૃતિ 6.11

ઉકેલ : આકૃતિ 6.11 માં તમારે કિરણ OP, OQ, OR અથવા OS ના પાછળના બિંદુ તરફ કિરણ દોરવું જરૂરી છે. ચાલો કિરણ OQ ને પાછળના બિંદુ T તરફ લંબાવીએ. તેથી TOQ રેખા છે. (જુઓ આકૃતિ 6.12.)



આકૃતિ 6.12

હવે કિરણ OP રેખા TOQ પર છે.

તેથી, $\angle \text{TOP} + \angle \text{POQ} = 180°$ (રૈખિક જોડની પૂર્વધારણા) (1)

તે જ રીતે કિરણ OS એ રેખા TOQ પર છે.

તેથી, $\angle \text{TOS} + \angle \text{SOQ} = 180°$ (2)

પણ $\angle \text{SOQ} = \angle \text{SOR} + \angle \text{QOR}$

તેથી, (2) પરથી

$\angle \text{TOS} + \angle \text{SOR} + \angle \text{QOR} = 180°$ બનશે. (3)

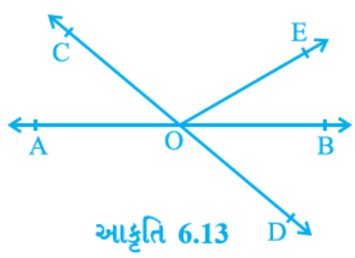
હવે (1) અને (3) નો સરવાળો કરતાં, આપણને નીચેનું પરિણામ મળશે.

$\angle \text{TOP} + \angle \text{POQ} + \angle \text{TOS} + \angle \text{SOR} + \angle \text{QOR} = 360°$ (4)

પરંતુ $\angle \text{TOP} + \angle \text{TOS} = \angle \text{POS}$

તેથી (4) $\angle \text{POQ} + \angle \text{QOR} + \angle \text{SOR} + \angle \text{POS} = 360°$ મળશે.

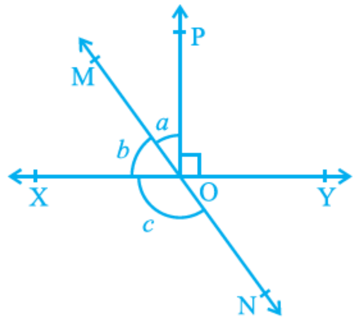
સ્વાધ્યાય 6.1



આકૃતિ 6.13

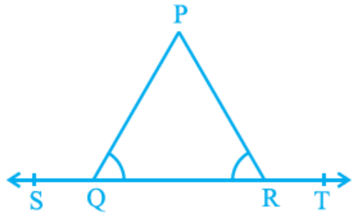
1. આકૃતિ 6.13માં રેખા AB અને CD, O માં છેદે છે. જો $\angle \text{AOC} + \angle \text{BOE} = 70°$ અને $\angle \text{BOD} = 40°$, તો $\angle \text{BOE}$ અને વિપરીત $\angle \text{COE}$ મેળવો.

2. આકૃતિ 6.14 માં, રેખા XY અને MN, O માં છેદે છે. જો $\angle POY = 90°$ અને $a : b = 2 : 3$, તો c શોધો.



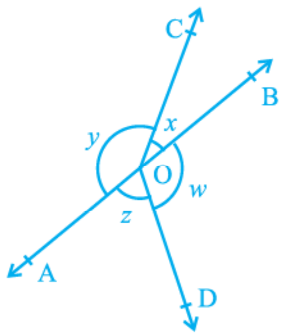
આકૃતિ 6.14

3. આકૃતિ 6.15 માં, $\angle PQR = \angle PRQ$, તો સાબિત કરો કે $\angle PQS = \angle PRT$.



આકૃતિ 6.15

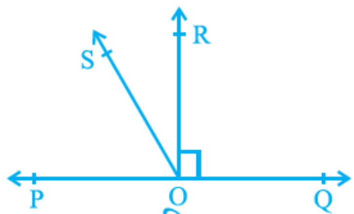
4. આકૃતિ 6.16 માં, જો $x + y = w + z$ હોય, તો સાબિત કરો કે AOB રેખા છે.



આકૃતિ 6.16

5. આકૃતિ 6.17 માં POQ રેખા છે. કિરણ OR રેખા PQ ને લંબ છે. કિરણ OP અને OR વચ્ચે અન્ય એક કિરણ OS આવેલ છે. સાબિત કરો કે,

$\angle ROS = \frac{1}{2} (\angle QOS - \angle POS)$.

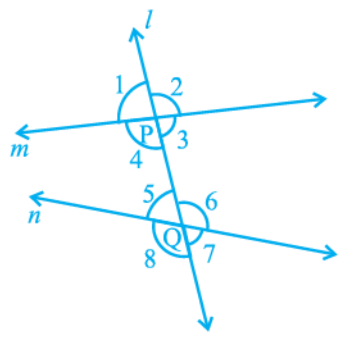


આકૃતિ 6.17

6. $\angle XYZ = 64°$ આપેલ છે અને XY ને બિંદુ P સુધી લંબાવેલ છે. આપેલ સૂચના પરથી આકૃતિ દોરો. જો કિરણ YQ, $\angle ZYP$ નો દ્વિભાજક હોય, તો $\angle XYQ$ અને વિપરીત $\angle QYP$ નું માપ શોધો.

6.5 સમાંતર રેખાઓ અને છેદિકા

યાદ કરીએ કે જો કોઈ રેખા બે અથવા બેથી વધુ રેખાઓને ભિન્ન બિંદુઓમાં છેદે, તો તેને આ રેખાઓની *છેદિકા* કહે છે. (જુઓ આકૃતિ 6.18.) રેખા l એ રેખાઓ m અને n ને અનુક્રમે P અને Q માં છેદે છે. તેથી, રેખા l એ રેખા m અને n ની છેદિકા છે. તમે જોશો કે પ્રત્યેક બિંદુ P અને બિંદુ Q આગળ ચાર ખૂણાઓનું નિર્માણ થાય છે.



આકૃતિ 6.18

ચાલો આ ખૂણાઓને $\angle 1, \angle 2, \ldots, \angle 8$ નામ આપીએ. (જુઓ આકૃતિ 6.18.)

$\angle 1, \angle 2, \angle 7$ અને $\angle 8$ ને ***બહિષ્કોણો*** *(exterior angle)* કહે છે. જ્યારે $\angle 3, \angle 4, \angle 5$ અને $\angle 6$ ને ***અંતઃકોણો*** *(interior angle)* કહે છે.

યાદ કરો કે આગળના ધોરણમાં તમે જ્યારે છેદિકા બે રેખાઓને છેદે ત્યારે બનતી ખૂણાઓની કેટલીક જોડને નામ આપ્યા હતાં. તે નીચે પ્રમાણે છે :

(a) ***અનુકોણ*** (*corresponding angles*) :

(i) $\angle 1$ અને $\angle 5$ (ii) $\angle 2$ અને $\angle 6$

(iii) $\angle 4$ અને $\angle 8$ (iv) $\angle 3$ અને $\angle 7$

(b) ***અંતઃયુગ્મકોણ*** (*alternate interior angles*) :

(i) $\angle 4$ અને $\angle 6$ (ii) $\angle 3$ અને $\angle 5$

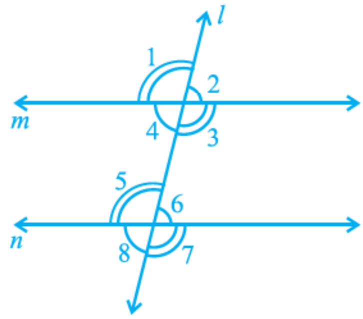
(c) ***બહિર્યુગ્મકોણ*** (*alternate exterior angles*) :

(i) $\angle 1$ અને $\angle 7$ (ii) $\angle 2$ અને $\angle 8$

(d) ***છેદિકાની એક તરફના અંતઃકોણ*** (*interior angles on the same side of transversal*) :

(i) $\angle 4$ અને $\angle 5$ (ii) $\angle 3$ અને $\angle 6$

છેદિકાની એક તરફના અંતઃકોણને ***અનુક્રમિક અંતઃખૂણા*** (*consecutive interior angles*) તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે. તેને ***સંબંધિત કોણ*** અથવા ***સહઆંતરિક ખૂણા*** પણ કહે છે. વધુમાં ઘણી વખત આપણે અંતઃયુગ્મકોણને માટે યુગ્મકોણ શબ્દ પણ વાપરીએ છીએ.



આકૃતિ 6.19

ચાલો, હવે રેખા m અને n સમાંતર હોય ત્યારે આપણે આ ખૂણાઓની જોડ વચ્ચેના સંબંધ શોધીએ. તમે જાણો છો કે તમારી નોટબુકમાં વપરાયેલી સીધી રેખાઓ એક બીજીને સમાંતર હોય છે. તેથી માપપટ્ટી અને પેન્સિલની મદદથી બે સમાંતર રેખાઓ દોરો તેમજ આકૃતિ 6.19 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે તેમને છેદતી છેદિકા દોરો.

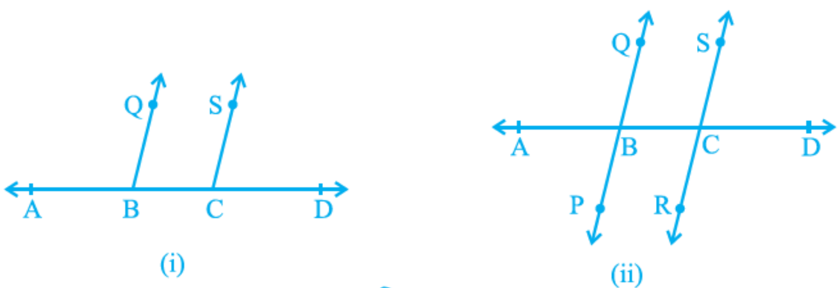
હવે અનુકોણોની કોઈ એક જોડના ખૂણાને માપો અને તેમની વચ્ચેનો સંબંધ તપાસો. તમને : $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 4 = \angle 8$ અને $\angle 3 = \angle 7$ મળશે. આ પરથી તમે નીચેની પૂર્વધારણા સ્વીકારી શકો :

પૂર્વધારણા 6.3 : *જો એક છેદિકા બે સમાંતર રેખાઓને છેદે તો, અનુકોણની પ્રત્યેક જોડ સમાન હોય છે.*

પૂર્વધારણા 6.3 ને ***અનુકોણ પૂર્વધારણા*** પણ કહેવામાં આવે છે. આવો, હવે આ પૂર્વધારણાના પ્રતીપની ચર્ચા કરીએ. તે નીચે પ્રમાણે થશે :

જો એક છેદિકા બે રેખાઓને એવી રીતે છેદે કે અનુકોણની એક જોડ સમાન હોય, તો બંને રેખાઓ સમાંતર હોય છે.

શું આ વિધાન સત્ય છે ? તેની ચકાસણી નીચે પ્રમાણે કરી શકાય છે. એક રેખા AD દોરો અને તેનાં પર બે બિંદુઓ B અને C લો. B અને C, પર ક્રમશઃ સમાન $\angle ABQ$ અને $\angle BCS$ ની રચના કરો. તે આકૃતિ 6.20 (i) માં બતાવેલ છે.

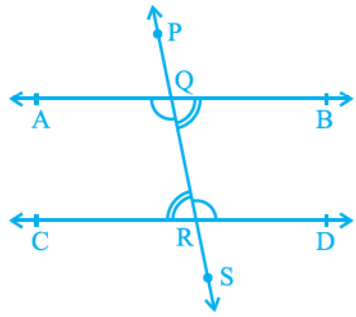


આકૃતિ 6.20

QB અને SC ને AD ની બીજી બાજુ લંબાવીને રેખાઓ PQ અને RS મેળવો. આકૃતિ 6.20 (ii) માં આ દર્શાવેલ છે. તમે જોઈ શકો છો કે આ રેખાઓ પરસ્પર છેદતી નથી. તમે બંને રેખાઓ PQ અને RS ના જુદાં જુદાં બિંદુઓ પર સામાન્ય લંબ દોરો અને તેની લંબાઈ માપીને જોઈ શકો છો કે આ લંબાઈ દરેક સ્થળે સમાન છે. આથી તમે તારણ કાઢી શકો કે આ રેખાઓ સમાંતર છે. એટલે કે અનુકોણ પૂર્વધારણાનું પ્રતીપ પણ સાચું છે. આ રીતે આપણને નીચેની પૂર્વધારણા મળે છે :

પૂર્વધારણા 6.4 : *જો એક છેદિકા બે રેખાઓને એ રીતે છેદે કે અનુકોણની એક જોડ સમાન હોય, તો બંને રેખાઓ પરસ્પર સમાંતર હોય છે.*

શું આપણે એક છેદિકા દ્વારા બે સમાંતર રેખાઓને છેદવાથી બનતા અંતઃ યુગ્મકોણો વચ્ચેનો કોઈ સંબંધ જાણવા માટે અનુકોણ પૂર્વધારણાનો ઉપયોગ કરી શકીએ ? આકૃતિ 6.21 માં છેદિકા PS સમાંતર રેખાઓ AB અને CD ને અનુક્રમે બિંદુ Q અને R માં છેદે છે.



આકૃતિ 6.21

શું $\angle BQR = \angle QRC$ અને $\angle AQR = \angle QRD$ કહી શકાય ?

તમે જાણો છો કે $\angle PQA = \angle QRC$ (અનુકોણ પૂર્વધારણા)(1)

શું $\angle PQA = \angle BQR$? હા ! (શા માટે ?) (2)

આમ, (1) અને (2) પરથી આપણે તારણ કાઢી શકીએ કે,

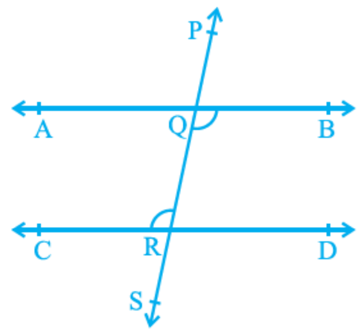
$$\angle BQR = \angle QRC.$$

આ જ રીતે $\angle AQR = \angle QRD$.

ઉપરના પરિણામને એક પ્રમેયના રૂપમાં નીચે પ્રમાણે લખી શકાય છે :

પ્રમેય 6.2 : *જો એક છેદિકા બે સમાંતર રેખાઓને છેદે તો, અંતઃ યુગ્મકોણની પ્રત્યેક જોડ સમાન હોય છે.*

હવે અનુકોણ પૂર્વધારણાના પ્રતીપનો ઉપયોગ કરીને શું આપણે કહી શકીએ કે અંતઃ યુગ્મકોણોની એક જોડ સમાન હોવાને કારણે બંને રેખાઓ સમાંતર છે ? આકૃતિ 6.22 માં છેદિકા PS રેખાઓ AB અને CD ને અનુક્રમે બિંદુઓ Q અને R માં એ રીતે છેદે છે કે $\angle BQR = \angle QRC$.



આકૃતિ 6.22

શું $AB \parallel CD$ છે ?

$\angle BQR = \angle PQA$ (કેમ ?) (1)

પરંતુ, $\angle BQR = \angle QRC$ (આપેલ છે) (2)

આથી, (1) અને (2) પરથી તમે તારણ કાઢી શકો કે

$\angle PQA = \angle QRC$

પરંતુ આ તો અનુકોણ છે.

આથી $AB \parallel CD$ (અનુકોણ પૂર્વધારણાનું પ્રતીપ)

આ વિધાનને એક પ્રમેયના રૂપમાં નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય છે :

પ્રમેય 6.3 : *જો એક છેદિકા બે રેખાઓને એવી રીતે છેદે કે અંતઃ યુગ્મકોણોની એક જોડ સમાન હોય, તો બંને રેખાઓ પરસ્પર સમાંતર હોય છે.*

આ જ રીતે, તમે છેદિકાની એક જ બાજુના અંતઃ કોણોને સંબંધિત બે પ્રમેયો નીચે પ્રમાણે મેળવી શકો :

પ્રમેય 6.4 : *એક છેદિકા બે સમાંતર રેખાઓને છેદે તો છેદિકાની એક જ તરફના અંતઃકોણોની પ્રત્યેક જોડ પૂરક હોય છે.*

પ્રમેય 6.5 : *જો એક છેદિકા બે રેખાઓને એવી રીતે છેદે કે છેદિકાની એક જ તરફના અંતઃકોણોની એક જોડ પૂરક હોય, તો બંને રેખાઓ પરસ્પર સમાંતર હોય છે.*

તમને યાદ હશે કે આ પ્રત્યેક પૂર્વધારણા અને પ્રમેયોની ચકાસણી અગાઉના ધોરણમાં તમે કેટલીક પ્રવૃત્તિઓ દ્વારા કરી ગયાં છો. તમે આ પ્રવૃત્તિઓનું પુનરાવર્તન અહીં પણ કરી શકો છો.

6.6 એક જ રેખાને સમાંતર રેખાઓ

જો બે રેખાઓ એક જ રેખાને સમાંતર હોય તો શું એ પરસ્પર સમાંતર હશે ? ચાલો તેનું પરીક્ષણ કરીએ. આકૃતિ 6.23 જુઓ. તેમાં $m \parallel l$ છે અને $n \parallel l$ છે. ચાલો રેખા l, m અને n માટે એક છેદિકા t દોરો.

એ આપેલ છે કે $m \parallel l$ છે અને $n \parallel l$ છે.

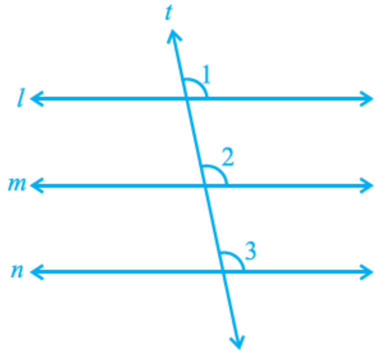
આથી, $\angle 1 = \angle 2$ અને $\angle 1 = \angle 3$ (અનુકોણ પૂર્વધારણા)

આમ, $\angle 2 = \angle 3$ (શા માટે ?)

પરંતુ $\angle 2$ અને $\angle 3$ અનુકોણ છે અને સમાન છે.

આથી તમે કહી શકો કે રેખા $m \parallel$ રેખા n (અનુકોણ પૂર્વધારણાનું પ્રતીપ)

આ પરિણામને એક પ્રમેયના રૂપમાં નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :

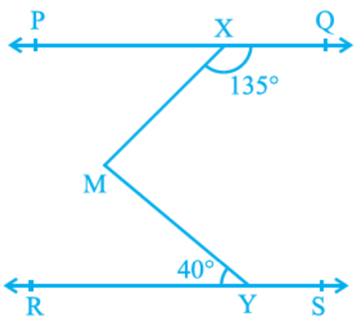


આકૃતિ 6.23

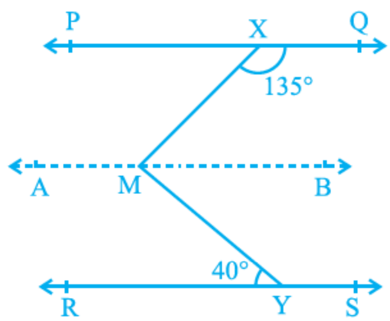
પ્રમેય 6.6 : *જે રેખાઓ એક જ રેખાને સમાંતર હોય તે પરસ્પર સમાંતર હોય છે.*

નોંધ : ઉપરના ગુણધર્મને બેથી વધુ રેખાઓ માટે પણ વ્યાપક બનાવી શકાય છે. ચાલો, હવે સમાંતર રેખાઓને સંબંધિત કેટલાક પ્રશ્નો ઉકેલીએ.

ઉદાહરણ 4 : આકૃતિ 6.24 માં જો PQ $\parallel$ RS, $\angle$ MXQ = 135° અને $\angle$ MYR = 40°, છે તો $\angle$ XMY મેળવો.



આકૃતિ 6.24



આકૃતિ 6.25

ઉકેલ : આકૃતિ 6.25 માં બતાવ્યા મુજબ અહીં આપણે M માંથી પસાર થતી અને રેખા PQ ને સમાંતર એક રેખા AB દોરીએ. હવે, AB $\parallel$ PQ અને PQ $\parallel$ RS છે.

આથી, AB $\parallel$ RS (કેમ ?)

હવે, $\angle$ QXM + $\angle$ XMB = 180° (AB $\parallel$ PQ, છેદિકા XM ની એક જ બાજુના અંતઃકોણ)

પરંતુ $\angle$ QXM = 135°

આથી, $135° + \angle XMB = 180°$

આમ, $\angle XMB = 45°$ (1)

હવે, $\angle BMY = \angle MYR$ (AB || RS, યુગ્મકોણ)

આથી $\angle BMY = 40°$ (2)

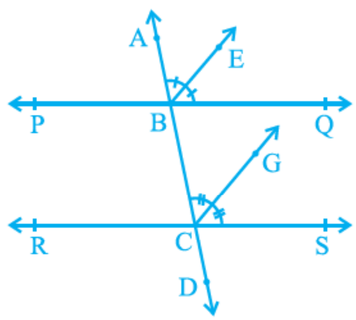
(1) અને (2) નો સરવાળો કરતાં,

$\angle XMB + \angle BMY = 45° + 40°$ મળે.

આથી, $\angle XMY = 85°$

ઉદાહરણ 5 : જો એક છેદિકા બે રેખાઓને એ રીતે છેદે કે અનુકોણની એક જોડના દ્વિભાજક પરસ્પર સમાંતર હોય તો સાબિત કરો કે બંને રેખાઓ પણ પરસ્પર સમાંતર હોય છે.

ઉકેલ : આકૃતિ 6.26 માં એક છેદિકા AD એ રેખાઓ PQ અને RS ને અનુક્રમે બિંદુઓ B અને C માં છેદે છે. કિરણ BE એ $\angle ABQ$નો દ્વિભાજક છે અને કિરણ CG એ $\angle BCS$ નો દ્વિભાજક છે તથા BE || CG છે.



આકૃતિ 6.26

આપણે સાબિત કરવું છે કે PQ || RS છે.

આપેલ છે કે કિરણ BE એ $\angle ABQ$ નો દ્વિભાજક છે.

આથી, $\angle ABE = \frac{1}{2} \angle ABQ$ (1)

આ જ પ્રમાણે કિરણ CG એ $\angle BCS$ નો દ્વિભાજક છે.

આથી, $\angle BCG = \frac{1}{2} \angle BCS$ (2)

પરંતુ BE || CG છે અને AD જ તેમની છેદિકા છે.

આથી, $\angle ABE = \angle BCG$ (અનુકોણ પૂર્વધારણા) (3)

(3) માં (1) અને (2) ની કિંમત મૂકતાં

આપણને આ પરિણામ પ્રાપ્ત થશે.

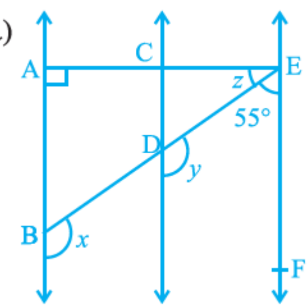
$$\frac{1}{2} \angle ABQ = \frac{1}{2} \angle BCS$$

આથી, $\angle ABQ = \angle BCS$

પરંતુ આ છેદિકા AD દ્વારા રેખાઓ PQ અને RS સાથે બનતા અનુકોણ છે અને તે સમાન છે.

આથી, PQ || RS (અનુકોણ પૂર્વધારણાનું પ્રતીપ)

ઉદાહરણ 6 : આકૃતિ 6.27 માં AB || CD અને CD || EF અને $EA \perp AB$ છે. જો $\angle BEF = 55°$ હોય, તો x, y અને z નાં મૂલ્ય શોધો.



આકૃતિ 6.27

ઉકેલ : $y + 55° = 180°$ (છેદિકા ED ની એક જ બાજુના અંતઃકોણ)

આથી, $y = 180° - 55° = 125°$

વળી $x = y$ (AB || CD, અનુકોણ પૂર્વધારણા)

માટે $x = 125^\circ$

આથી હવે, AB || CD અને CD || EF છે તેથી AB || EF થાય.

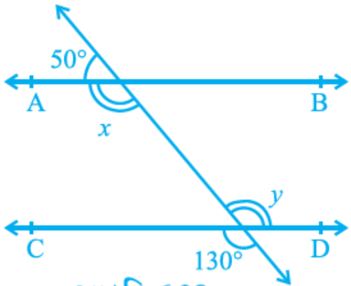
આથી, $\angle EAB + \angle FEA = 180^\circ$ (છેદિકા EA ની એક જ તરફના અંતઃકોણ)

$\therefore 90^\circ + z + 55^\circ = 180^\circ$

$\therefore z = 35^\circ$

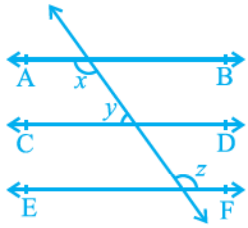
સ્વાધ્યાય 6.2

1. આકૃતિ 6.28 માં x અને y નાં મૂલ્ય શોધો અને બતાવો કે AB || CD છે.



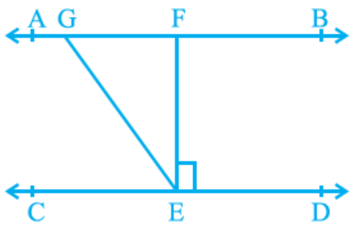
આકૃતિ 6.28

2. આકૃતિ 6.29, માં જો AB || CD, CD || EF અને $y : z = 3 : 7$, છે તો x નું મૂલ્ય શોધો.



આકૃતિ 6.29

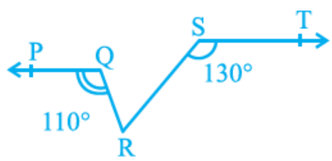
3. આકૃતિ 6.30, માં જો AB || CD, EF ⊥ CD અને $\angle GED = 126^\circ$ છે, તો $\angle AGE$, $\angle GEF$ અને $\angle FGE$ મેળવો.



આકૃતિ 6.30

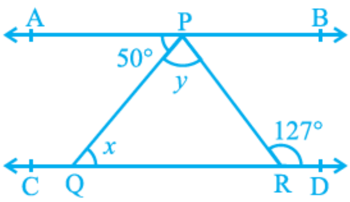
4. આકૃતિ 6.31માં જો PQ || ST, $\angle PQR = 110^\circ$ અને $\angle RST = 130^\circ$, તો $\angle QRS$ મેળવો.

[**સૂચન :** બિંદુ R માંથી પસાર થતી ST ને સમાંતર એક રેખા દોરો.]



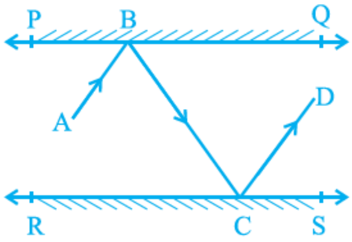
આકૃતિ 6.31

5. આકૃતિ 6.32માં જો AB || CD, $\angle APQ = 50^\circ$ અને $\angle PRD = 127^\circ$ છે તો x અને y મેળવો.



આકૃતિ 6.32

6. આકૃતિ 6.33 માં PQ અને RS બે અરીસા છે. તે બંને એકબીજાને સમાંતર રાખેલા છે. એક આપાતકિરણ AB અરીસા PQ ને B પર અથડાય છે અને પરાવર્તિત કિરણ માર્ગ BC પર ચાલીને અરીસા RS ને C પર અથડાય છે તથા ફરી કિરણ CD પર પરાવર્તિત થઈ જાય છે. સાબિત કરો કે AB || CD છે.



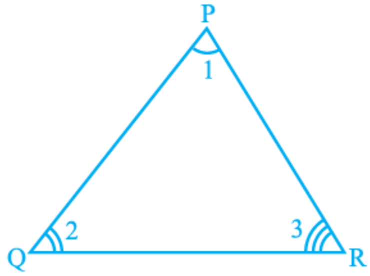
આકૃતિ 6.33

6.7 ત્રિકોણના ખૂણાઓના સરવાળાનો ગુણધર્મ

અગાઉના ધોરણમાં તમે પ્રવૃત્તિઓ દ્વારા એ શીખી ગયાં છો કે ત્રિકોણના બધા જ ખૂણાઓનો સરવાળો 180° થાય છે. આપણે આ વિધાનને રેખાઓ સંબંધિત પૂર્વધારણાઓ અને પ્રમેયોનો ઉપયોગ કરીને સાબિત કરી શકીએ.

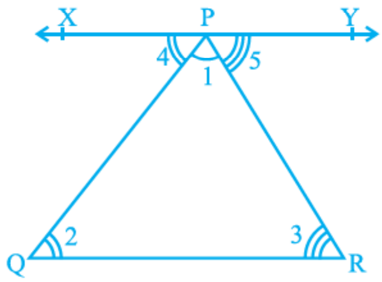
પ્રમેય 6.7 : *ત્રિકોણના ત્રણેય ખૂણાઓનો સરવાળો 180° થાય છે.*

સાબિતી : ચાલો જોઈએ કે આપણને ઉપરના વિધાનમાં શું આપેલ છે. અર્થાત્ આપણી પરિકલ્પના શું છે અને આપણે શું સાબિત કરવું છે. આપણને એક ત્રિકોણ PQR આપેલ છે તથા $\angle 1$, $\angle 2$ અને $\angle 3$ આ ત્રિકોણના ખૂણા છે. (જુઓ આકૃતિ 6.34.)



આકૃતિ 6.34

આપણે $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$ સાબિત કરવું છે. બાજુ QR ને સમાંતર,ત્રિકોણના શિરોબિંદુ P માંથી પસાર થતી એક રેખા XPY દોરો. તે આકૃતિ 6.35 દર્શાવેલ છે. આથી આપણે સમાંતર રેખાઓને સંબંધિત ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરી શકીશું.



આકૃતિ 6.35

હવે, XPY એક રેખા છે.

આથી, $\angle 4 + \angle 1 + \angle 5 = 180°$ છે (1)

પરંતુ XPY || QR તથા PQ, PR છેદિકાઓ છે.

આથી, $\angle 4 = \angle 2$ અને $\angle 5 = \angle 3$ (યુગ્મકોણની જોડ)

$\angle 4$ અને $\angle 5$ ની કિંમત (1)માં મૂકતાં,

$$\angle 2 + \angle 1 + \angle 3 = 180°$$

એટલે કે, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$ ■

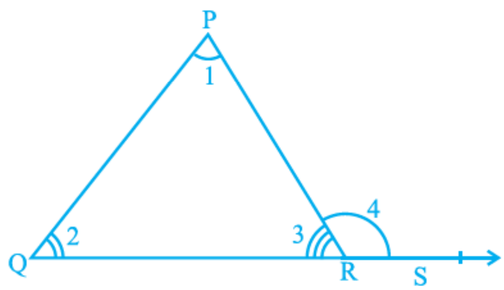
યાદ કરો કે તમે આગળના ધોરણમાં ત્રિકોણના બહિષ્કોણ વિશે અભ્યાસ કર્યો છે. (જુઓ આકૃતિ 6.36.) બાજુ QR ને બિંદુ S સુધી લંબાવેલ છે. $\angle$ PRS ત્રિકોણ ΔPQR નો એક બહિષ્કોણ છે.

શું $\angle 3 + \angle 4 = 180°$ છે ? (શા માટે ?) (1)

આપણે એ પણ જાણીએ છીએ કે,

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$ છે. (શા માટે ?) (2)

(1) અને (2) પરથી, તમે જોઈ શકો છો કે, $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$ છે.



આકૃતિ 6.36

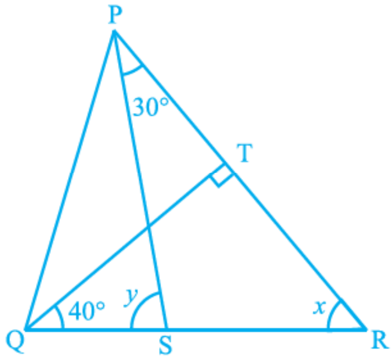
આ પરિણામને એક પ્રમેયના રૂપમાં નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકાય છે :

પ્રમેય 6.8 : *જો ત્રિકોણની એક બાજુને લંબાવવામાં આવે, તો આ પ્રકારે બનેલ બહિષ્કોણ બંને* ***અંતઃસંમુખકોણ*** *(Interior opposite angles)ના સરવાળાને સમાન થાય છે.*

ઉપરના પ્રમેયથી આ સ્પષ્ટ છે કે કોઈપણ ત્રિકોણનો એક બહિષ્કોણ તેના બંને અંતઃસંમુખકોણ કરતાં મોટો હોય છે.

આવો આ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને કેટલાંક ઉદાહરણો ઉકેલીએ.

ઉદાહરણ 7 : આકૃતિ 6.37માં જો $QT \perp PR$, $\angle TQR = 40°$ અને $\angle SPR = 30°$ હોય, તો x અને y મેળવો.



આકૃતિ 6.37

ઉકેલ : Δ TQR માં $90° + 40° + x = 180°$ (ત્રિકોણના ખૂણાના સરવાળાનો ગુણધર્મ)

આથી, $x = 50°$

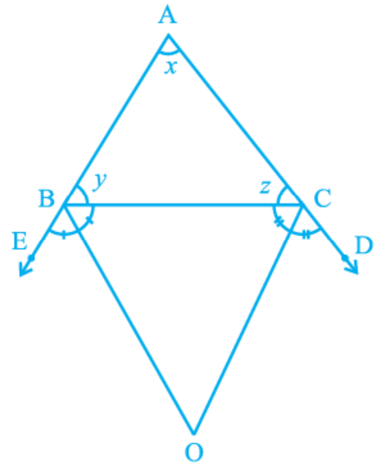
હવે, $y = \angle SPR + x$ (પ્રમેય 6.8)

આથી, $y = 30° + 50°$

$= 80°$

ઉદાહરણ 8 : આકૃતિ 6.38 માં ΔABC ની બાજુઓ AB અને AC ને અનુક્રમે E અને D સુધી લંબાવેલ છે.

જો $\angle CBE$ અને $\angle BCD$ ના દ્વિભાજક BO અને CO અનુક્રમે બિંદુ O માં છેદે, તો સાબિત કરો કે $\angle BOC = 90° - \frac{1}{2} \angle BAC$ છે.



આકૃતિ 6.38

ઉકેલ : કિરણ BO એ $\angle CBE$ નો દ્વિભાજક છે.

આથી, $\angle CBO = \frac{1}{2} \angle CBE$

$= \frac{1}{2} (180° - y)$

$= 90° - \frac{y}{2}$ (1)

આ જ રીતે, કિરણ CO એ $\angle BCD$ નો દ્વિભાજક છે.

આથી, $\angle BCO = \frac{1}{2} \angle BCD$

$= \frac{1}{2} (180° - z)$

$= 90° - \frac{z}{2}$ (2)

Δ BOC માં $\angle BOC + \angle BCO + \angle CBO = 180°$ છે. (3)

(1) અને (2) ને (3) માં મૂકતાં આપણને,

$\angle BOC + 90° - \frac{z}{2} + 90° - \frac{y}{2} = 180°$ મળે.

$\therefore \angle BOC = \frac{z}{2} + \frac{y}{2}$

$\therefore \angle BOC = \frac{1}{2} (y + z)$ (4)

$$\text{પરંતુ } x + y + z = 180° \qquad \text{(ત્રિકોણના ખૂણાના સરવાળાનો ગુણધર્મ)}$$

$$\text{આથી, } y + z = 180° - x$$

આ પરથી (4) નું પરિવર્તન નીચે પ્રમાણે થાય.

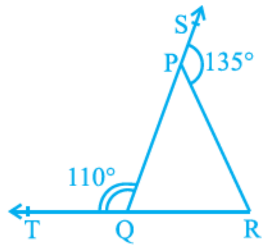
$$\angle \text{BOC} = \frac{1}{2}(180° - x)$$

$$= 90° - \frac{x}{2}$$

$$= 90° - \frac{1}{2}\angle \text{BAC}$$

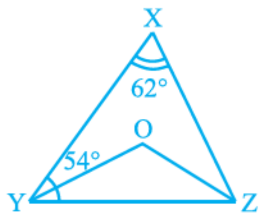
સ્વાધ્યાય 6.3

1. આકૃતિ 6.39માં Δ PQR ની બાજુઓ QP અને RQ ને અનુક્રમે બિંદુઓ S અને T સુધી લંબાવેલ છે. જો $\angle$ SPR = 135° હોય અને $\angle$ PQT = 110° હોય, તો $\angle$ PRQ મેળવો.



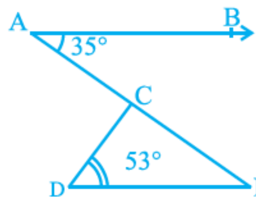
આકૃતિ 6.39

2. આકૃતિ 6.40માં $\angle$ X = 62° અને $\angle$ XYZ = 54° છે. જો Δ XYZ ના $\angle$ XYZ અને $\angle$ XZY ના દ્વિભાજક અનુક્રમે YO અને ZO હોય, તો $\angle$ OZY અને $\angle$ YOZ મેળવો.



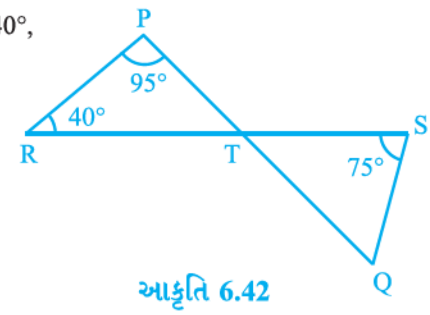
આકૃતિ 6.40

3. આકૃતિ 6.41માં જો AB ∥ DE, $\angle$ BAC = 35° અને $\angle$ CDE = 53° હોય, તો $\angle$ DCE મેળવો.



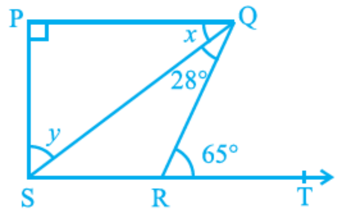
આકૃતિ 6.41

4. આકૃતિ 6.42 માં જો રેખાઓ PQ અને RS બિંદુ T પર એ પ્રકારે છેદે છે કે $\angle$ PRT = 40°, $\angle$ RPT = 95° અને $\angle$ TSQ = 75° છે, તો $\angle$ SQT મેળવો.



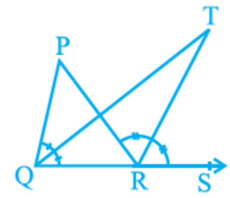
આકૃતિ 6.42

5. આકૃતિ 6.43માં જો $PQ \perp PS$, $PQ \parallel SR$, $\angle SQR = 28^\circ$ અને $\angle QRT = 65^\circ$ છે, તો x અને y શોધો.



આકૃતિ 6.43

6. આકૃતિ 6.44માં ΔPQR ની બાજુ QR ને S સુધી લંબાવેલ છે, જો $\angle PQR$ અને $\angle PRS$ ના દ્વિભાજક બિંદુ T પર મળે તો, સાબિત કરો કે $\angle QTR = \frac{1}{2} \angle QPR$.



આકૃતિ 6.44

6.8 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

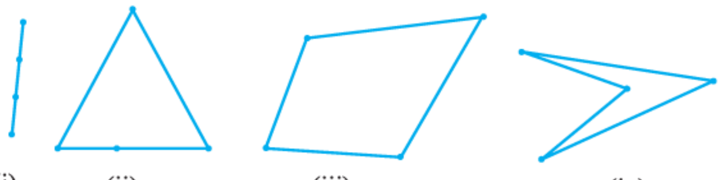
1. જો એક કિરણ એક રેખા પર આવેલ હોય તો તેમનાથી બનતા બંને આસન્નકોણનો સરવાળો 180° થાય છે અને તેનું પ્રતીપ આસન્નકોણોનો સરવાળો 180° હોય તો તેની સામાન્ય ન હોય તેવી બાજુઓ એક રેખા બનાવે છે. આ ગુણધર્મને રૈખિક જોડની પૂર્વધારણા કહે છે.
2. પરસ્પર છેદતી બે રેખાથી બનતા અભિકોણ સમાન હોય છે.
3. જો એક છેદિકા બે સમાંતર રેખાઓને છેદે, તો
   (i) અનુકોણની પ્રત્યેક જોડ સમાન હોય છે.
   (ii) અંતઃયુગ્મકોણની પ્રત્યેક જોડ સમાન હોય.
   (iii) છેદિકાની એક જ તરફના અંતઃકોણની પ્રત્યેક જોડ પૂરક હોય છે.
4. જો એક છેદિકા બે રેખાઓને એ રીતે છેદે કે
   (i) અનુકોણની કોઈ એક જોડ સમાન હોય અથવા
   (ii) અંતઃયુગ્મકોણની કોઈ એક જોડ સમાન હોય અથવા
   (iii) છેદિકાની એક જ તરફના અંતઃકોણની કોઈ એક જોડ પૂરક હોય, તો આ બંને રેખાઓ સમાંતર હોય છે.
5. જે રેખાઓ એક રેખાને સમાંતર હોય તે પરસ્પર સમાંતર હોય છે.
6. એક ત્રિકોણના ત્રણેય ખૂણાઓનો સરવાળો 180° હોય છે.
7. જો કોઈ ત્રિકોણની એક બાજુને લંબાવવામાં આવે, તો આ પ્રકારે બનેલ બહિષ્કોણ તેના બંને અંતઃસંમુખકોણના સરવાળા જેટલો હોય છે.

प्रકરણ 8

ચતુષ્કોણ

8.1 પ્રાસ્તાવિક

પ્રકરણ 6 અને 7 માં આપણે ત્રિકોણના ઘણા ગુણધર્મો વિશે અભ્યાસ કર્યો અને તમને ખબર છે કે, ત્રણ અસમરેખ બિંદુઓ પૈકી બબ્બેને જોડતાં જે આકૃતિ મળે તેને ત્રિકોણ કહેવાય. હવે આપણે ચાર બિંદુઓ દર્શાવી અને તેમને કોઈ ક્રમમાં જોડતાં શું મળશે તે જોઈએ.

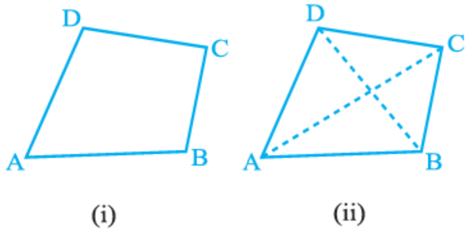


આકૃતિ 8.1

આપણે નોંધીશું કે જો બધાં જ બિંદુઓ સમરેખ (એક જ રેખામાં) હોય તો આપણને એક રેખાખંડ મળશે. [જુઓ આકૃતિ 8.1 (i)], જો ચારમાંથી ત્રણ બિંદુઓ સમરેખ હોય તો ત્રિકોણ મળશે. [જુઓ આકૃતિ 8.1 (ii)] અને જો ચારમાંથી કોઈપણ ત્રણ બિંદુઓ સમરેખ ન હોય, તો આપણને ચાર બાજુઓવાળી એક બંધ આકૃતિ મળશે. [જુઓ આકૃતિ 8.1 (iii) અને (iv)].

ચાર બિંદુઓને ક્રમમાં જોડતાં આવી જે આકૃતિ બને છે તેને ***ચતુષ્કોણ*** (*quadrilateral*) કહે છે. આ પુસ્તકમાં આપણે આકૃતિ 8.1 (iii) માં જે ચતુષ્કોણ મળે છે તેમના વિશે જ અભ્યાસ કરીશું, પરંતુ આકૃતિ 8.1 (iv) માં મળે તેવા ચતુષ્કોણ વિશે નહિ.

ચતુષ્કોણને ચાર બાજુઓ, ચાર ખૂણા અને ચાર શિરોબિંદુઓ હોય છે [જુઓ આકૃતિ 8.2 (i)].



આકૃતિ 8.2

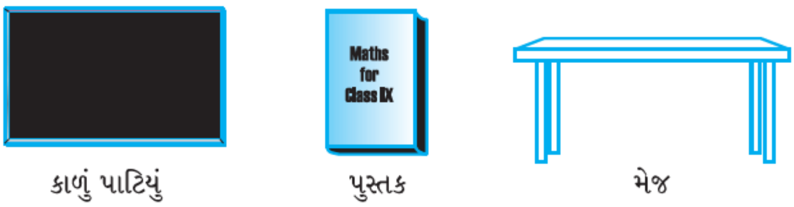
ચતુષ્કોણ ABCD માં AB, BC, CD અને DA બાજુઓ છે. તેને ચાર શિરોબિંદુઓ A, B, C અને D છે અને તેનાં શિરોબિંદુઓ આગળ ચાર ખૂણાઓ $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ અને $\angle D$ બને છે.

હવે A ને તેની સામે આવેલા શિરોબિંદુ C અને B ને D સાથે જોડો. [જુઓ આકૃતિ 8.2 (ii).]

AC અને BD એ ચતુષ્કોણ ABCD ના બે વિકર્ણ છે.

આ પ્રકરણમાં આપણે જુદા-જુદા પ્રકારના ચતુષ્કોણ, તેમના ગુણધર્મો અને વિશેષ કરીને ***સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ*** (*parallelogram*) વિશે અભ્યાસ કરીશું.

તમને નવાઈ લાગશે કે શા માટે આપણે ચતુષ્કોણો અથવા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણો વિશે અભ્યાસ કરીશું. તમે તમારી આજુબાજુ નજર નાંખશો તો તમને ચતુષ્કોણ આકારની પુષ્કળ વસ્તુઓ જોવા મળશે, જેમકે ભોંયતળિયુ, દીવાલ, છત, તમારા વર્ગની બારીઓ, કાળું પાટિયું, ડસ્ટરની દરેક સપાટી, તમારા પુસ્તકના દરેક પૃષ્ઠ, અભ્યાસ કરવાના તમારા મેજની ઉપરની બાજુ વગેરે. આમાંની કેટલીક નીચે દર્શાવેલ છે. (જુઓ આકૃતિ 8.3.)



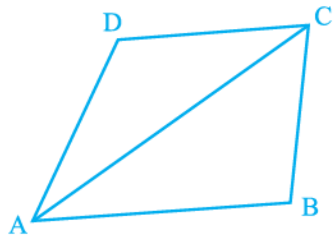
આકૃતિ 8.3

જો કે આપણી આસપાસ નજરે પડતી મોટાભાગની વસ્તુઓ જે વિશિષ્ટ ચતુષ્કોણ આકારની હોય છે તેને ***લંબચોરસ*** કહેવાય છે. આપણે ચતુષ્કોણો વિશે અને તેમાં મુખ્યત્વે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ વિશે વધુ અભ્યાસ કરીશું, કારણ કે લંબચોરસ પણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે અને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના બધા જ ગુણધર્મો લંબચોરસ માટે પણ સત્ય છે.

8.2 ચતુષ્કોણના ખૂણાઓના સરવાળાનો ગુણધર્મ

આપણે ચતુષ્કોણના ખૂણાના સરવાળાનો ગુણધર્મ યાદ કરીએ.

ચતુષ્કોણના ચારેય ખૂણાઓનો સરવાળો 360° છે. ચતુષ્કોણમાં એક વિકર્ણ દોરી ચતુષ્કોણને બે ત્રિકોણોમાં વિભાજિત કરી આ ગુણધર્મની ખાતરી કરી શકાય છે.



આકૃતિ 8.4

ધારો કે ABCD ચતુષ્કોણ છે અને AC વિકર્ણ છે. (જુઓ આકૃતિ 8.4.)

Δ ADC ના ખૂણાઓનો સરવાળો કેટલો થશે ?

તમે જાણો છો કે, $\angle DAC + \angle ACD + \angle D = 180°$ (1)

તે જ પ્રમાણે Δ ABC માં,

$\angle CAB + \angle ACB + \angle B = 180°$ થાય. (2)

(1) અને (2) નો સરવાળો કરતાં,

$\angle DAC + \angle ACD + \angle D + \angle CAB + \angle ACB + \angle B = 180° + 180° = 360°$

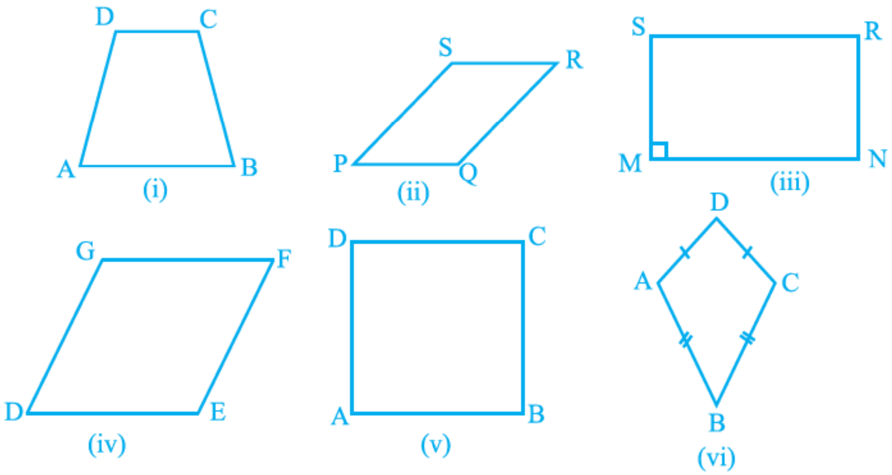
તથા $\angle DAC + \angle CAB = \angle A$ અને $\angle ACD + \angle ACB = \angle C$

તેથી, $\angle A + \angle D + \angle B + \angle C = 360°$.

$\therefore$ *ચતુષ્કોણના ચારે ય ખૂણાનો સરવાળો 360° છે.*

8.3 ચતુષ્કોણના પ્રકાર

નીચે દોરેલા જુદા જુદા ચતુષ્કોણ તરફ નજર કરો.



આકૃતિ 8.5

અવલોકન કરો :

- આકૃતિ 8.5 (i)ના ચતુષ્કોણ ABCD ની સામસામેની બાજુઓની ફક્ત એક જ જોડની રેખાઓ AB અને CD સમાંતર છે. તમને જ્ઞાત છે કે તેને ***સમલંબ ચતુષ્કોણ*** (*trapezium*) કહે છે.
- આકૃતિ 8.5 (ii), (iii) , (iv) અને (v) ના ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુઓની બંને જોડની રેખાઓ સમાંતર છે. યાદ કરો કે આવા ચતુષ્કોણને ***સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ*** (*parallelogram*) કહે છે.

  આથી, આકૃતિ 8.5 (ii) નો ચતુષ્કોણ PQRS એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

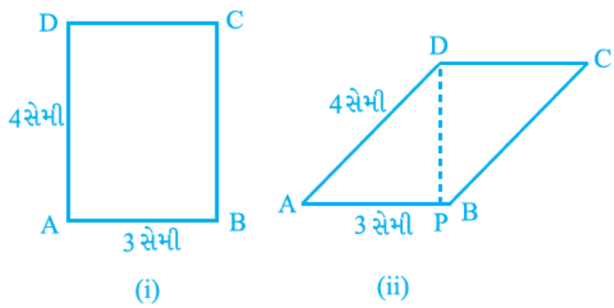
  તે જ પ્રમાણે આકૃતિ 8.5 (iii), (iv) અને (v) ના બધા જ ચતુષ્કોણો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.
- નોંધો કે આકૃતિ 8.5 (iii) ના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ MNRS નો એક ખૂણો અર્થાત્ $\angle M$ કાટખૂણો છે. આ વિશિષ્ટ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણને શું કહીશું ? યાદ કરવાનો પ્રયત્ન કરો. તેને ***લંબચોરસ*** (*Rectangle*) કહે છે.

- આકૃતિ 8.5 (iv) ના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ DEFG ની બધી જ બાજુઓ સમાન છે. આપણે જાણીએ છીએ કે તેને ***સમબાજુ ચતુષ્કોણ*** *(rhombus)* કહે છે.
- આકૃતિ 8.5 (v) ના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD માં $\angle A = 90°$ છે અને બધી જ બાજુઓ સમાન છે. તેને ***ચોરસ*** *(square)* કહે છે.
- આકૃતિ 8.5 (vi) ના ચતુષ્કોણ, ABCD માં $AD = CD$ અને $AB = CB$ એટલે કે પાસપાસેની બાજુઓની બંને જોડની બાજુઓ સમાન છે. તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ નથી. તેને ***પતંગાકાર ચતુષ્કોણ*** *(kite)* કહે છે.

નોંધીશું કે ચોરસ, લંબચોરસ અને સમબાજુ ચતુષ્કોણ એ બધા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

- ચોરસ એ લંબચોરસ તેમજ સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે.
- પતંગાકાર એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ નથી.
- સમલંબ ચતુષ્કોણ એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ નથી. (કારણ કે સમલંબ ચતુષ્કોણમાં સામસામેની બાજુઓની બે જોડમાંની માત્ર એક જ જોડની રેખાઓ પરસ્પર સમાંતર છે અને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ માટે બંને જોડની રેખાઓ સમાંતર હોવી જોઈએ.)
- લંબચોરસ કે સમબાજુ ચતુષ્કોણ એ ચોરસ નથી.

આકૃતિ 8.6 માં સમાન પરિમિતિ 14 સેમી હોય તેવો એક લંબચોરસ અને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.



આકૃતિ 8.6

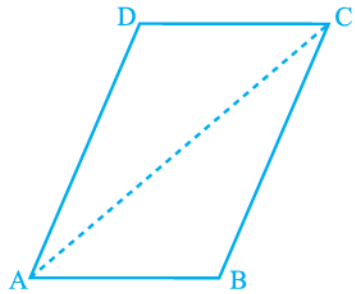
સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ $DP \times AB$ એ લંબચોરસના ક્ષેત્રફળ $AB \times AD$ થી ઓછું છે, કારણ કે $DP < AD$. મિઠાઈની દુકાનવાળા સામાન્યતઃ ***તાસક*** *(tray)*માં વધારે ટુકડાઓનો સમાવેશ કરી શકે તે માટે બરફીને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના આકારમાં કાપે છે. (ફરી વખત ખાતા પહેલાં બરફીના ટુકડાઓનો આકાર જુઓ !)

હવે આપણે આગળના ધોરણોમાં ભણી ગયેલા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કેટલાક ગુણધર્મોનું પુનઃઅવલોકન કરી લઈએ.

8.4 સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ગુણધર્મો :

ચાલો આપણે પ્રવૃત્તિ કરીએ. એક કાગળના ટુકડામાંથી સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણને વિકર્ણથી કાપીએ. (જુઓ આકૃતિ 8.7.) આપણને બે ત્રિકોણ મળશે. આ ત્રિકોણો વિશે તમે શું કહી શકશો ?

એક ત્રિકોણને બીજા ત્રિકોણ ઉપર મૂકો. જરૂરિયાત જણાય તો એક વખત ફેરવો. તમે શું નિરીક્ષણ કરો છો ?



આકૃતિ 8.7

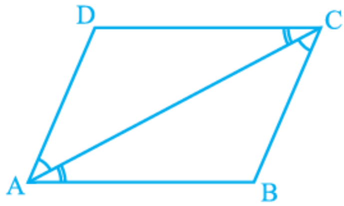
જુઓ કે બંને ત્રિકોણ એકબીજાને એકરૂપ છે.

બીજા કેટલાક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ માટે આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરો. દરેક વખતે અનુભવાશે કે પ્રત્યેક વિકર્ણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણને બે એકરૂપ ત્રિકોણમાં વિભાજિત કરે છે.

હવે આપણે આ પરિણામ સાબિત કરીએ.

પ્રમેય 8.1 : *સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો કોઈપણ વિકર્ણ તેનું બે એકરૂપ ત્રિકોણમાં વિભાજન કરે છે.*

સાબિતી : ધારો કે ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે અને AC તેનો વિકર્ણ છે (જુઓ આકૃતિ 8.8.) અવલોકન કરો કે વિકર્ણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD ને બે ત્રિકોણ Δ ABC અને Δ CDA માં વિભાજિત કરે છે. આપણે આ ત્રિકોણો એકરૂપ છે તેમ સાબિત કરીશું.



આકૃતિ 8.8

Δ ABC અને Δ CDA માં નોંધો કે BC $\parallel$ AD અને AC તેમની છેદિકા છે.

આથી, $\angle$ BCA = $\angle$ DAC (યુગ્મકોણોની જોડ)

તથા, AB $\parallel$ DC અને AC છેદિકા છે.

તેથી, $\angle$ BAC = $\angle$ DCA (યુગ્મકોણોની જોડ)

અને AC = CA (સામાન્ય બાજુ)

આથી, Δ ABC $\cong$ Δ CDA (ખૂબાખૂ નિયમ)

અથવા વિકર્ણ AC સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD ને બે એકરૂપ ત્રિકોણો ABC અને CDA માં વિભાજીત કરે છે. ■

હવે, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD ની સામસામેની બાજુઓ માપો. તમે શું અવલોકન કરો છો ? તમને AB = DC અને AD = BC મળશે.

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો આ બીજો ગુણધર્મ નીચે દર્શાવેલ છે:

પ્રમેય 8.2 : *સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં સામસામેની બાજુઓ સમાન હોય છે.*

તમે સાબિત કર્યું છે કે વિકર્ણ એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણને બે એકરૂપ ત્રિકોણોમાં વિભાજીત કરે છે.

આથી તમે અનુરૂપ ભાગ એટલે કે તદ્નુસાર બાજુઓ વિશે શું કહી શકશો ? તેઓ સમાન છે.

આથી, AB = DC અને AD = BC

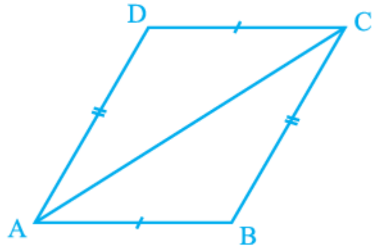
હવે આ પરિણામનું પ્રતીપ શું છે ? તમને જ્ઞાત છે કે પ્રમેયમાં જે કંઈ આપ્યું હોય છે, તે આપણે તેના પ્રતિપ્રમેયમાં સાબિત કરવાનું હોય છે અને પ્રમેયમાં જે સાબિત કરવાનું છે તે પ્રતિપ્રમેયના વિધાનમાં આપેલું હોય છે. આમ, પ્રમેય 8.2 ને નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકાય :

જો ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય, તો સામસામેની બાજુઓની પ્રત્યેક જોડ સમાન છે. આથી તેનું પ્રતિપ્રમેય :

પ્રમેય 8.3 : *જો કોઈ ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુઓની પ્રત્યેક જોડની બાજુઓ સમાન હોય, તો તે ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.*

તમે કારણ આપી શકશો કે આ શા માટે ?

ધારો કે ચતુષ્કોણ ABCD ની બાજુઓ AB અને CD સમાન છે તથા AD = BC (જુઓ આકૃતિ 8.9.) વિકર્ણ AC દોરો.



આકૃતિ 8.9

સ્પષ્ટ છે કે, $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (શા માટે ?)

આથી, $\angle BAC = \angle DCA$

અને $\angle BCA = \angle DAC$ (શા માટે ?)

હવે તમે કહી શકશો કે ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે ? શા માટે ?

તમે હમણાં જ જોયું કે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં સામસામેની બાજુઓની પ્રત્યેક જોડની બાજુઓ સમાન છે તથા તેનું પ્રતીપ જો ચતુષ્કોણની સામસામેની પ્રત્યેક જોડની બાજુઓ સમાન હોય, તો તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. આપણે આવું જ પરિણામ સામસામેના ખૂણાઓની પ્રત્યેક જોડ માટે તારવી શકીએ ?

કેટલાક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણો દોરી તેમના ખૂણા માપો. તમે શું અવલોકન કરો છો ?

સામસામેના ખૂણાઓની પ્રત્યેક જોડના ખૂણા સમાન છે.

કેટલાક વધારે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ લઈ આ પરિણામ ફરી ચકાસી જોઇએ. આપણે એક અન્ય પરિણામ પર આવી પહોંચીશું. તે નીચે આપેલ છે :

પ્રમેય 8.4 : *સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં સામસામેના ખૂણા સમાન છે.*

હવે, આ પરિણામનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે ? હા, સત્ય છે. ચતુષ્કોણના ખૂણાના સરવાળાનો ગુણધર્મ અને સમાંતરબાજુઓને છેદિકા વડે છેદવાથી મળતાં પરિણામોનો ઉપયોગ કરીને, આપણે જોઈ શકીએ કે પ્રતિપ્રમેય પણ સત્ય છે. આથી, આપણને નીચેનું પરિણામ મળશે :

પ્રમેય 8.5 : *જો ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણાઓની પ્રત્યેક જોડના ખૂણા સમાન હોય, તો તે ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.*

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો હજુ એક બીજો પણ ગુણધર્મ છે. આપણે તેનો અભ્યાસ કરીએ. એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD દોરો અને O બિંદુએ છેદતાં તેના બંને વિકર્ણ દોરો. (જુઓ આકૃતિ 8.10.)

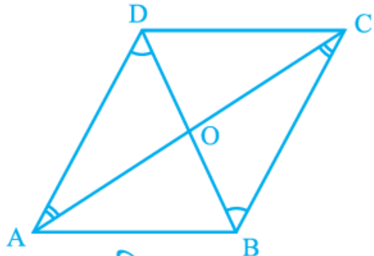
OA, OB, OC અને OD ની લંબાઈ માપો.

તમે શું નિરીક્ષણ કરો છો ? તમે નિરીક્ષણ કરશો કે OA = OC અને OB = OD અથવા બંને વિકર્ણનું મધ્યબિંદુ O છે. આ પ્રક્રિયાને સમજવા કેટલાક વધારે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ લઈ આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરો. તમે જોશો કે દરેક વખતે આપણને બંને વિકર્ણનું મધ્યબિંદુ O જ મળશે.

આથી, આપણને નીચેનું પ્રમેય મળશે :

પ્રમેય 8.6 : *સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે છે.*

હવે, જો ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે તો શું થશે ? શું તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હશે ? ખરેખર, આ સત્ય છે.



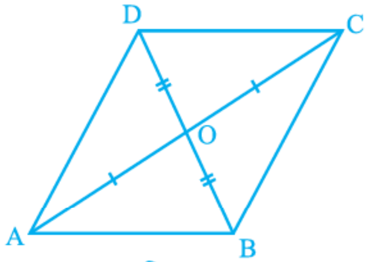
આકૃતિ 8.10

આ પરિણામ એ પ્રમેય 8.6 ના પરિણામનું પ્રતીપ છે. તે આગળ પ્રમાણે છે :

પ્રમેય 8.7 *જો કોઈ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો એકબીજાને દુભાગે, તો તે ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.*

આ પરિણામને સાબિત કરવા આપણે નીચે પ્રમાણે દલીલ કરી શકીએ:

આકૃતિ 8.11, માં OA = OC અને OB = OD આપ્યું છે.



આકૃતિ 8.11

આથી, Δ AOB $\cong$ Δ COD (શા માટે ?)

માટે $\angle$ ABO = $\angle$ CDO (શા માટે ?)

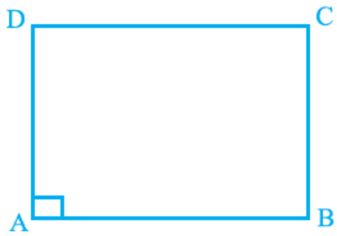
આ પરથી, AB || CD મળે.

તે જ પ્રમાણે, BC || AD

માટે ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

હવે, આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ 1 : બતાવો કે લંબચોરસનો દરેક ખૂણો કાટખૂણો છે.



આકૃતિ 8.12

ઉકેલ : યાદ કરો, લંબચોરસ શું છે ?

લંબચોરસ એ જેનો એક ખૂણો કાટખૂણો હોય એવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

ધારો કે $\angle$ A = 90° હોય તેવો એક લંબચોરસ ABCD છે.

આપણે સાબિત કરીશું કે, $\angle$ B = $\angle$ C = $\angle$ D = 90°

AD || BC છે અને AB તેની એક છેદિકા છે. (જુઓ આકૃતિ 8.12.)

આથી, $\angle$ A + $\angle$ B =180° (છેદિકાની એક જ બાજુના અંતઃકોણો)

પરંતુ, $\angle$ A = 90°

આથી, $\angle$ B = 180° – $\angle$ A = 180° – 90° = 90°

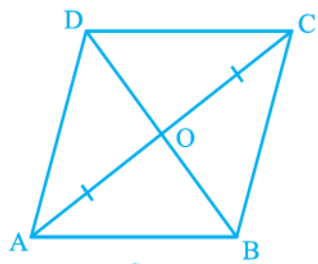
વળી, $\angle$ C = $\angle$ A અને $\angle$ D = $\angle$ B (સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણાઓ)

આથી, $\angle$ C = 90° અને $\angle$ D = 90°.

માટે, લંબચોરસનો પ્રત્યેક ખૂણો કાટખૂણો છે.

ઉદાહરણ 2 : સમબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો એકબીજાને લંબ છે, તેમ બતાવો.

ઉકેલ : ABCD સમબાજુ ચતુષ્કોણ લો. (જુઓ આકૃતિ 8.13.)



આકૃતિ 8.13

તમે જાણો છો કે, AB = BC = CD = DA (શા માટે ?)

હવે, Δ AOD અને Δ COD માં,

OA = OC (સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે છે.)

$OD = OD$ (સામાન્ય બાજુ)

$AD = CD$

માટે, $\Delta AOD \cong \Delta COD$ (બાબાબા સંગતતાનો નિયમ)

માટે, $\angle AOD = \angle COD$ (એકરૂપ ત્રિકોણના એકરૂપ ભાગ)

પરંતુ, $\angle AOD + \angle COD = 180°$ (રૈખિક જોડના ખૂણા)

આથી, $2\angle AOD = 180°$

અથવા, $\angle AOD = 90°$

આથી, સમબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર લંબ છે.

ઉદાહરણ 3 : સમદ્વિભુજ ત્રિકોણ ABC માં $AB = AC$ છે. AD બહિષ્કોણ PAC નો દ્વિભાજક છે અને $CD \parallel AB$ (જુઓ આકૃતિ 8.14.) સાબિત કરો કે,

(i) $\angle DAC = \angle BCA$ અને (ii) ABCD એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

ઉકેલ : (i) સમદ્વિભુજ ΔABC માં $AB = AC$ છે (પક્ષ)

માટે, $\angle ABC = \angle ACB$ (સમાન બાજુની સામેના ખૂણા)

વળી, $\angle PAC = \angle ABC + \angle ACB$ (ત્રિકોણનો બહિષ્કોણ)

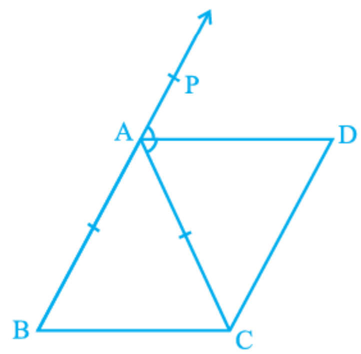
$\therefore \angle PAC = 2\angle ACB$ (1)

હવે, AD એ $\angle PAC$ નો દ્વિભાજક છે.

માટે, $\angle PAC = 2\angle DAC$ (2)

માટે, $2\angle DAC = 2\angle ACB$ [(1) અને (2) પરથી]

$\therefore \angle DAC = \angle BCA$



આકૃતિ 8.14

(ii) રેખાખંડ BC અને AD ની છેદિકા AC ના છેદવાથી બનતી યુગ્મકોણની જોડના ખૂણા સમાન છે.

આથી, $BC \parallel AD$

વળી, $BA \parallel CD$ (પક્ષ)

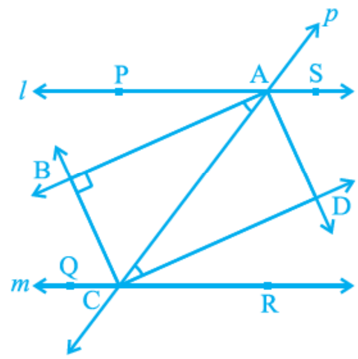
હવે, ચતુષ્કોણ ABCD ની સામસામેની બાજુઓની બંને જોડની રેખાઓ સમાંતર છે. આથી, ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

ઉદાહરણ 4 : બે સમાંતર રેખાઓ l અને m ની છેદિકા રેખા p છે. (જુઓ આકૃતિ 8.15.) બતાવો કે અંતઃકોણોના દુભાજકથી બનતો ચતુષ્કોણ લંબચોરસ છે.

ઉકેલ : $PS \parallel QR$ છે અને છેદિકા p તેમને અનુક્રમે A અને C માં છેદે છે.

$\angle$ PAC અને $\angle$ ACQ ના દુભાજકો B માં છેદે છે અને $\angle$ ACR અને $\angle$ SAC ના દુભાજકો D માં છેદે છે.

આપણે બતાવવાનું છે કે ચતુષ્કોણ ABCD લંબચોરસ છે.



આકૃતિ 8.15

હવે, $\angle PAC = \angle ACR$ ($l \parallel m$ ની છેદિકા p થી બનતા યુગ્મકોણ)

માટે, $\frac{1}{2}\angle PAC = \frac{1}{2}\angle ACR$

અર્થાત્, $\angle BAC = \angle ACD$

આ તો રેખાઓ AB અને DC ની છેદિકા AC થી બનતા યુગ્મકોણોની જોડ છે અને તેઓ સમાન પણ છે.

$$AB \parallel DC$$

તે જ પ્રમાણે, $BC \parallel AD$ ($\angle$ ACB અને $\angle$ CAD લેતાં)

માટે, ચતુષ્કોણ ABCD એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

વળી, $\angle PAC + \angle CAS = 180°$ (રૈખિક જોડના ખૂણા)

માટે, $\frac{1}{2}\angle PAC + \frac{1}{2}\angle CAS = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$

$$\therefore \angle BAC + \angle CAD = 90°$$

$$\therefore \angle BAD = 90°$$

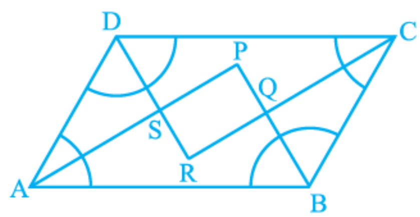
આથી, ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે તથા તેનો એક ખૂણો 90° છે.

માટે ABCD લંબચોરસ છે.

ઉદાહરણ 5 : બતાવો કે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ખૂણાઓના દુભાજકો લંબચોરસ રચે છે.

ઉકેલ : ધારો કે P, Q, R અને S એ અનુક્રમે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD ના ખૂણાઓ $\angle$ A અને $\angle$ B, $\angle$ B અને $\angle$ C, $\angle$ C અને $\angle$ D તથા $\angle$ D અને $\angle$ A ના દુભાજકોનાં છેદબિંદુઓ છે. (જુઓ આકૃતિ 8.16.)

Δ ASDમાં તમે શું નિરીક્ષણ કરો છો ?



આકૃતિ 8.16

$\angle$ D નો દુભાજક DS અને $\angle$ A નો દુભાજક AS હોવાથી,

$$\angle DAS + \angle ADS = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle D$$

$$= \frac{1}{2}(\angle A + \angle D)$$

$= \frac{1}{2} \times 180°$ ($\angle A$ અને $\angle D$ છેદિકાની એક બાજુના અંતઃકોણો છે.)

$= 90°$

વળી, $\angle DAS + \angle ADS + \angle DSA = 180°$ (ત્રિકોણના ખૂણાઓના સરવાળાનો ગુણધર્મ)

માટે, $90° + \angle DSA = 180°$

$\therefore \angle DSA = 90°$

આથી, $\angle PSR = 90°$ ($\angle DSA$ નો અભિકોણ)

તે જ પ્રમાણે આપણે $\angle APB = 90°$ અને $\angle SPQ = 90°$ બતાવી શકીએ. ($\angle DSA$ માટે બતાવ્યું તે પ્રમાણે)

તથા તે જ પ્રમાણે, $\angle PQR = 90°$ અને $\angle SRQ = 90°$.

$\therefore$ ચતુષ્કોણ PQRSના બધા જ ખૂણાઓ કાટખૂણા છે.

શું તે લંબચોરસ છે તેવો નિર્ણય આપણે લઈ શકીએ ? ચાલો આપણે ચકાસીએ. આપણે બતાવ્યું છે કે $\angle PSR = \angle PQR = 90°$ અને $\angle SPQ = \angle SRQ = 90°$. આથી, સામસામેના ખૂણાઓની બંને જોડ સમાન છે.

માટે, PQRS એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે અને તેનો એક ખૂણો (ખરેખર તો બધા જ ખૂણાઓ) 90° નો છે અને તેથી PQRS લંબચોરસ છે.

8.5 ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ થાય તેની બીજી શરત

આ પ્રકરણમાં તમે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ઘણા ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કર્યો અને તમે એવી પણ ચકાસણી કરી કે જો ચતુષ્કોણ આ ગુણધર્મોમાંથી કોઈ એક ગુણધર્મ સંતોષે, તો તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય.

ચતુષ્કોણ એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ થાય તે માટે ઓછામાં ઓછી શરતની જરૂર પડે તેવી હજુ બીજી શરતનો આપણે હવે અભ્યાસ કરીશું.

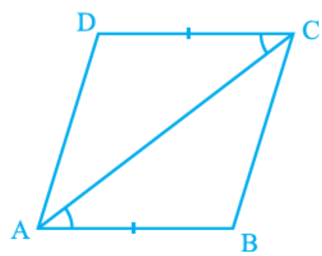
તેને નીચે પ્રમાણે પ્રમેયના સ્વરૂપમાં દર્શાવીશું :

પ્રમેય 8.8 : *જો ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુઓની એક જોડની બાજુઓ સમાન અને સમાંતર હોય, તો તે ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.*

આકૃતિ 8.17માં જુઓ કે $AB = CD$ અને $AB \parallel CD$ છે. આપણે વિકર્ણ AC દોરીએ. તમે બતાવી શકશો કે બાખૂબા સંગતતાના નિયમ પરથી $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ થાય.

આથી, $BC \parallel AD$ (શા માટે ?)

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના આ ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરવા માટે હવે આપણે એક ઉદાહરણ લઈએ.



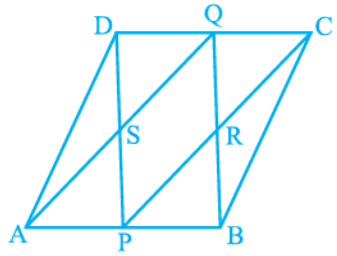
આકૃતિ 8.17

ઉદાહરણ 6 : સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD માં P અને Q એ અનુક્રમે સામસામેની બાજુઓ AB અને CD નાં મધ્યબિંદુઓ છે. (જુઓ આકૃતિ 8.18.) જો AQ એ DP ને S માં છેદે અને BQ એ CP ને R માં છેદે, તો દર્શાવો કે,

(i) APCQ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

(ii) DPBQ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

(iii) PSQR સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.



આકૃતિ 8.18

ઉકેલ : (i) ચતુષ્કોણ APCQ માં,

$AP \parallel QC$ (AB ∥ CD હોવાથી) (1)

$AP = \frac{1}{2}AB, \ CQ = \frac{1}{2}CD$ (પક્ષ)

વળી, $AB = CD$ (શા માટે ?)

આથી, $AP = QC$ (2)

માટે, APCQ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. [(1) અને (2) અને પ્રમેય 8.8 પરથી]

(ii) તે જ પ્રમાણે DPBQ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે, કારણ કે

$DQ \parallel PB$ અને $DQ = PB$

(iii) ચતુષ્કોણ PSQR માં,

$SP \parallel QR$ (SP એ DP નો ભાગ છે અને QR એ QB નો ભાગ છે.)

તે જ પ્રમાણે, $SQ \parallel PR$

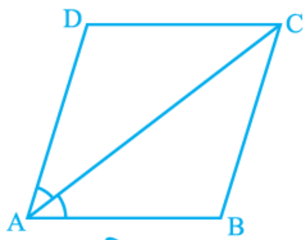
આથી, PSQR સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

સ્વાધ્યાય 8.1

1. એક ચતુષ્કોણના ખૂણાઓનો ગુણોત્તર 3 : 5 : 9 : 13 છે. આ ચતુષ્કોણના બધા જ ખૂણાઓ શોધો.
2. જો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો સમાન હોય, તો દર્શાવો કે તે લંબચોરસ છે.
3. સાબિત કરો કે, જો ચતુષ્કોણના વિકર્ણો એકબીજાને કાટખૂણે દુભાગે, તો તે સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે.
4. સાબિત કરો કે, ચોરસના વિકર્ણો સમાન છે અને તે એકબીજાને કાટખૂણે દુભાગે છે.
5. સાબિત કરો કે, જો ચતુષ્કોણના વિકર્ણો સમાન હોય તથા તે એકબીજાને કાટખૂણે દુભાગે, તો તે ચોરસ છે.
6. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD નો વિકર્ણ AC એ $\angle A$ ને દુભાગે છે (જુઓ આકૃતિ 8.19.) સાબિત કરો કે,

   (i) તે $\angle C$ ને પણ દુભાગે છે.

   (ii) ABCD સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે.



આકૃતિ 8.19

7. ABCD સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે. સાબિત કરો કે વિકર્ણ AC એ $\angle A$ તેમજ $\angle C$ ને દુભાગે છે તથા વિકર્ણ BD એ $\angle B$ તેમજ $\angle D$ ને દુભાગે છે.

8. લંબચોરસ ABCD માં વિકર્ણ AC એ $\angle A$ તેમજ $\angle C$ ને દુભાગે છે. સાબિત કરો કે,

(i) ABCD ચોરસ છે. (ii) વિકર્ણ BD એ $\angle B$ તેમજ $\angle D$ ને દુભાગે છે.

9. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD માં વિકર્ણ BD પર બે બિંદુઓ P અને Q એવાં લીધાં છે કે જેથી DP = BQ થાય. (જુઓ આકૃતિ 8.20.) સાબિત કરો કે,

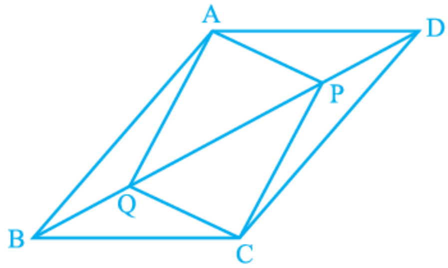
(i) $\Delta APD \cong \Delta CQB$

(ii) AP = CQ

(iii) $\Delta AQB \cong \Delta CPD$

(iv) AQ = CP

(v) APCQ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

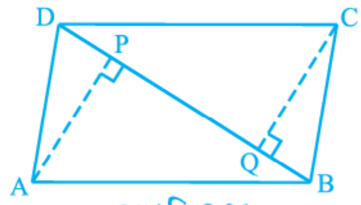


આકૃતિ 8.20

10. ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે અને શિરોબિંદુઓ A અને C માંથી વિકર્ણ BD પર લંબ અનુક્રમે AP અને CQ દોરેલ છે. (જુઓ આકૃતિ 8.21.) સાબિત કરો કે,

(i) $\Delta APB \cong \Delta CQD$

(ii) AP = CQ



આકૃતિ 8.21

11. ΔABC અને ΔDEF માં AB = DE, AB || DE, BC = EF અને BC || EF છે. શિરોબિંદુઓ A, B અને C ને અનુક્રમે D, E અને F સાથે જોડેલાં છે. (જુઓ આકૃતિ 8.22) સાબિત કરો કે,

(i) ચતુષ્કોણ ABED એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

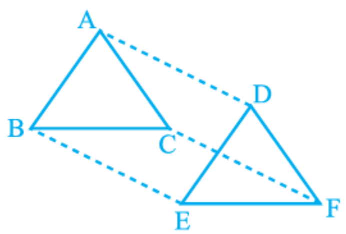
(ii) ચતુષ્કોણ BEFC એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

(iii) AD || CF અને AD = CF

(iv) ચતુષ્કોણ ACFD એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

(v) AC = DF

(vi) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

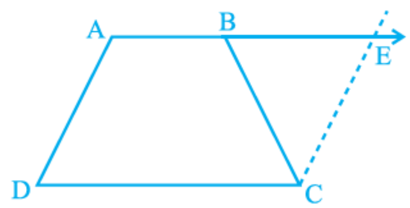


આકૃતિ 8.22

12. સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCD માં AB || CD અને AD = BC (જુઓ આકૃતિ 8.23.) સાબિત કરો કે,

(i) $\angle A = \angle B$ (ii) $\angle C = \angle D$

(iii) $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ (iv) વિકર્ણ AC = વિકર્ણ BD



આકૃતિ 8.23

[**સૂચના :** AB ને લંબાવો અને C માંથી DA ને સમાંતર તથા AB ને E માં છેદતી એક રેખા દોરો.]

8.6 મધ્યબિંદુ પ્રમેય

તમે ત્રિકોણ તેમજ ચતુષ્કોણના ઘણા ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કર્યો. હવે આપણે ત્રિકોણની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુ, સંબંધી એક અન્ય પરિણામનો અભ્યાસ કરીએ. નીચેની પ્રવૃત્તિ કરો :

એક ત્રિકોણ દોરી તેની બે બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને E અને F નામ આપીએ. E અને F ને જોડીએ.

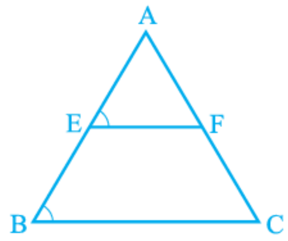
(જુઓ આકૃતિ 8.24.)

EF અને BC માપો. ∠ AEF અને ∠ ABC માપો.

તમે શું નિરીક્ષણ કરો છો ? તમને

$EF = \frac{1}{2}$ BC અને ∠ AEF = ∠ ABC મળશે.

તેથી, EF || BC



આકૃતિ 8.24

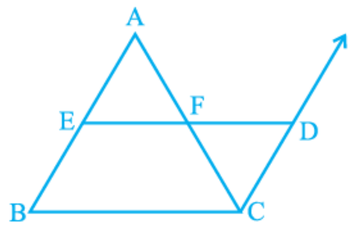
આ પ્રવૃત્તિનું કેટલાક વધારે ત્રિકોણ લઈ પુનરાવર્તન કરીએ.

આથી, તમને નીચેનું પ્રમેય મળશે :

પ્રમેય 8.9 : *ત્રિકોણની બે બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને જોડતો રેખાખંડ, ત્રીજી બાજુને સમાંતર છે.*

તમે નીચેની ચાવીનો ઉપયોગ કરીને આ પ્રમેય સાબિત કરી શકશો.

આકૃતિ 8.25 નું નિરીક્ષણ કરો. તેમાં AB અને AC નાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે E અને F છે તથા CD || BA.



આકૃતિ 8.25

Δ AEF ≅ Δ CDF (ખૂબાખૂ નિયમ)

આથી, EF = DF અને BE = AE = DC (શા માટે ?)

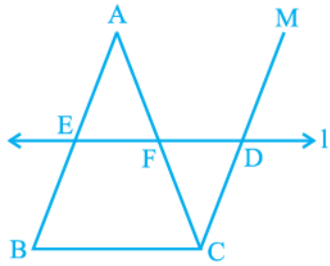
માટે, BCDE સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. (શા માટે ?)

તે પરથી EF || BC મળે.

આ કિસ્સામાં આપણે $EF = \frac{1}{2}\ ED = \frac{1}{2}$ BC પણ નોંધીશું.

શું તમે પ્રમેય 8.9 નું પ્રતીપ રજૂ કરી શકશો ? પ્રતીપ સત્ય છે ?

તમે જોઈ શકશો કે ઉપરના પ્રમેયનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે. તેને નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકાય :



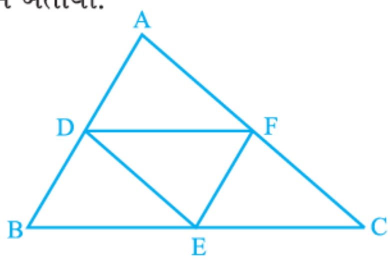
આકૃતિ 8.26

પ્રમેય 8.10 : *ત્રિકોણની એક બાજુના મધ્યબિંદુમાંથી બીજી બાજુને સમાંતર દોરેલી રેખા ત્રીજી બાજુને દુભાગે છે.*

આકૃતિ 8.26 માં જુઓ કે AB નું મધ્યબિંદુ E છે. E માંથી પસાર થતી રેખા l એ BC ને સમાંતર છે અને CM $\|$ BA.

Δ AEF અને Δ CDF ની એકરૂપતાનો ઉપયોગ કરી AF = CF સાબિત કરો.

ઉદાહરણ 7 : Δ ABC માં, બાજુઓ AB, BC અને CA નાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે D, E અને F છે. (જુઓ આકૃતિ 8.27.) D, E અને F ને જોડતાં, Δ ABC નું ચાર એકરૂપ ત્રિકોણોમાં વિભાજન થાય છે તેમ બતાવો.



આકૃતિ 8.27

ઉકેલ : બાજુઓ AB અને BC નાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે D અને E હોવાથી,

પ્રમેય 8.9 ના ઉપયોગથી DE $\|$ AC મળે.

તે જ પ્રમાણે, DF $\|$BC અને EF $\|$ AB

માટે ADEF, BDFE અને DFCE બધા જ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

હવે, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ BDFE નો વિકર્ણ DE છે.

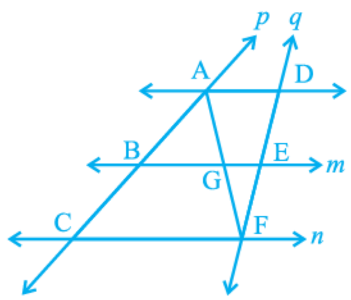
માટે, Δ BDE $\cong$ Δ FED

તે જ પ્રમાણે Δ DAF $\cong$ Δ FED

અને Δ EFC $\cong$ Δ FED

આથી, ચારેય ત્રિકોણો એકરૂપ છે.

ઉદાહરણ 8 : સમાંતર રેખાઓ l, m અને n ને છેદિકાઓ p અને q એવી રીતે છેદે છે કે, l, m અને n રેખાઓ, રેખા p પર સમાન અંતઃખંડો AB અને BC કાપે છે. (જુઓ આકૃતિ 8.28.) સાબિત કરો કે l, m અને n રેખા q પર પણ સમાન અંતઃખંડો DE અને EF કાપે છે.



આકૃતિ 8.28

ઉકેલ : AB = BC આપ્યું છે અને આપણે DE = EF સાબિત કરવું છે.

ચાલો, આપણે A ને F સાથે જોડીએ જેથી રેખા AF, m ને G માં છેદે.

સમલંબ ચતુષ્કોણ ACFD એ બે ત્રિકોણો Δ ACF અને Δ AFD માં વિભાજિત થાય છે,

Δ ACF માં, AC નું મધ્યબિંદુ B છે તેમ આપેલ છે (AB = BC)

અને BG $\|$ CF ($m \| n$ હોવાથી)

માટે G એ AF નું મધ્યબિંદુ થશે. (પ્રમેય 8.10 નો ઉપયોગ કરતાં)

Δ AFD માં, AF નું મધ્યબિંદુ G હોવાથી, આપણે આ જ દલીલનો ઉપયોગ કરી GE $\parallel$ AD બતાવી શકીએ અને પ્રમેય 8.10 પરથી કહી શકીએ કે, E એ DF નું મધ્યબિંદુ છે.

એટલે કે, DE = EF.

બીજી રીતે કહીએ તો, રેખાઓ l, m અને n એ રેખા q પર પણ સમાન અંતઃખંડ કાપે છે.

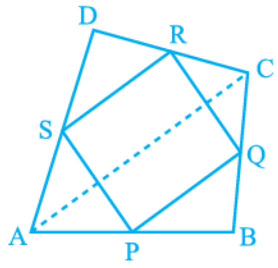
સ્વાધ્યાય 8.2

1. ચતુષ્કોણ ABCD ની બાજુઓ AB, BC, CD અને DA નાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે P, Q, R અને S છે. (જુઓ આકૃતિ 8.29.) AC તેનો વિકર્ણ છે. સાબિત કરો કે,

   (i) SR $\parallel$ AC અને SR = $\frac{1}{2}$ AC

   (ii) PQ = SR

   (iii) PQRS સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

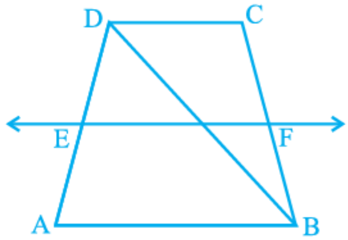


આકૃતિ 8.29

2. ABCD સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે અને P, Q, R અને S એ અનુક્રમે બાજુઓ AB, BC, CD અને DA નાં મધ્યબિંદુઓ છે. સાબિત કરો કે ચતુષ્કોણ PQRS એ લંબચોરસ છે.

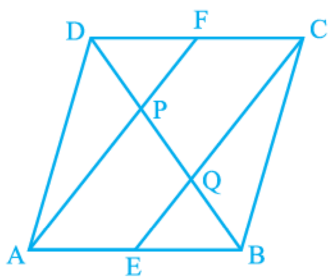
3. ABCD લંબચોરસ છે અને તેની બાજુઓ AB, BC, CD અને DA નાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે P, Q, R અને S છે. સાબિત કરો કે ચતુષ્કોણ PQRS એ સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

4. સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCD માં AB $\parallel$ DC, BD વિકર્ણ છે અને AD નું મધ્યબિંદુ E છે. E માંથી AB ને સમાંતર અને BC ને F માં છેદતી એક રેખા દોરી છે. (જુઓ આકૃતિ 8.30.) F એ BC નું મધ્યબિંદુ છે તેમ બતાવો.



આકૃતિ 8.30

5. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD માં બાજુઓ AB અને CD નાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે E અને F છે. (જુઓ આકૃતિ 8.31.) સાબિત કરો કે રેખાખંડ AF અને EC વિકર્ણ BD નું ત્રણ સમાન ભાગમાં વિભાજન કરે છે.



આકૃતિ 8.31

6. સાબિત કરો કે ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને જોડતાં રેખાખંડ એકબીજાને દુભાગે છે.

7. Δ ABC માં $\angle$C કાટકોણ છે. કર્ણ AB ના મધ્યબિંદુ M માંથી પસાર થતી અને BC ને સમાંતર રેખા AC ને D માં છેદે છે. સાબિત કરો કે

   (i) D એ AC નું મધ્યબિંદુ છે.

   (ii) MD $\perp$ AC

   (iii) CM = MA = $\frac{1}{2}$AB

8.7 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. ચતુષ્કોણના ખૂણાઓનો સરવાળો 360° થાય છે.

2. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો વિકર્ણ તેને બે એકરૂપ ત્રિકોણમાં વિભાજિત કરે છે.

3. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં,

   (i) સામસામેની બાજુઓ સમાન હોય છે. (ii) સામસામેના ખૂણાઓ સમાન છે.

   (iii) વિકર્ણો એકબીજાને દુભાગે છે.

4. જો ચતુષ્કોણમાં (i) સામસામેની બાજુઓ સમાન હોય અથવા (ii) સામસામેના ખૂણાઓ સમાન હોય અથવા (iii) વિકર્ણો એકબીજાને દુભાગે અથવા (iv) સામસામેની બાજુઓની કોઈપણ એક જોડની બાજુઓ સમાન અને સમાંતર હોય, તો તે ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

5. લંબચોરસના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે છે અને સમાન છે અને તેનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે.

6. સમબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર કાટખૂણે દુભાગે છે અને તેનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે.

7. ચોરસના વિકર્ણો પરસ્પર કાટખૂણે દુભાગે છે અને સમાન છે અને તેનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે.

8. ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને જોડતો રેખાખંડ એ ત્રીજી બાજુને સમાંતર છે અને તેનાથી અડધો છે.

9. ત્રિકોણની એક બાજુના મધ્યબિંદુમાંથી પસાર થતી અને બીજી બાજુને સમાંતર રેખા ત્રીજી બાજુને દુભાગે છે.

10. ચતુષ્કોણની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને ક્રમમાં જોડવાથી બનતો ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

પ્રકરણ 9

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ અને ત્રિકોણનાં ક્ષેત્રફળ

9.1 પ્રાસ્તાવિક

પ્રકરણ 5માં તમે જોઈ ગયાં કે ભૂમિતિના અભ્યાસનો પ્રારંભ ખેતરોની સીમાઓનું પુન:નિર્માણ કરવા માટે અને તેને યોગ્ય ભાગમાં વહેંચવાની પ્રક્રિયામાં જમીનના માપનથી થયો. ઉદાહરણ તરીકે એક ખેડૂત બુધિયા પાસે ત્રિકોણાકાર ખેતર હતું અને તે પોતાની બે પુત્રી અને એક પુત્રને સરખે ભાગે વહેંચવા માંગતો હતો. તેણે ત્રિકોણાકાર ખેતરનું ક્ષેત્રફળ શોધ્યા વગર ફક્ત એક બાજુને બરાબર ત્રણ ભાગમાં વહેંચી અને આ બાજુને વિભાજિત કરતાં બે બિંદુઓને તેની સામેના શિરોબિંદુ સાથે જોડી દીધા. આ રીતે ખેતર બરાબર ત્રણ ભાગમાં વહેંચાઈ ગયું અને તેણે પોતાના દરેક બાળકને એક-એક ભાગ વહેંચી દીધો. શું તમને લાગે છે કે આ પ્રમાણે તેણે જે ત્રણ ભાગ પાડ્યા તે પ્રમાણે તેમનું ક્ષેત્રફળ ખરેખર સમાન હતું? આ પ્રકારના પ્રશ્નો અને બીજી આવી સમસ્યાના ઉકેલ શોધવા માટે જેના વિશે તમે અગાઉનાં ધોરણમાં શીખી ગયાં છો તેવા સમતલ આકૃતિઓનાં ક્ષેત્રફળ વિશે પુન:વિચાર કરવાની જરૂર છે.

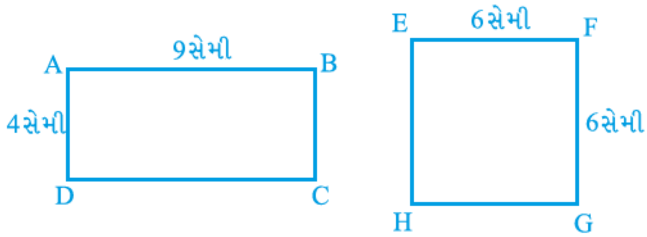
તમને યાદ હશે કે સરળ બંધ આકૃતિ દ્વારા ઘેરાયેલા સમતલ ભાગને તે આકૃતિનો ***સમતલીય પ્રદેશ*** *(planer region)* કહેવાય છે. આ સમતલીય પ્રદેશના ***પરિમાણ*** *(magnitude)* કે ***માપ*** *(measure)*ને આકૃતિનું ***ક્ષેત્રફળ*** *(area)* કહે છે. આ પરિમાણ કે માપને હંમેશાં એક સંખ્યા [કોઈક ***એકમ*** *(unit)*માં] ની મદદથી દર્શાવવામાં આવે છે. જેમકે 5 સેમી^{2}, 8 મીટર^2, 3 હેક્ટર વગેરે. તેથી આપણે કહી શકીએ કે આકૃતિનું ક્ષેત્રફળ (કોઈ એકમમાં) એક સંખ્યા છે અને તે આકૃતિથી ઘેરાયેલા સમતલના ભાગ સાથે સંગત હોય છે.

આપણે અગાઉનાં ધોરણમાં અને પ્રકરણ 7 ના અભ્યાસ દ્વારા એકરૂપ આકૃતિઓના ખ્યાલથી પરિચિત થયા છીએ કે ''જો બે આકૃતિઓનાં આકાર સમાન હોય અને તેમનાં માપ પણ સમાન હોય, તો તે બે આકૃતિઓ એકરૂપ કહેવાય.'' બીજા શબ્દોમાં જો બે આકૃતિઓ A અને B એકરૂપ હોય (આકૃતિ 9.1 જુઓ.) તો તમે એક અનુરેખણ કાગળ *(Tracing Paper)*નો

આકૃતિ 9.1

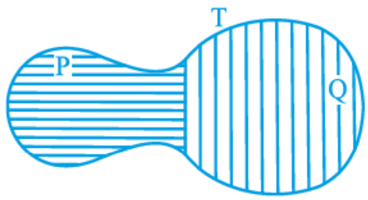
ઉપયોગ કરી, એક આકૃતિને બીજી આકૃતિ પર એવી રીતે મૂકી શકો કે એક આકૃતિ, બીજી આકૃતિને સંપૂર્ણપણે ઢાંકી દે એટલે કે તેની ઉપર બંધ બેસતી આવી જાય. *તેથી '' જો આ બંને આકૃતિઓ A અને B એકરૂપ હોય, તો તેમનાં ક્ષેત્રફળ પણ ચોક્કસ સમાન જ હોવા જોઈએ''.* તેમ છતાં, આથી ઊલટું વિધાન સત્ય નથી. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો "સમાન ક્ષેત્રફળ ધરાવતી બે આકૃતિઓ એકરૂપ હોય તે જરૂરી નથી.''

ઉદાહરણ તરીકે આકૃતિ 9.2 માં લંબચોરસ ABCD અને લંબચોરસ EFGH નાં ક્ષેત્રફળ (9×4 સેમી^{2} અને 6×6 સેમી^{2}) સમાન છે. પરંતુ સ્પષ્ટ છે કે બંને એકરૂપ નથી (શા માટે?)



આકૃતિ 9.2

હવે નીચેની આકૃતિ 9.3 જુઓ :



આકૃતિ 9.3

તમે જોયું કે આકૃતિ T દ્વારા બનતો સમતલીય પ્રદેશ એ આકૃતિઓ P અને Q દ્વારા બનતા બે સમતલીય પ્રદેશો દ્વારા ભેગા થઈ બન્યો છે. તમે સરળતાથી જોઈ શકો છો કે

આકૃતિ T નું ક્ષેત્રફળ = આકૃતિ P નું ક્ષેત્રફળ + આકૃતિ Q નું ક્ષેત્રફળ.

તમે આકૃતિ A ના ક્ષેત્રફળને ar(A), આકૃતિ B ના ક્ષેત્રફળને ar(B) અને આકૃતિ Tના ક્ષેત્રફળને ar(T) સંકેતથી દર્શાવી શકો છો. અને તે જ પ્રમાણે તમે કહી શકો કે કોઈ આકૃતિનું ક્ષેત્રફળ એટલે કે આકૃતિ દ્વારા ઘેરાયેલા સમતલના ભાગથી સંકળાયેલ નીચે આપેલ બે ગુણધર્મો ધરાવતી એક સંખ્યા (કોઈ એકમમાં) છે.

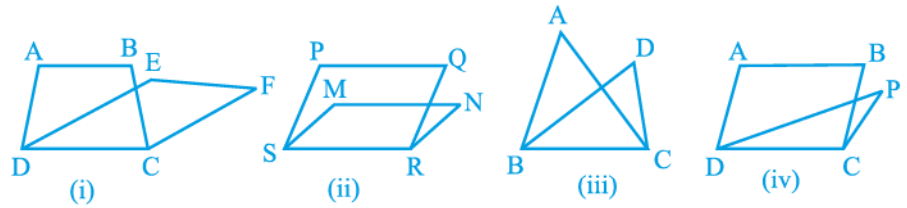
(1) *જો A અને B એકરૂપ આકૃતિઓ હોય તો* $ar(A) = ar(B)$; *અને*

(2) *જો આકૃતિ T દ્વારા બનતો પ્રદેશ, બે આકૃતિઓ P અને Q દ્વારા બનતા એકબીજાને આચ્છાદિત ન કરે તેવા પ્રદેશો (non-overlapping) ભેગા થઈને બને તો* $ar(T) = ar(P) + ar(Q)$.

તમે અગાઉનાં ધોરણમાં વિવિધ આકૃતિઓ જેવી કે લંબચોરસ, ચોરસ, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ, ત્રિકોણ વગેરેનાં ક્ષેત્રફળ શોધવાનાં કેટલાંક સૂત્રો વિશે માહિતી મેળવી છે. આ પ્રકરણમાં એક જ પાયા પર અને સમાંતર રેખાઓની જોડની રેખાઓ વચ્ચે હોય તે શરત ધરાવતી ભૌમિતિક આકૃતિઓનાં ક્ષેત્રફળ વચ્ચેના કોઈક સંબંધનો અભ્યાસ કરીને ઉપરોક્ત સમજને વધુ સ્પષ્ટ કરવાનો પ્રયત્ન કરવામાં આવશે. આ અભ્યાસ ત્રિકોણની સમરૂપતાને આધારિત કેટલાંક પરિણામોને સમજવા માટે પણ ઉપયોગી થશે.

9.2 એક જ પાયા ઉપર અને સમાંતર રેખાઓ વચ્ચેની આકૃતિઓ

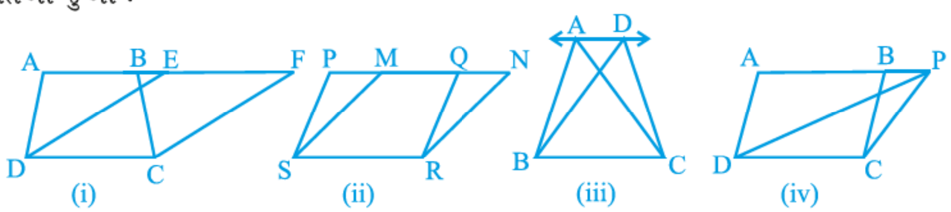
નીચે આપેલી આકૃતિઓ જુઓ :



આકૃતિ 9.4

આકૃતિ 9.4(i) માં સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCD અને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ EFCD માં એક બાજુ DC સામાન્ય છે. આપણે કહીએ કે સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCD અને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ EFCD ***એક જ પાયા*** DC પર આવેલા છે. આ પ્રમાણે આકૃતિ 9.4 (ii) માં સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ PQRS અને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ MNRS એક જ પાયા SR પર આવેલા છે. આકૃતિ 9.4(iii) માં ત્રિકોણ ABC અને ત્રિકોણ DBC એક જ પાયા BC પર આવેલા છે તથા આકૃતિ 9.4(iv) માં સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD અને ત્રિકોણ PDC એક જ પાયા DC પર આવેલા છે.

નીચેની આકૃતિઓ જુઓ :

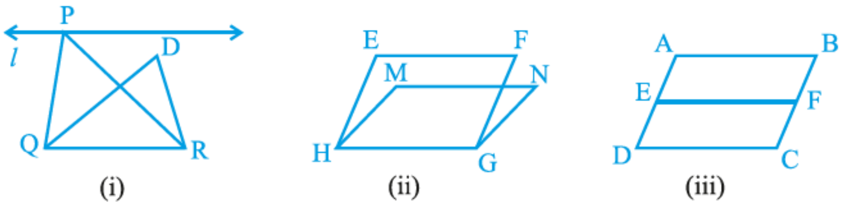


આકૃતિ 9.5

આકૃતિ 9.5(i) માં સ્પષ્ટ છે કે, સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCD અને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ EFCD એક જ પાયા DC પર આવેલા છે. આ ઉપરાંત સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCD નાં પાયા DC ની સામેનાં શિરોબિંદુઓ A અને B તથા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ EFCDનાં પાયા DC ના સામેનાં શિરોબિંદુઓ E અને F એ DC ને સમાંતર રેખા AF પર આવેલાં છે. તેથી આપણે કહી શકીએ કે સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCD અને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ EFCD એક જ પાયા પર તથા સમાંતર રેખાઓ AF અને DC ની એક જોડની રેખાઓ વચ્ચે આવેલા છે. આવી જ રીતે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ PQRS અને MNRS એક જ પાયા SR પર અને સમાંતર રેખાઓ PN અને SR ની એક જ જોડની રેખાઓ વચ્ચે આવેલા છે. [આકૃતિ 9.5 (ii) જુઓ.] તેવી જ રીતે ચતુષ્કોણ PQRS નાં શિરોબિંદુઓ P અને Q અને ચતુષ્કોણ MNRS નાં શિરોબિંદુઓ M અને N એ પાયા SR ને સમાંતર રેખા PN પર આવેલાં છે. આ જ પ્રમાણે ત્રિકોણ ABC અને ત્રિકોણ DBC એક જ પાયા BC પર તથા સમાંતર રેખાઓ AD અને BC ની એક જ જોડની રેખાઓ વચ્ચે આવેલાં છે. [આકૃતિ 9.5 (iii) જુઓ.] અને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD અને ત્રિકોણ PCD એક જ પાયા DC પર અને સમાંતર રેખાઓ AP અને DC ની એક જ જોડની રેખાઓ વચ્ચે આવેલા છે [આકૃતિ 9.5(iv) જુઓ.]

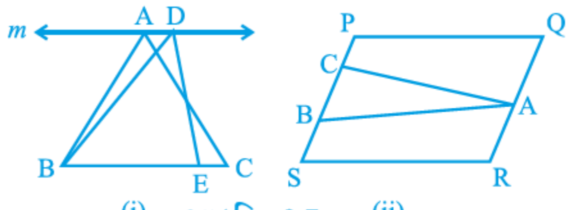
જ્યારે બે આકૃતિઓનો પાયો સામાન્ય હોય અને દરેક આકૃતિના સામાન્ય પાયાની સામેનાં શિરોબિંદુઓ (અથવા શિરોબિંદુ) પાયાને સમાંતર કોઈ એક રેખા પર આવેલાં હોય ત્યારે તે બે આકૃતિઓ એક જ પાયા પર અને સમાંતર રેખાઓની એક જ જોડની રેખાઓ વચ્ચે આવેલી છે તેમ કહેવાય.

ઉપરનાં વિધાનને ધ્યાનમાં રાખી તમે કહી ન શકો કે, આકૃતિ 9.6(i)ના Δ PQR અને Δ DQR એ સમાંતર રેખાઓ l અને QR ની વચ્ચે આવેલા છે.



આકૃતિ 9.6

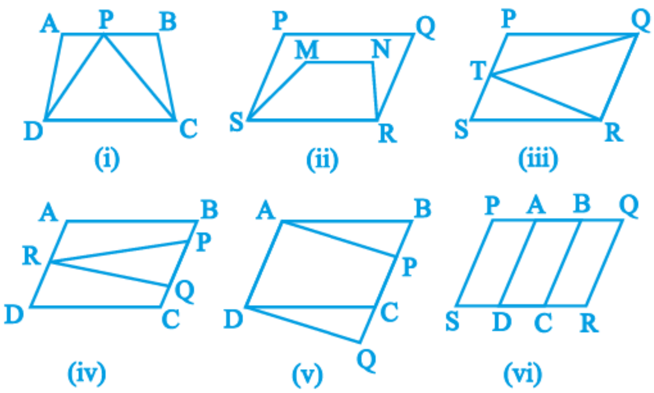
આ જ પ્રમાણે આકૃતિ 9.6(ii)માં સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ EFGH અને MNGH સમાંતર રેખાઓ EF અને HG વચ્ચે આવેલા છે તેમ ન કહી શકો. ઉપરાંત આકૃતિ 9.6(iii) માં સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD અને EFCDએ સમાંતર રેખાઓ AB અને DC વચ્ચે આવેલા છે તેમ ન કહી શકો. (ભલે તે એક પાયા DC પર અને સમાંતર રેખાઓ AD અને BC ની વચ્ચે આવેલા હોય.) આ પરથી તમારે ધ્યાન રાખવું જોઈએ કે ‘‘બે સમાંતર રેખાઓમાંથી એક રેખા સામાન્ય પાયામાંથી પસાર થતી હોવી જોઈએ.’’ નોંધો કે આકૃતિ 9.7(i) માં ΔABC અને ΔDBE એક સમાન પાયા પર આવેલા નથી તથા આકૃતિ 9.7(ii) માં ΔABC અને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ PQRS પણ એક સમાન પાયા પર આવેલા નથી.



આકૃતિ 9.7

સ્વાધ્યાય 9.1

1. નીચેની આકૃતિઓમાં એક જ સમાન પાયા પર અને સમાંતર રેખાની એક જોડની રેખાઓ વચ્ચે કઈ આકૃતિઓ આવેલી છે? શક્ય હોય, તેવા કિસ્સામાં સામાન્ય પાયો અને સમાંતર રેખાઓ જણાવો.

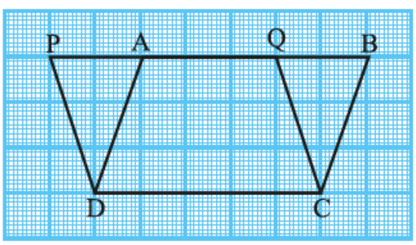


આકૃતિ 9.8

9.3 એક જ પાયા અને સમાંતર રેખાની જોડની રેખાઓ વચ્ચેના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ

આપણે હવે એક જ પાયા પર અને સમાંતર રેખાઓની જોડની રેખાઓ વચ્ચે આવેલા બે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનાં ક્ષેત્રફળો વચ્ચે કોઈ સંબંધ હોય તો તે મેળવવાનો પ્રયત્ન કરીએ. તેને સમજવા નીચેની પ્રવૃત્તિઓ કરીએ :

પ્રવૃત્તિ 1 : એક આલેખપત્રલો અને તેના ઉપર આકૃતિ 9.9 માં બતાવ્યા પ્રમાણે બે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD અને PQCD દોરો.

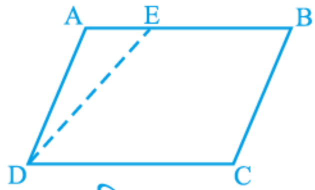


આકૃતિ 9.9

આ બંને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ એક જ પાયા DC પર અને સમાંતર રેખાઓની જોડની રેખાઓ PB અને DC ની વચ્ચે આવેલા છે. આ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણોનાં ક્ષેત્રફળ તેમાં આવેલા ચોરસને ગણીને કેવી રીતે શોધી શકાય તે તમે યાદ કરો.

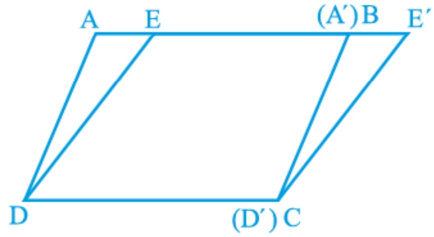
આ પદ્ધતિમાં આપેલી આકૃતિ દ્વારા ઘેરાયેલા પૂર્ણ ચોરસની સંખ્યા, જેનો અડધાથી વધારે ભાગ ઘેરાયેલો છે તે ચોરસની સંખ્યા અને જેનો અડધો ભાગ ઘેરાયેલો છે તે ચોરસની સંખ્યાનો સરવાળો કરીને આકૃતિનું ક્ષેત્રફળ શોધી શકાય છે. જે ચોરસનો અડધાથી ઓછો ભાગ આકૃતિથી ઘેરાયેલો છે તે ચોરસને કાઢી નાખવામાં આવે છે. તો તમને બંને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ (લગભગ) 15 ચોરસ એકમ મળશે. આલેખપત્ર પર બીજા કેટલાક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની જોડીઓ દોરીને આ પ્રવૃતિનું* પુનરાવર્તન કરો તો તમે શું અવલોકન કરો છો ? શું બંને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનાં ક્ષેત્રફળ ભિન્ન છે કે સમાન છે ? હકીકતમાં તે સમાન છે. તેથી આ પ્રવૃત્તિ પરથી તમને એક તારણ મળશે કે *"એક જ પાયા પર આવેલા અને સમાંતર રેખાની એક જોડની રેખાઓ વચ્ચે આવેલા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ સમક્ષેત્ર હોય છે"*. તેમ છતાં તમે યાદ રાખો કે આ ફક્ત ચકાસણી જ છે. * આ પ્રવૃત્તિ જીઓ બોર્ડ દ્વારા પણ કરાવી શકાય.

પ્રવૃત્તિ 2 : એક મોટા કાગળ પર અથવા પૂંઠા પર એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD દોરો. આકૃતિ 9.10માં બતાવ્યા પ્રમાણે એક રેખાખંડ DE દોરો.



આકૃતિ 9.10

હવે એક બીજા કાગળ પર કે પૂંઠા પર અનુરેખણ પત્રની મદદથી Δ ADE ને એકરૂપ હોય તેવો ત્રિકોણ A′ D′ E′ ને કાગળમાંથી કાપી લો. હવે આકૃતિ 9.11 માં દર્શાવ્યા મુજબ Δ A′D′E′ ને એવી રીતે ગોઠવો જેથી A′D′ બાજુ એ BC પર ગોઠવાય. ધ્યાન રાખો કે અહીં બે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD અને EE′CD છે. તે એક જ પાયા DC પર અને સમાંતર રેખાઓ AE′ અને DC ની વચ્ચે આવેલા છે.



આકૃતિ 9.11

તમે તેમનાં ક્ષેત્રફળો વિશે શું કહી શકો?

$$\Delta\ ADE \cong \Delta\ A'D'E'$$

$$\therefore ar\ (ADE) = ar\ (A'D'E')$$

વળી, $ar\ (ABCD) = ar\ (ADE) + ar\ (EBCD)$

$$= ar\ (A'D'E') + ar\ (EBCD)$$

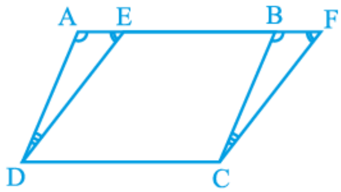
$$= ar\ (EE'CD)$$

તેથી બંને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ સમક્ષેત્ર છે.

તો ચાલો આપણે આવા બે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણોનાં ક્ષેત્રફળ વચ્ચેના આ સંબંધને સાબિત કરવાનો પ્રયત્ન કરીએ.

પ્રમેય 9.1 : *એક જ પાયા પર આવેલા અને બે સમાંતર રેખાઓની એક જોડની રેખાઓ વચ્ચે આવેલા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણોનાં ક્ષેત્રફળ સમાન હોય છે.*

સાબિતી : એક જ પાયા DC પર અને સમાંતર રેખાઓ AF અને DC ની વચ્ચે બે



આકૃતિ 9.12

* *આ પ્રવૃત્તિ જીઓ બોર્ડ દ્વારા પણ કરી શકાય.*

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD અને EFCD આવેલા છે. (આકૃતિ 9.12 જુઓ.)

આપણે *ar* (ABCD) = *ar* (EFCD) સાબિત કરવું છે.

Δ ADE અને Δ BCFમાં

$\angle$DAE = $\angle$CBF (AD $\parallel$ BC અને છેદિકા AF થી બનતા અનુકોણ) (1)

$\angle$AED = $\angle$BFC (ED $\parallel$ FC અને છેદિકા AF થી બનતા અનુકોણ) (2)

તેથી, $\angle$ADE = $\angle$BCF (ત્રિકોણના ખૂણાઓના સરવાળાનો નિયમ) (3)

તથા AD = BC (સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCDની સામસામેની બાજુઓ) (4)

$\therefore$ Δ ADE $\cong$ Δ BCF [પરિણામ (1), (3) અને (4) પરથી ખૂબાખૂ નિયમનો ઉપયોગ કરીને]

તેથી, *ar* (ADE) = *ar* (BCF) (એકરૂપ આકૃતિઓનાં ક્ષેત્રફળ સમાન હોય) (5)

હવે, *ar* (ABCD) = *ar* (ADE) + *ar* (EDCB)

= *ar* (BCF) + *ar* (EDCB) [(5)પરથી]

= *ar* (EFCD)

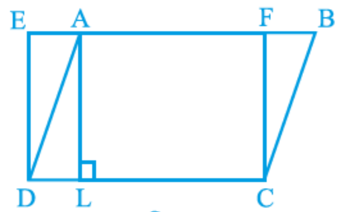
આમ, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD અને EFCD સમક્ષેત્ર છે. ■

ઉપરના પ્રમેયનો ઉપયોગ સમજાય તેવાં કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 1 : આકૃતિ 9.13 માં ABCD એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ અને EFCD એક લંબચોરસ છે અને AL $\perp$ DC છે. સાબિત કરો કે,

(i) *ar* (ABCD) = *ar* (EFCD)

(ii) *ar* (ABCD) = DC × AL



આકૃતિ 9.13

ઉકેલ : (i) લંબચોરસ એ હંમેશાં સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય છે.

તેથી *ar* (ABCD) = *ar* (EFCD) (પ્રમેય 9.1)

(ii) ઉપર્યુક્ત પરિણામ પરથી

ar (ABCD) = DC × FC (લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ = લંબાઈ × પહોળાઈ) (1)

અહીં AL $\perp$ DC છે. તેથી AFCL પણ એક લંબચોરસ થાય.

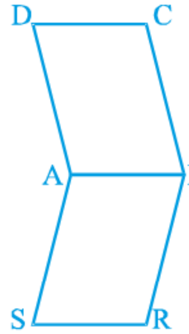
AL = FC (2)

ar (ABCD) = DC × AL [પરિણામ (1) અને (2)પરથી]

શું ઉપર્યુક્ત પરિણામ (ii) પરથી જોઈ શકશો કે એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ તેની કોઈ એક બાજુ અને તેને અનુરૂપ વેધના ગુણાકાર જેટલું હોય છે? શું તમને યાદ છે કે ધોરણVII માં સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનાં ક્ષેત્રફળનું સૂત્ર શીખી ગયાં છો? આ સૂત્રના આધારે પ્રમેય 9.1 ને ફરીથી નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

એક જ પાયા પર (અથવા સમાન પાયા) પર આવેલા અને સમાંતર રેખાઓની એક જોડની રેખાઓ વચ્ચે આવેલા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણોનાં ક્ષેત્રફળ સમાન હોય છે.

શું તમે ઉપરના વિધાનનું પ્રતીપ લખી શકો? તે આ પ્રમાણે છે. *''એક જ પાયા (અથવા સમાન પાયા)પર આવેલા અને પાયાની (સમાન પાયાની) એક જ બાજુએ આવેલા તથા સમાન ક્ષેત્રફળો ધરાવતા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણો બે સમાંતર રેખાઓની એક જોડની રેખાઓ વચ્ચે આવેલા હોય છે જેમાંની એક પાયાને સમાવતી રેખા છે.''* શું પ્રતીપ સાચું છે ? તમે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ક્ષેત્રફળના સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને પ્રતીપ સાબિત કરો.

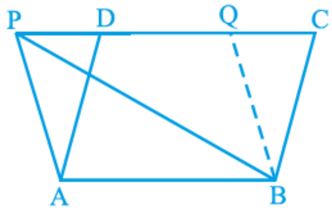


આકૃતિ 9.12 (1)

જો ચતુષ્કોણો સમાન પાયાની કે પાયાની એક જ બાજુએ ન હોય તો આકૃતિ 9.12 (1) જેવી પરિસ્થિતિ ઉભી થાય.

ઉદાહરણ 2 : જો કોઇ ત્રિકોણ અને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ એક જ પાયા અને બે સમાંતર રેખાઓની એક જોડની રેખાઓ વચ્ચે આવેલા હોય, તો સાબિત કરો કે ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ક્ષેત્રફળ કરતાં અડધું હોય છે.

ઉકેલ : ધારો કે Δ ABP અને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD એક જ પાયા AB પર અને સમાંતર રેખાઓ AB અને PC ની વચ્ચે આવેલા છે. (આકૃતિ 9.14 જુઓ.)



આકૃતિ 9.14

અહીં તમે $ar\ (PAB) = \frac{1}{2}\ ar\ (ABCD)$ સાબિત કરવા ઈચ્છો છો.

એક બીજો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABQP મેળવવા માટે BQ $\parallel$ AP દોરો. હવે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણો ABQP અને ABCD એક જ પાયા AB પર અને સમાંતર રેખાઓ AB અને PC ની વચ્ચે આવેલા છે.

$\therefore\ ar\ (ABQP) = ar\ (ABCD)$ (પ્રમેય 9.1) (1)

પરંતુ, $\Delta PAB \cong \Delta BQP$ (વિકર્ણ PB એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABQP ને બે એકરૂપ ત્રિકોણમાં વિભાજિત કરે છે.)

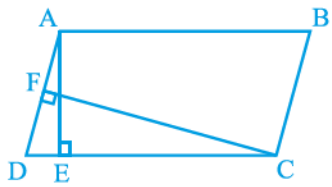
$\therefore\ ar\ (PAB) = ar\ (BQP)$ (2)

$\therefore\ ar\ (PAB) = \frac{1}{2}\ ar\ (ABQP)$ [પરિણામ (2) પરથી] (3)

$\therefore\ ar\ (PAB) = \frac{1}{2}\ ar\ (ABCD)$ [(1) અને (3)પરથી]

સ્વાધ્યાય 9.2

1. આકૃતિ 9.15 માં ABCD એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. AE $\perp$ DC અને CF $\perp$ AD છે. જો AB = 16 સેમી, AE = 8 સેમી અને CF = 10 સેમી, તો AD શોધો.



આકૃતિ 9.15

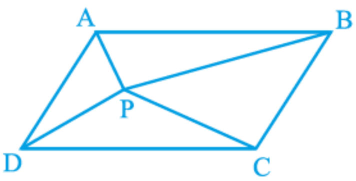
2. જો E, F, G અને H એ અનુક્રમે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD ની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓ હોય, તો સાબિત કરો કે $ar\ (EFGH) = \frac{1}{2}\ ar\ (ABCD)$.

3. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD ની બાજુઓ DC અને AD પર અનુક્રમે બિંદુઓ P અને Q આવેલા છે તો $ar\ (APB) = ar\ (BQC)$ થાય તેમ સાબિત કરો.

4. આકૃતિ 9.16 માં P એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD ના અંદરના ભાગમાં આવેલું કોઈ બિંદુ છે, તો સાબિત કરો કે

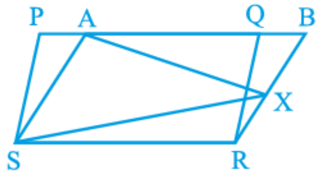
   (i) $ar\ (APB) + ar\ (PCD) = \frac{1}{2}\ ar\ (ABCD)$

   (ii) $ar\ (APD) + ar\ (PBC) = ar\ (APB) + ar\ (PCD)$



આકૃતિ 9.16

[સૂચન : P માંથી પસાર થતી અને AB ને સમાંતર એક રેખા દોરો.]



આકૃતિ 9.17

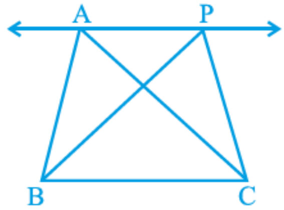
5. આકૃતિ 9.17 માં PQRS અને ABRS સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે તથા બિંદુ X એ બાજુ BR પર આવેલું બિંદુ છે તો સાબિત કરો કે,

(i) $ar\,(PQRS) = ar\,(ABRS)$.

(ii) $ar\,(AXS) = \frac{1}{2}\,ar\ (PQRS)$.

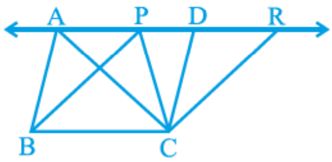
6. એક ખેડૂત પાસે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ PQRS આકારનું એક ખેતર હતું. તેણે RS પર એક બિંદુ A લીધું અને તેને P અને Q સાથે જોડી દીધું. તો ખેતર કેટલા ભાગમાં વહેંચાય છે ? આ ભાગોનો આકાર કેવો છે? આ ખેડૂત ખેતરમાં ઘઉં અને કઠોળ સમાન ભાગમાં અને જુદાજુદા ઉગાડવા માંગે છે. તેણે આ કાર્ય કેવી રીતે કરવું જોઈએ?

9.4 એક જ પાયા પર આવેલા અને સમાંતર રેખાઓની જોડની રેખાઓ વચ્ચે આવેલા ત્રિકોણ



આકૃતિ 9.18

ચાલો, આપણે આકૃતિ 9.18 જોઈએ, એક જ પાયા BC અને સમાંતર રેખાઓ BC અને AP ની વચ્ચે આવેલા હોય તેવા બે ત્રિકોણો ABC અને PBC ના ક્ષેત્રફળ વિશે શું કહી શકાય ? આ પ્રશ્નનો ઉત્તર મેળવવા તમે એક આલેખપત્ર લઈ તેના પર એક જ પાયો ધરાવતા અને સમાંતર રેખાની જોડ વચ્ચે આવેલા ત્રિકોણોની કેટલીક જોડ દોરીને તેનાથી ઘેરાયેલા ચોરસની ગણતરી કરી તેમનું ક્ષેત્રફળ શોધવાની પ્રવૃત્તિ કરો. દરેક વખતે તમને બંને ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળો લગભગ સમાન મળશે. આ પ્રવૃત્તિ જીઓ બોર્ડના ઉપયોગથી પણ કરી શકાય છે. તમને ફરીથી બંને ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળ (લગભગ) સમાન મળશે. આ પ્રશ્નનો તાર્કિક ઉકેલ મેળવવા માટે તમે નીચે પ્રમાણે આગળ વધી શકો છો :



આકૃતિ 9.19

આકૃતિ 9.18 માં CD ∥ BA અને CR ∥ BP થાય તે રીતે બિંદુઓ D અને R ને રેખા AP પર લો. (આકૃતિ 9.19 જુઓ.)

આમાંથી તમને એક જ પાયા BC પર આવેલા અને સમાંતર રેખાઓ BC અને AR ની વચ્ચે આવેલા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ PBCR અને ABCD મળશે.

તેથી, $ar\ (ABCD) = ar\ (PBCR)$ (કેમ?)

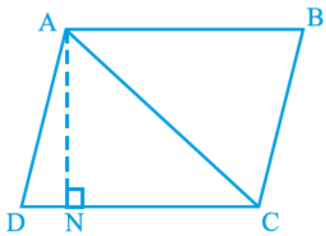
$\Delta\, ABC \cong \Delta\, CDA$ અને $\Delta\, PBC \cong \Delta\, CRP$ (કેમ?)

$ar\ (ABC) = \frac{1}{2}\,ar\ (ABCD)$ અને $ar\ (PBC) = \frac{1}{2}\,ar\ (PBCR)$ (કેમ?)

તેથી, $ar\ (ABC) = ar\ (PBC)$ સાબિત થાય છે

આ રીતે તમે નીચેના પ્રમેય સુધી પહોંચ્યા :

પ્રમેય 9.2 : *એક જ પાયા (અથવા સમાન પાયા) પર આવેલા અને બે સમાંતર રેખાઓની જોડની રેખાઓ વચ્ચે આવેલા બે ત્રિકોણનાં ક્ષેત્રફળ સમાન હોય છે.*



આકૃતિ 9.20

હવે, ધારો કે ABCD એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે અને તેનો એક વિકર્ણ AC છે. (આકૃતિ 9.20 જુઓ.) $AN \perp DC$ લઈએ. નોંધો કે,

$\Delta\, ADC \cong \Delta\, CBA$ (શા માટે ?)

$\therefore\ ar\ (ADC) = ar\ (CBA)$ (શા માટે ?)

$\therefore\ ar\ (ADC) = \frac{1}{2}\,ar\ (ABCD)$

$$= \frac{1}{2}(DC \times AN) \qquad \text{(શા માટે ?)}$$

$\therefore \Delta$ ADC નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \times$ પાયો DC $\times$ અનુરૂપ વેધ AN

બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો કોઈ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ તેના પાયા અથવા કોઈ બાજુ અને અનુરૂપ વેધ (અથવા ઊંચાઈ)ના ગુણાકારથી અડધું હોય છે. તમને યાદ હશે કે તમે ધોરણ-VII માં ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળનું આ સૂત્ર ભણી ગયાં છો. આ સૂત્ર પરથી તમે જોઈ શકો કે એક જ પાયા અથવા સમાન પાયાવાળા અને સમાન ક્ષેત્રફળવાળા ત્રિકોણના અનુરૂપ વેધની લંબાઈ સમાન હશે.

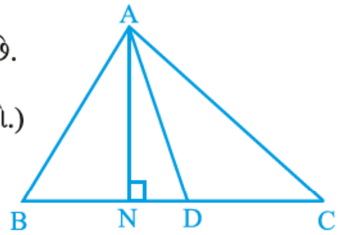
સમાન અનુરૂપ વેધ મેળવવા માટે બંને ત્રિકોણ બે સમાંતર રેખાઓની જોડ વચ્ચે હોવા જોઈએ. તેથી આપણે પ્રમેય 9.2 ના પ્રતિપ્રમેય સુધી પહોંચીશું.

પ્રમેય 9.3 : *એક જ પાયા (સમાન પાયા) પર આવેલા અને એક જ પાયા(સમાન પાયા)ની એક જ બાજુએ આવેલા તથા સમાન ક્ષેત્રફળો ધરાવતા ત્રિકોણો બે સમાંતર રેખાઓની જોડની રેખાઓ વચ્ચે આવેલા હોય છે જેમાંની એક રેખા પાયાને સમાવતી રેખા છે.*

હવે આ ઉપર્યુક્ત પરિણામોના ઉપયોગ બતાવવા માટે કેટલાંક ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ 3 : સાબિત કરો કે ત્રિકોણની મધ્યગા ત્રિકોણનું બે સમક્ષેત્ર ત્રિકોણમાં વિભાજન કરે છે.

ઉકેલ : ત્રિકોણ ABC લઈએ અને તેની મધ્યગાઓ પૈકી એક મધ્યગા AD છે. (આકૃતિ 9.21 જુઓ.)



આકૃતિ 9.21

તમે બતાવવા ઈચ્છો છો કે, *ar* (ABD) = *ar* (ACD).

ક્ષેત્રફળના સૂત્રમાં વેધનો સમાવેશ થતો હોવાથી, ચાલો આપણે $AN \perp BC$ દોરીએ.

હવે $ar\,(ABD) = \frac{1}{2} \times$ પાયો $\times$ વેધ (Δ ABD માટે)

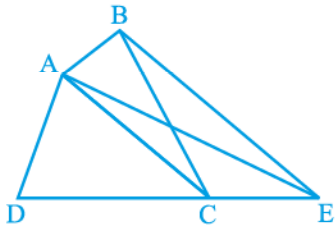
$= \frac{1}{2} \times BD \times AN$

$= \frac{1}{2} \times CD \times AN$ (BD = CD)

$= \frac{1}{2} \times$ પાયો $\times$ વેધ (Δ ACD માટે)

$= ar\,(ACD)$

ઉદાહરણ 4 : આકૃતિ 9.22 માં ABCD એક ચતુષ્કોણ છે. BE $\parallel$ AC છે. રેખા DC ને લંબાવતા BE ને E બિંદુમાં છેદે છે. તો સાબિત કરો કે Δ ADE નું ક્ષેત્રફળ એ ચતુષ્કોણના ક્ષેત્રફળ જેટલું થાય.



આકૃતિ 9.22

ઉકેલ : આકૃતિનું ધ્યાનપૂર્વક નિરીક્ષણ કરો.

Δ BAC અને Δ EAC એ એક જ પાયા AC પર આવેલા છે અને સમાંતર રેખા AC અને BE ની વચ્ચે છે.

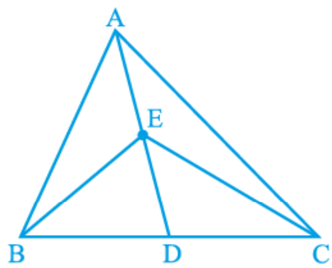
તેથી, $ar(BAC) = ar(EAC)$ (પ્રમેય 9.2 પ્રમાણે)

હવે, $ar(BAC) + ar(ADC) = ar(EAC) + ar(ADC)$ (બંને બાજુ સમાન ક્ષેત્રફળ ઉમેરતા)

અથવા $ar(ABCD) = ar(ADE)$

સ્વાધ્યાય 9.3

1. આકૃતિ 9.23 માં Δ ABC ની એક મધ્યગા AD પર કોઈપણ બિંદુ E છે. તો સાબિત કરો કે *ar* (ABE) = *ar* (ACE).

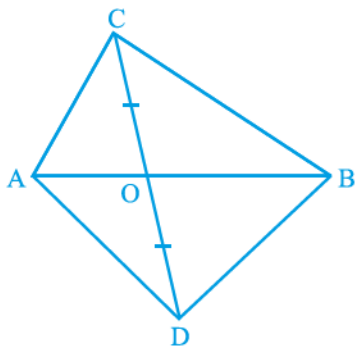


આકૃતિ 9.23

2. ABC માં મધ્યગા AD નું મધ્યબિંદુ E હોય, તો *ar* (BED) = $\frac{1}{4}$ *ar*(ABC) થાય તેમ સાબિત કરો.

3. સાબિત કરો કે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો તેને સમાન ક્ષેત્રફળોવાળા ચાર ત્રિકોણમાં વિભાજિત કરે છે.

4. આકૃતિ 9.24માં બે ત્રિકોણ ABC અને ABD સમાન પાયા AB પર આવેલા છે. જો AB એ રેખાખંડ CD ને O બિંદુએ દુભાગે, તો સાબિત કરો કે *ar*(ABC) = *ar* (ABD).



આકૃતિ 9.24

5. Δ ABC ની બાજુઓ BC, CA અને AB નાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે D, E અને F છે તો સાબિત કરો કે,

   (i) BDEF એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. (ii) *ar* (DEF) = $\frac{1}{4}$ *ar* (ABC)

   (iii) *ar* (BDEF) = $\frac{1}{2}$ *ar* (ABC)

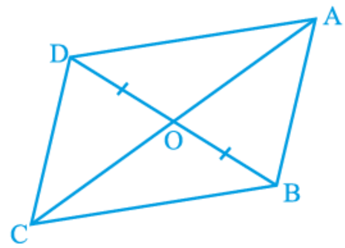
6. આકૃતિ 9.25 માં ચતુષ્કોણ ABCD ના વિકર્ણો AC અને BD પરસ્પર O બિંદુમાં OB = OD થાય તે રીતે છેદે છે. જો AB = CD હોય, તો સાબિત કરો કે .

   (i) *ar* (DOC) = *ar* (AOB)

   (ii) *ar* (DCB) = *ar* (ACB)

   (iii) DA ∥ CB અથવા ABCD એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

   [**સૂચન** : D અને B માંથી AC પર લંબ દોરો.]



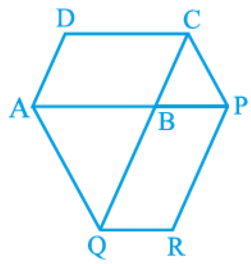
આકૃતિ 9.25

7. જો Δ ABC ની બાજુઓ AB અને AC પર અનુક્રમે D અને E બિંદુઓ એવી રીતે આવેલાં છે જેથી *ar* (DBC) = *ar* (EBC) થાય, તો સાબિત કરો કે DE ∥ BC.

8. Δ ABC ની બાજુ BC ને સમાંતર એક રેખા XY છે. જો BE ∥ AC અને CF ∥ AB એ રેખા XY ને અનુક્રમે E અને F આગળ છેદતી હોય, તો સાબિત કરો કે *ar* (ABE) = *ar* (ACF)

9. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD ની એક બાજુ AB ને બિંદુ P સુધી લંબાવેલી છે. બિંદુ A માંથી CP ને સમાંતર દોરેલી એક રેખા, CB ને Q માં મળે છે જેથી કરીને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ PBQR બને છે (આકૃતિ 9.26 જુઓ.) તો સાબિત કરો કે *ar* (ABCD) = *ar* (PBQR).

   [***સૂચન***: AC અને PQ ને જોડો અને *ar* (ACQ) અને *ar* (APQ) ને સરખાવો.]



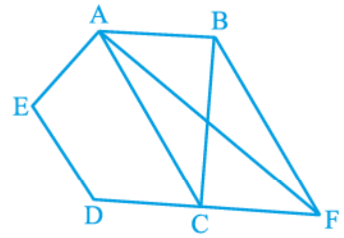
આકૃતિ 9.26

10. સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCDમાં AB || DC છે. વિકર્ણો AC અને BD પરસ્પર એકબીજાને O બિંદુમાં છેદે, તો સાબિત કરો કે *ar* (AOD) = *ar* (BOC).

11. આકૃતિ 9.27 માં ABCDE પંચકોણ છે. B માંથી AC ને સમાંતર દોરેલી રેખા DC ને F માં મળે છે. સાબિત કરો કે,

(i) *ar* (ACB) = *ar* (ACF)

(ii) *ar* (AEDF) = *ar* (ABCDE)

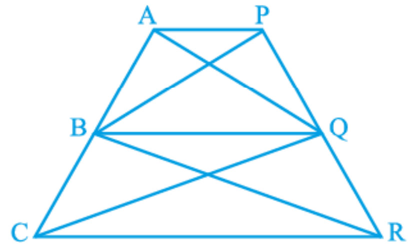


આકૃતિ 9.27

12. એક ગામના એક ખેડૂત પાસે એક ચતુષ્કોણ આકારની જમીનનો ભાગ હતો. આ ગામની ગ્રામપંચાયતે તેની પાસેથી જમીનના એક ખૂણાનો જમીનનો કેટલોક ભાગ સ્વાસ્થ્ય કેન્દ્ર બનાવવા માટે લેવાનો નિર્ણય કર્યો. ખેડૂત આ પ્રસ્તાવ એક શરત સાથે સ્વીકારે છે કે તેને પોતાની જમીનની બાજુમાં તેટલા જ ક્ષેત્રફળની જમીનનો ભાગ મળવો જોઈએ જેથી તેની કુલ જમીનનો આકાર ત્રિકોણ બને. તો તમે દર્શાવો કે આ પ્રસ્તાવ કેવી રીતે શક્ય બનશે.

13. સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCD માં AB || DC છે. AC ને સમાંતર રેખા, AB ને X માં અને BC ને Y માં છેદે છે, તો સાબિત કરો કે *ar* (ADX) = *ar* (ACY). [**સૂચન :** CX ને જોડો.]

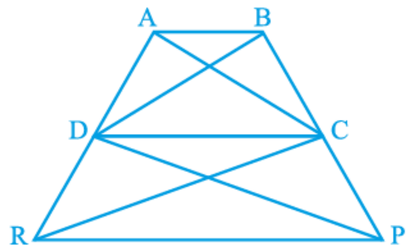
14. આકૃતિ 9.28 માં AP || BQ || CR છે તો સાબિત કરો કે *ar* (AQC) = *ar* (PBR).



આકૃતિ 9.28

15. ચતુષ્કોણ ABCD ના વિકર્ણો AC અને BD પરસ્પર એકબીજાને O બિંદુએ એવી રીતે છેદે છે કે જેથી *ar* (AOD) = *ar* (BOC) થાય, તો સાબિત કરો કે ABCD સમલંબ ચતુષ્કોણ છે.

16. આકૃતિ 9.29માં *ar*(DRC) = *ar*(DPC) છે અને *ar* (BDP) = *ar* (ARC) છે. તો ચતુષ્કોણ ABCD અને DCPR સમલંબ ચતુષ્કોણ છે તેમ સાબિત કરો.

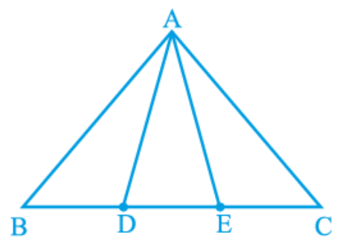


આકૃતિ 9.29

સ્વાધ્યાય 9.4 (વૈકલ્પિક)*

1. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD અને લંબચોરસ ABEF એ એક જ પાયા પર આવેલા છે અને તેમનાં ક્ષેત્રફળ સમાન છે. સાબિત કરો કે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની પરિમિતિ એ લંબચોરસની પરિમિતિ કરતાં વધારે છે.

2. આકૃતિ 9.30 માં બાજુ BC પર બે બિંદુઓ D અને E એવી રીતે આવેલાં છે જેથી BD = DE = EC થાય તો સાબિત કરો કે *ar* (ABD) = *ar* (ADE) = *ar* (AEC) છે. શું તમે હવે અનુત્તર રહેલા પ્રસ્તાવનામાં આપેલ પ્રશ્નનો જવાબ આપી શકશો કે બુધિયાના ખેતરનું બરાબર સમાન ક્ષેત્રફળવાળા ત્રણ ભાગોમાં વિભાજન થયું છે?



આકૃતિ 9.30

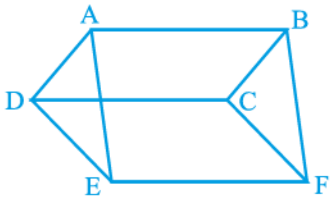
* *આ સ્વાધ્યાયને પરીક્ષાનો મુદ્દો બનાવવો નહિ.*

[**સૂચન** : નોંધો કે, BD = DE = EC લેવાથી ΔABC એ સમાન ક્ષેત્રફળવાળા ત્રણ ત્રિકોણ ABD, ADE અને AEC માં વિભાજિત થાય છે. આ જ રીતે BC નું n જેટલા સમાન ભાગમાં વિભાજિત કરતાં બિંદુઓને BCના સામેના શિરોબિંદુ સાથે જોડવાથી તમે ΔABCનું n સમાન ક્ષેત્રફળવાળા ત્રિકોણોમાં વિભાજન કરી શકો છો.]

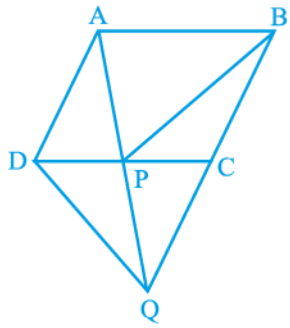
3. આકૃતિ 9.31માં ABCD, DCFE અને ABFE સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે, તો $ar\,(ADE) = ar\,(BCF)$ થાય તેમ સાબિત કરો.

4. આકૃતિ 9.32 માં ABCD એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. BC ને બિંદુ Q સુધી એવી રીતે લંબાવો જેથી AD = CQ થાય. જો AQ એ DC ને P બિંદુમાં છેદે તો સાબિત કરો કે $ar\,(BPC) = ar\,(DPQ)$.

[**સૂચન** : AC જોડો.]



આકૃતિ 9.31



આકૃતિ 9.32

5. આકૃતિ 9.33 માં ABC અને BDE બે સમભુજ ત્રિકોણ છે. બિંદુ D એ BC નું મધ્યબિંદુ છે. જો AE એ BC ને F માં છેદે તો સાબિત કરો કે,

(i) $ar\,(BDE) = \frac{1}{4}\,ar\,(ABC)$

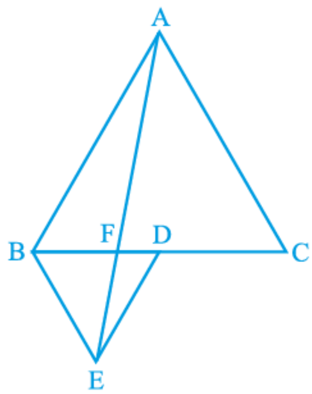
(ii) $ar\,(BDE) = \frac{1}{2}\,ar\,(BAE)$

(iii) $ar\,(ABC) = 2\,ar\,(BEC)$

(iv) $ar\,(BFE) = ar\,(AFD)$

(v) $ar\,(BFE) = 2\,ar\,(FED)$

(vi) $ar\,(FED) = \frac{1}{8}\,ar\,(AFC)$



આકૃતિ 9.33

[**સૂચન** : EC અને AD જોડો. $BE \parallel AC$ તથા $DE \parallel AB$ વગેરે સાબિત કરો.]

6. ચતુષ્કોણ ABCD ના વિકર્ણો AC અને BD પરસ્પર P બિંદુમાં છેદે તો સાબિત કરો કે,

$ar\,(APB) \times ar\,(CPD) = ar\,(APD) \times ar\,(BPC)$

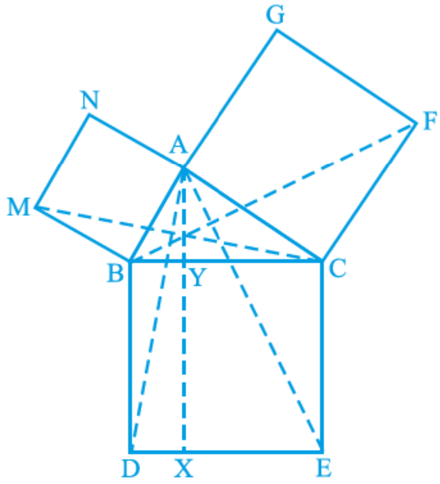
[**સૂચન** : A અને C માંથી BD પર લંબ દોરો.]

7. ΔABCની બાજુઓ AB અને AC નાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે P અને Q છે તથા R એ AP નું મધ્યબિંદુ છે તો સાબિત કરો કે,

(i) $ar\,(PRQ) = \frac{1}{2}\,ar\,(ARC)$ (ii) $ar\,(RQC) = \frac{3}{8}\,ar\,(ABC)$

(iii) $ar\,(PBQ) = ar\,(ARC)$

8. આકૃતિ 9.34 માં કાટકોણ ત્રિકોણ ABC માં ખૂણો A કાટખૂણો છે. BCED, ACFG અને ABMN અનુક્રમે બાજુઓ BC, CA અને AB પર બનેલા ચોરસ છે. રેખાખંડ $AX \perp DE$ અને તે બાજુ BC ને Y માં મળે છે. તો સાબિત કરો કે,



આકૃતિ 9.34

(i) Δ MBC $\cong$ Δ ABD

(ii) *ar* (BYXD) = 2 *ar* (MBC)

(iii) *ar* (BYXD) = *ar* (ABMN)

(iv) Δ FCB $\cong$ Δ ACE

(v) *ar* (CYXE) = 2 *ar* (FCB)

(vi) *ar* (CYXE) = *ar* (ACFG)

(vii) *ar* (BCED) = *ar* (ABMN) + *ar* (ACFG)

નોંધ : પરિણામ (vii) એ પ્રસિદ્ધ પાયથાગોરસ પ્રમેય છે. તમે ધોરણ X માં આ પ્રમેયની સરળ સાબિતી શીખશો.

9.5 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દા શીખ્યા :

1. આકૃતિનું ક્ષેત્રફળ તે આકૃતિ દ્વારા ઘેરાયેલા સમતલના ભાગ સાથે સંગત એક ધન વાસ્તવિક સંખ્યા (કોઈક એકમમાં) છે.

2. બે એકરૂપ આકૃતિઓનું ક્ષેત્રફળ એકસરખું હોય છે, પરંતુ પ્રતીપ સત્ય હોય તે જરૂરી નથી.

3. જો આકૃતિ T દ્વારા બનેલ સમતલીય પ્રદેશ, આકૃતિઓ P અને Q દ્વારા બનેલ અને એકબીજાને આચ્છાદિત ન કરતા સમતલીય પ્રદેશોથી રચાતો હોય તો, *ar* (T) = *ar* (P) + *ar* (Q) છે, જ્યાં *ar* (X) એ આકૃતિ X નું ક્ષેત્રફળ છે.

4. જો બે આકૃતિઓને એક સામાન્ય પાયો (બાજુ) હોય અને શિરોબિંદુઓ (અથવા શિરોબિંદુ) દરેક આકૃતિનાં સામાન્ય પાયાની એક જ બાજુએ, પાયાને સમાંતર રેખા પર હોય, તો બે આકૃતિઓ સમાન પાયા પર અને સમાંતર રેખાઓની એક જોડની રેખાઓ વચ્ચે આવેલી છે તેમ કહેવાય.

5. એક જ પાયા (અથવા સમાન પાયા) પર આવેલા અને બે સમાંતર રેખાની એક જોડ વચ્ચે આવેલા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણોનાં ક્ષેત્રફળ સમાન હોય છે.

6. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ, તેના પાયા અને પાયાને અનુરૂપ વેધના ગુણાકાર જેટલું હોય છે.

7. એક જ પાયા (અથવા સમાન પાયા) પર અને પાયાની એક જ બાજુએ આવેલા અને સમાન ક્ષેત્રફળવાળા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણો એ સમાંતર રેખાઓની જોડની રેખાઓ વચ્ચે આવેલા હોય છે, જે પૈકી એક પાયાને સમાવતી રેખા છે.

8. જો એક ત્રિકોણ અને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ એક જ પાયા પર અને સમાંતર રેખાની એક જોડની રેખાઓ વચ્ચે આવેલા હોય, તો ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ક્ષેત્રફળ કરતાં અડધું હોય છે.

9. એક જ પાયા (અથવા સમાન પાયા) પર આવેલા અને સમાંતર રેખાની એક જોડની રેખાઓ વચ્ચે આવેલા ત્રિકોણનાં ક્ષેત્રફળ સમાન હોય છે.

10. ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ, તેનો પાયો અને તે પાયાને અનુરૂપ વેધના ગુણાકારથી અડધું હોય છે.

11. એક જ પાયા (અથવા સમાન પાયા) પર આવેલા અને એક જ પાયાની(સમાન પાયાની) એક જ બાજુએ આવેલાં ત્રિકોણોનાં ક્ષેત્રફળ સમાન હોય તો તે સમાંતર રેખાઓની એક જોડની રેખાઓ વચ્ચે આવેલા હોય છે, જે પૈકી એક પાયાને સમાવતી રેખા છે.

12. ત્રિકોણની એક મધ્યગા, તેનું બે સમાન ક્ષેત્રફળોવાળા ત્રિકોણોમાં વિભાજન કરે છે.

પ્રકરણ 10

વર્તુળ

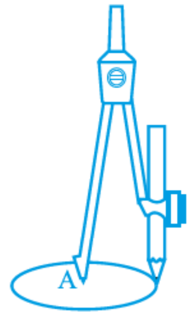
10.1 પ્રાસ્તાવિક

તમે તમારા રોજિંદા જીવનમાં વાહનનાં પૈડાં, બંગડીઓ, કેટલીક ઘડિયાળના ચંદા, 50 પૈસા, 1 રૂપિયો અને 5 રૂપિયાના ચલણી સિક્કા, ચાવી ભરાવવાની ગોળ કડી, ખમીશનાં બટન (જુઓ આકૃતિ10.1.) જેવી ગોળ આકારની વસ્તુઓના પરિચયમાં આવ્યાં હશો. તમે નિરીક્ષણ કર્યું હશે કે ઘડિયાળમાં સેકન્ડ કાંટો ચંદા પર ખૂબ ઝડપથી ગોળ ફરે છે અને તેની અણી ગોળ માર્ગમાં ફરે છે. સેકન્ડ કાંટાની અણીથી જે માર્ગ નિર્દેશિત થાય છે તેને વર્તુળ કહે છે. આ પ્રકરણમાં, તમે વર્તુળ, વર્તુળને સંબંધિત પદો અને વર્તુળના કેટલાક ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કરશો.

આકૃતિ 10.1

10.2 વર્તુળ અને તેને સંબંધિત પદો : એક સમીક્ષા

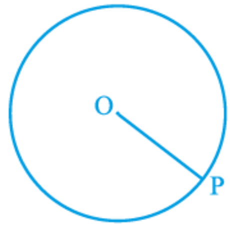
એક પરિકર લો અને તેમાં પેન્સિલ ભરાવો. કાગળ પરના એક બિંદુએ તેનો અણીવાળો ભાગ મૂકો. બીજા છેડાને થોડાક અંતર સુધી ખુલ્લો કરો. અણીવાળા છેડાને તે જ બિંદુએ રહેવા દઈ, બીજા છેડાને એક પૂર્ણ પરિભ્રમણ કરાવો. કાગળ ઉપર પેન્સિલથી કેવી બંધ આકૃતિ દોરાઈ? તમે જાણો છો કે તે વર્તુળ છે. (જુઓ આકૃતિ 10.2.) તમને વર્તુળ કેવી રીતે મળ્યું ? તમે એક બિંદુ નિશ્ચિત કર્યું (આકૃતિ10.2 માં A) અને A થી એક નિશ્ચિત અંતરે આવેલાં બધાં બિંદુઓ મેળવ્યાં. માહિતી પરથી આપણને નીચેની વ્યાખ્યા મળે છે :



આકૃતિ 10.2

સમતલના એક નિશ્ચિત બિંદુથી નિશ્ચિત અંતરે આવેલાં તે સમતલનાં બિંદુઓના સમૂહને વર્તુળ કહે છે.

નિશ્ચિત બિંદુને વર્તુળનું ***કેન્દ્ર*** *(centre)* અને નિશ્ચિત અંતરને વર્તુળની ***ત્રિજ્યા*** *(radius)* કહે છે. આકૃતિ10.3 માં O કેન્દ્ર છે અને OP ની લંબાઈને તે વર્તુળની ત્રિજ્યા કહે છે.

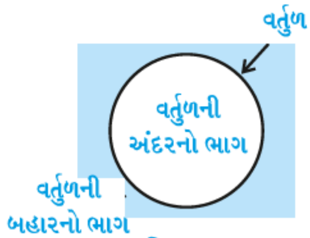


આકૃતિ 10.3

નોંધ : આપણે નોંધીશું કે, કેન્દ્ર અને વર્તુળના કોઈ પણ બિંદુને જોડતા રેખાખંડને પણ વર્તુળની ત્રિજ્યા કહેવાય. એટલે કે 'ત્રિજ્યા' શબ્દ નો બે અર્થમાં ઉપયોગ કરીશું : રેખાખંડ તરીકે અને તેની લંબાઈ તરીકે પણ.

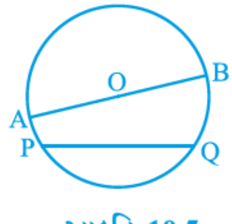
તમે ધોરણ VI માં નીચેની કેટલીક સંકલ્પનાઓ વિશે અગાઉથી પરિચિત થયાં છો. આપણે તેમને માત્ર યાદ કરીએ.

વર્તુળ જે સમતલમાં આવેલું છે તેને ત્રણ ભાગમાં વિભાજિત કરે છે. તે (i) ***વર્તુળની અંદરનો ભાગ*** *(interior)*(ii) વર્તુળ અને (iii) ***વર્તુળની બહારનો ભાગ*** *(exterior)* (જુઓ આકૃતિ10.4.) વર્તુળ અને તેનો અંદરનો ભાગ મળીને ***વર્તુળાકાર પ્રદેશ*** *(circular region)* બનાવે છે.



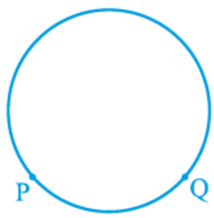
આકૃતિ 10.4

જો તમે વર્તુળ પર બે બિંદુઓ P અને Q લો, તો રેખાખંડ PQ ને વર્તુળની ***જીવા*** *(chord)* કહે છે. (જુઓ આકૃતિ 10.5.) જે જીવા વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી પસાર થાય છે, તે જીવાને વર્તુળનો ***વ્યાસ*** *(diameter)* કહે છે. ત્રિજ્યાની માફક, વ્યાસ શબ્દનો પણ બે અર્થમાં ઉપયોગ થાય છે, રેખાખંડ તરીકે અને તેની લંબાઈ માટે. શું તમે વર્તુળના વ્યાસ કરતાં મોટી બીજી કોઈ જીવા શોધી શકશો ? ના, તમે જોઈ શકશો કે વ્યાસ એ વર્તુળની મોટામાં મોટી જીવા છે અને બધા વ્યાસની લંબાઈ સરખી હોય છે. તે ત્રિજ્યા કરતા બમણી હોય છે. આકૃતિ10.5માં AOB એ વર્તુળનો વ્યાસ છે. વર્તુળને કેટલા વ્યાસ હોય છે? એક વર્તુળ દોરો અને જુઓ કે તમે કેટલા વ્યાસ શોધી શકો છો.



આકૃતિ 10.5

વર્તુળ પરનાં બે બિંદુઓ વચ્ચેના વર્તુળના ભાગને વર્તુળનું ***ચાપ*** *(arc)* કહે છે. આકૃતિ 10.6 માં બિંદુઓ P અને Q વચ્ચેના વર્તુળની ભાગની તરફ જુઓ. તમને ત્યાં બે ભાગ મળશે એક મોટો અને બીજો નાનો. (જુઓ આકૃતિ 10.7) વર્તુળના મોટા ભાગને ***ગુરુચાપ*** *(major arc)* PQ અને નાના ભાગને ***લઘુચાપ*** *(minor arc)* PQ કહે છે. લઘુચાપ PQ ને $\overset{\frown}{PQ}$ વડે અને જો R એ P તથા Q વચ્ચેનું ગુરુચાપનું કોઈ બિંદુ હોય તો ગુરુચાપ PQ ને $\overset{\frown}{PRQ}$ વડે દર્શાવાય છે. જો કાંઈ પણ દર્શાવવામાં ન આવ્યું હોય, તો ચાપ PQ અથવા $\overset{\frown}{PQ}$ ને લઘુચાપ



આકૃતિ 10.6

PQ સમજીશું. જ્યારે P અને Q એ વ્યાસનાં અંત્યબિંદુઓ હોય, ત્યારે બંને ચાપ સમાન છે અને તેમને ***અર્ધવર્તુળ*** *(semi circle)* કહે છે.

આકૃતિ 10.7

વર્તુળની પૂર્ણ લંબાઈને ***પરિઘ*** *(circumference)* કહે છે. જીવા અને તેનાં બંનેમાંથી કોઈ પણ ચાપ વચ્ચેના પ્રદેશને વર્તુળાકાર પ્રદેશનો ***વૃત્તખંડ*** *(segment)* અથવા સરળ રીતે વર્તુળનો વૃત્તખંડ કહે છે. તમે બે પ્રકારના વૃત્તખંડ પણ શોધી શકશો. તે ***ગુરુવૃત્તખંડ*** *(major segment)* અને ***લઘુવૃત્તખંડ*** *(minor segment)* છે. (જુઓ આકૃતિ 10.8.) ચાપ અને વર્તુળના કેન્દ્રથી ચાપના બંને અંત્યબિંદુઓને જોડતી બે ત્રિજ્યાઓ વચ્ચેના વર્તુળાકાર પ્રદેશના ભાગને ***વૃત્તાંશ*** *(sector)* કહે છે. વૃત્તખંડની માફક, તમે લઘુચાપને સંગત **લઘુવૃત્તાંશ** અને ગુરુચાપને સંગત **ગુરુવૃત્તાંશ** શોધી શકશો. આકૃતિ 10.9 માં પ્રદેશ OPQ એ લઘુવૃત્તાંશ અને વૃત્તીય પ્રદેશનો બાકીનો, ભાગ ગુરુવૃત્તાંશ છે. જ્યારે બંને ચાપ સમાન હોય એટલે કે પ્રત્યેક અર્ધવર્તુળ હોય ત્યારે બંને વૃત્તખંડ અને બંને વૃત્તાંશ સમાન હોય છે તથા પ્રત્યેકને ***અર્ધવૃત્તીય પ્રદેશ*** *(semicircular region)* કહે છે.

આકૃતિ 10.8

આકૃતિ 10.9

સ્વાધ્યાય 10.1

1. ખાલી જગ્યા પૂરો :

(i) વર્તુળનું કેન્દ્ર વર્તુળના .... ના ભાગમાં હોય છે. (બહાર/અંદર)

(ii) જે બિંદુનું વર્તુળના કેન્દ્રથી અંતર તેની ત્રિજ્યા કરતાં વધારે હોય, તે બિંદુ વર્તુળના .... ના ભાગમાં આવેલું છે. (બહાર/અંદર)

(iii) વર્તુળની મોટામાં મોટી જીવા એ વર્તુળનો .... છે.

(iv) જ્યારે ચાપનાં અંત્યબિંદુઓ એ વ્યાસનાં અંત્યબિંદુઓ હોય, તો તે ચાપ .... છે.

(v) વર્તુળનો વૃત્તખંડ એ વર્તુળના ચાપ અને .... વચ્ચેનો પ્રદેશ છે.

(vi) સમતલમાં આવેલું વર્તુળ, તે સમતલના .... ભાગ કરે છે.

2. નીચેનાં વિધાન સત્ય છે અથવા અસત્ય છે તે લખો. તમારા જવાબનાં કારણ આપો :

(i) કેન્દ્રને વર્તુળના કોઈ પણ બિંદુ સાથે જોડતો રેખાખંડ એ વર્તુળની ત્રિજ્યા છે.

(ii) વર્તુળની સમાન જીવાઓની સંખ્યા સાન્ત હોય છે.

(iii) જો વર્તુળને ત્રણ સમાન ચાપમાં વિભાજિત કરવામાં આવે, તો તે પ્રત્યેક ગુરુચાપ છે.

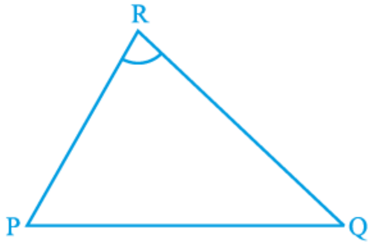
(iv) વર્તુળની જીવા કે જેની લંબાઈ ત્રિજ્યાથી બમણી છે, તેને વર્તુળનો વ્યાસ કહે છે.

(v) જીવા અને તેને સંગત ચાપની વચ્ચેના પ્રદેશને વૃત્તાંશ કહે છે.

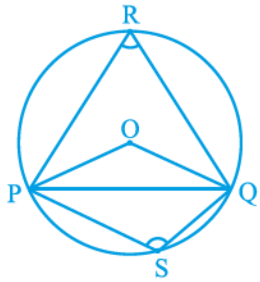
(vi) વર્તુળ એ સમતલીય આકૃતિ છે.

10.3 જીવાએ કોઈ બિંદુએ આંતરેલો ખૂણો

એક રેખાખંડ PQ લો અને PQ ને સમાવતી રેખા પર ન હોય તેવું બિંદુ R લો. PR અને QR જોડો. (જુઓ આકૃતિ 10.10.) $\angle$ PRQ ને રેખાખંડ PQ એ બિંદુ R આગળ ***આંતરેલો ખૂણો*** *(Angle subtended at R)* કહે છે. આકૃતિ 10.11 ના ખૂણાઓ POQ, PRQ અને PSQ ને શું કહેવાય ? $\angle$ POQ એ જીવા PQએ કેન્દ્ર O આગળ આંતરેલો ખૂણો છે. $\angle$ PRQ અને $\angle$ PSQ એ PQ એ અનુક્રમે ગુરુચાપ પર આવેલા બિંદુ R અને લઘુચાપ પર આવેલા બિંદુ S આગળ આંતરેલા ખૂણા છે.



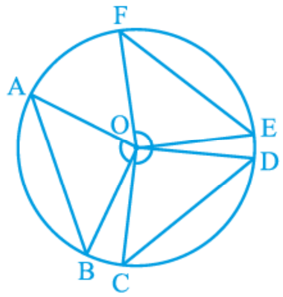
આકૃતિ 10.10



આકૃતિ 10.11

આપણે જીવાના માપ અને તેણે કેન્દ્ર આગળ આંતરેલા ખૂણા વચ્ચેના સંબંધનું પરીક્ષણ કરીએ. વર્તુળની જુદી જુદી જીવાઓ અને તેમણે કેન્દ્ર આગળ આંતરેલા ખૂણા દોરી તમે જોઈ શકશો કે જેટલી લાંબી જીવા હોય તેટલો મોટો ખૂણો કેન્દ્ર આગળ બને. તમે વર્તુળની બે સમાન જીવાઓ લો તો શું થશે ? કેન્દ્ર આગળ તેમણે આંતરેલા ખૂણા સમાન હશે કે નહિ ?

વર્તુળની બે કે તેથી વધુ સમાન જીવાઓ દોરી તેમણે વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ આંતરેલા ખૂણાનાં માપ મેળવો. (જુઓ આકૃતિ10.12.) તમે જોઈ શકશો કે કેન્દ્ર આગળ તેમણે આંતરેલા ખૂણા સમાન છે. આપણે આ હકીકતની સાબિતી આપીએ.



આકૃતિ 10.12

પ્રમેય 10.1 : *વર્તુળની સમાન જીવાઓ, વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણા આંતરે છે.*

સાબિતી : O કેન્દ્રવાળા વર્તુળમાં તમને બે સમાન જીવાઓ AB અને CD આપેલી છે. (જુઓ આકૃતિ 10.13.) તમારે $\angle AOB = \angle COD$ સાબિત કરવાનું છે.

ત્રિકોણો AOB અને COD માં,

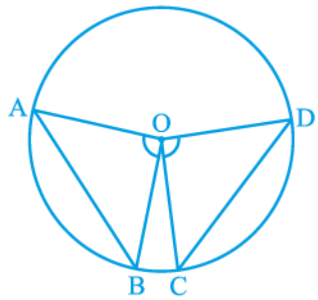
OA = OC (એક જ વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ)

OB = OD (એક જ વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ)

AB = CD (આપેલું છે.)

માટે, $\Delta AOB \cong \Delta COD$ (એકરૂપતાની બાબાબા શરત)

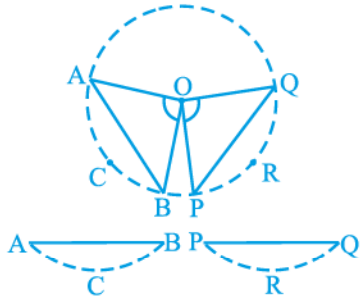
તે પરથી $\angle AOB = \angle COD$ મળે. (એકરૂપ ત્રિકોણોનાં અનુરૂપ અંગો)



આકૃતિ 10.13

હવે, જો વર્તુળની બે જીવાઓ કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણા આંતરે તો જીવાઓ વિશે તમે શું કહેશો ? તેઓ સમાન છે કે નહિ ? આપણે આગળની પ્રવૃત્તિ દ્વારા તેનું પરીક્ષણ કરીએ :

એક કાગળ લઈ તેના પર વર્તુળ દોરો. વર્તુળ કાપો જેથી તકતી જેવો આકાર મળે. બિંદુઓ A અને B વર્તુળ પર હોય તેવી રીતે કેન્દ્ર O આગળ એક ખૂણો AOB દોરો. કેન્દ્ર આગળ બીજો ખૂણો POQ $\angle$AOB ના માપનો દોરો. તકતીને AB આગળ અને PQ આગળ કાપો. (જુઓ આકૃતિ 10.14.) તમને વર્તુળના બે વૃત્તખંડ ACB અને PRQ મળશે. એકને બીજા પર ગોઠવો. તમે શું નિરીક્ષણ કર્યું ? તેઓ એકબીજાને આચ્છાદિત કરે છે એટલે કે તેઓ એકરૂપ છે. આથી AB = PQ.



આકૃતિ 10.14

જે તમે આ એક વિશિષ્ટ વિકલ્પ માટે જોયું, તે બીજા સમાન ખૂણાઓ માટે પણ ચકાસો. બધી જ જીવાઓ સમાન મળશે તે નીચેના પ્રમેય દ્વારા જોઈએ :

પ્રમેય 10.2 : *જો જીવાઓ વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણા આંતરે, તો તે જીવાઓ સમાન છે.*

ઉપરનું પ્રમેય એ પ્રમેય 10.1 નું પ્રતીપ છે.

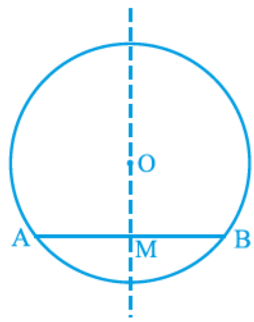
જો આકૃતિ 10.13 માં, તમે $\angle$ AOB = $\angle$ COD લેશો, તો Δ AOB $\cong$ Δ COD થશે (શા માટે ?) તમે AB = CD જોઈ શકો છો ?

સ્વાધ્યાય 10.2

1. યાદ કરો કે જો બે વર્તુળોની ત્રિજ્યાઓ સમાન હોય, તો તે બે વર્તુળો સમાન છે. સાબિત કરો કે એકરૂપ વર્તુળોની સમાન જીવાઓ તેમનાં કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણા આંતરે છે.
2. સાબિત કરો કે એકરૂપ વર્તુળોની જીવાઓ તેમનાં કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણા આંતરે, તો તે જીવાઓ સમાન છે.

10.4 કેન્દ્રમાંથી જીવા પર દોરેલો લંબ

પ્રવૃત્તિ : એક કાગળ ઉપર વર્તુળ દોરો. તેનું કેન્દ્ર O લો. જીવા AB દોરો. હવે કાગળને O માંથી પસાર થતી રેખા આગળ એવી રીતે ગડીવાળો કે જેથી જીવાનો એક ભાગ એ બીજા ભાગ પર પડે. ધારો કે ગડી, AB ને M બિંદુમાં કાપે. આમ, $\angle$ OMA = $\angle$ OMB = 90° અથવા OM એ AB પરનો લંબ છે. શું બિંદુ B એ A ની બરાબર ઉપર આવે છે. (જુઓ આકૃતિ10.15.) હા, તે આવે છે. આથી MA = MB.



આકૃતિ 10.15

OA અને OB ને જોડી અને કાટકોણ ત્રિકોણો OMA અને OMB ને એકરૂપ સાબિત કરી તમે તમારી જાતે તે સાબિત કરો. આ ઉદાહરણ એ નીચેના પરિણામનું વિશિષ્ટ દૃષ્ટાંત છે :

પ્રમેય 10.3 : *વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી જીવા પર દોરેલો લંબ, જીવાને દુભાગે છે.*

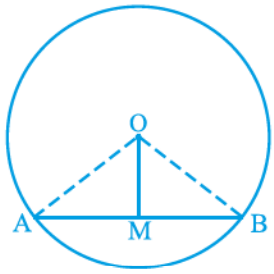
આ પ્રમેયનું પ્રતીપ શું થશે?

આ લખતાં પહેલાં, આપણે સ્પષ્ટ થઈએ કે પ્રમેય 10.3 માં શું આપ્યું છે અને શું સાબિત થાય છે. વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી જીવા પર લંબ દોરેલો છે તેમ આપ્યું છે અને તે જીવાને દુભાગે છે તેમ સાબિત કરવાનું છે. આ પ્રમાણે પ્રતીપમાં, સિદ્ધાંત છે. 'જો વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી દોરેલી રેખા જીવાને દુભાગે' અને સાબિત કરવું છે 'રેખા, જીવાને લંબ છે' આથી તેનું પ્રતીપ :

પ્રમેય 10.4 : *વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી રેખા જીવાને દુભાગે, તો તે રેખા જીવાને લંબ છે.*

આ સત્ય છે? કેટલાંક વિકલ્પો માટે પ્રયત્ન કરો અને જુઓ. તમને જોવા મળશે કે આ વિકલ્પો માટે તે સત્ય છે. આગળ આપેલા પ્રશ્નો ઉકેલીને જુઓ કે વ્યાપક રીતે તે સત્ય છે. તેના જુદા જુદા તબક્કાઓ લખીશું અને તમે તેનાં કારણો આપશો.

ધારો કે AB એ O કેન્દ્રવાળા વર્તુળની જીવા છે અને O ને AB ના મધ્યબિંદુ M સાથે જોડેલું છે. તમારે સાબિત કરવાનું છે કે $OM \perp AB$. OA અને OB જોડો. (જુઓ આકૃતિ 10.16.)



આકૃતિ 10.16

ત્રિકોણો OAM અને OBM માં,

$OA = OB$ (કેમ ?)

$AM = BM$ (કેમ ?)

$OM = OM$ (સામાન્ય)

માટે, $\Delta OAM \cong \Delta OBM$ (શા માટે ?)

તે પરથી $\angle OMA = \angle OMB = 90°$ (કેમ ?)

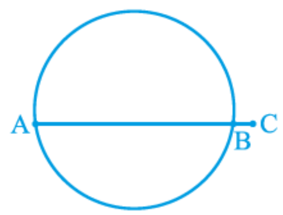
10.5 ત્રણ બિંદુઓમાંથી વર્તુળ

તમે પ્રકરણ 6 માં શીખી ગયાં છો કે રેખાના નિરૂપણ માટે બે બિંદુઓ પૂરતાં છે. એટલે કે બે ભિન્ન બિંદુઓમાંથી એક અને માત્ર એક રેખા પસાર થાય છે. સ્વાભાવિક રીતે એક પ્રશ્ન ઉદ્ભવે. વર્તુળના નિર્માણ માટે કેટલાં બિંદુઓ પૂરતાં છે?

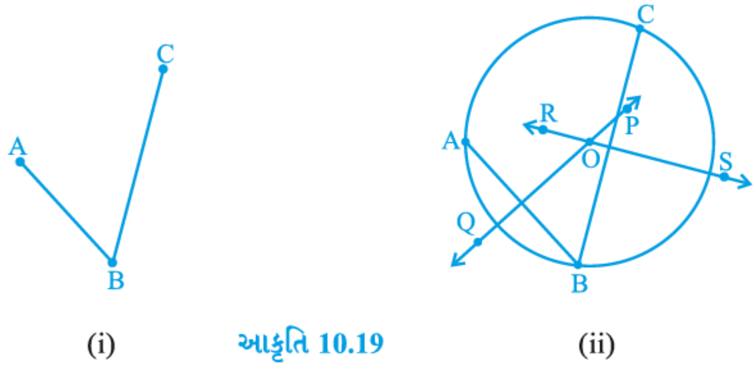
એક બિંદુ P લો. આ બિંદુમાંથી કેટલાં વર્તુળો દોરી શકાય? તમે જોઈ શકો છો કે, આ બિંદુમાંથી તમને યોગ્ય લાગે તેટલાં બધાં વર્તુળો શક્ય છે. [જુઓ આકૃતિ 10.17(i).] હવે બે બિંદુઓ P અને Q લો. ફરીથી તમે જોઈ શકો છો કે P અને Q માંથી અનંત સંખ્યામાં વર્તુળો પસાર થાય છે. [જુઓ આકૃતિ10.17(ii).] તમે ત્રણ બિંદુઓ A, B અને C લો ત્યારે શું થશે ? ત્રણ સમરેખ બિંદુઓમાંથી પસાર થતું વર્તુળ તમે દોરી શકો છો ? ના, જો બિંદુઓ એક જ રેખા પર આવેલાં હોય, તો ત્રીજું બિંદુ બે બિંદુમાંથી પસાર થતાં વર્તુળની અંદર અથવા બહાર હશે. [જુઓ આકૃતિ10.18.]

આકૃતિ 10.17

હવે, આપણે એક જ રેખા પર ન હોય તેવાં ત્રણ બિંદુઓ A, B અને C લઈએ અથવા બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો, તે સમરેખ નથી. [જુઓ આકૃતિ10.19(i).] AB અને BC ના લંબદ્વિભાજક અનુક્રમે PQ અને RS દોરો. ધારો કે આ બે લંબદ્વિભાજકો એકબીજાને બિંદુ O માં છેદે છે. (નોંધીશું કે PQ અને RS એકબીજાને છેદે છે કારણ કે તેઓ સમાંતર નથી) [જુઓ આકૃતિ 10.19(ii).]



આકૃતિ 10.18



આકૃતિ 10.19

હવે AB ના લંબદ્વિભાજક PQ પર O આવેલું છે. હવે તમને OA = OB મળશે, કારણ કે રેખાખંડના લંબદ્વિભાજક પરનું પ્રત્યેક બિંદુ તેનાં અંત્યબિંદુઓથી સરખા અંતરે હોય છે. OA = OB પરિણામ પ્રકરણ 7 માં સાબિત કરેલું છે.

તે જ પ્રમાણે O એ BCના લંબદ્વિભાજક RS પર આવેલું છે, આથી

OB = OC થશે.

આથી OA = OB = OC, આનો અર્થ થશે કે, બિંદુઓ A, B અને C એ O થી સમાન અંતરે છે. તેથી જો તમે O કેન્દ્ર લઈ OA ત્રિજ્યા લઈ એક વર્તુળ દોરો, તો તે B અને C માંથી પણ પસાર થશે. આ દર્શાવે છે કે ત્રણ બિંદુઓ A, B અને C માંથી પસાર થાય તેવું એક વર્તુળ છે. તમે જાણો છો કે બે રેખાઓના લંબદ્વિભાજકો એક જ બિંદુમાં છેદી શકે છે આથી તમે OA ત્રિજ્યાવાળું એક જ વર્તુળ દોરી શકો છો. બીજી રીતે કહીએ તો, A, B અને C માંથી પસાર થતું એક અનન્ય વર્તુળ છે. તમે હવે નીચેનું પ્રમેય સાબિત કર્યું :

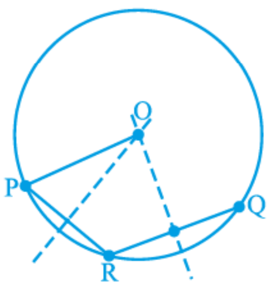
પ્રમેય 10.5 : *આપેલ ત્રણ અસમરેખ બિંદુઓમાંથી એક અને માત્ર એક જ વર્તુળ પસાર થાય છે.*

નોંધ : જો ABC એક ત્રિકોણ હોય, તો પ્રમેય 10.5 પ્રમાણે, ત્રિકોણનાં ત્રણ શિરોબિંદુઓ A, B અને C માંથી એક અનન્ય વર્તુળ પસાર થાય છે. આ વર્તુળને Δ ABC નું ***પરિવૃત્ત*** *(circumcircle)* અથવા ***પરિવર્તુળ*** કહે છે. તેના કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યાને અનુક્રમે ***ત્રિકોણનું પરિકેન્દ્ર*** *(circumcentre)* અને ***પરિત્રિજ્યા*** *(circumradius)* કહેવાય છે.

ઉદાહરણ 1 : વર્તુળનું ચાપ આપ્યું છે. વર્તુળ પૂર્ણ કરો.

ઉકેલ : ધારો કે વર્તુળનું ચાપ PQ આપ્યું છે. આપણે વર્તુળ પૂર્ણ કરવું છે, એટલે કે આપણે તેનું કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા શોધવી છે. ચાપ પર એક બિંદુ R લો. PR અને RQ જોડો. પ્રમેય 10.5 સાબિત કરવા માટે જે રચના કરી તેનો ઉપયોગ કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા શોધવા માટે કરો.

ઉપર પ્રમાણે મેળવેલા કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા લઈ, આપણે વર્તુળ પૂર્ણ કરી શકીશું. (જુઓ આકૃતિ. 10.20.)



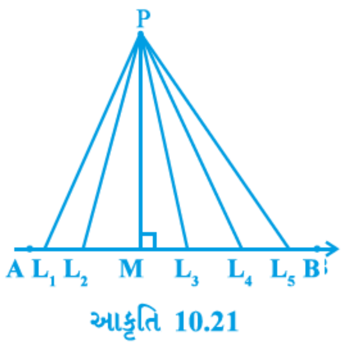
આકૃતિ 10.20

સ્વાધ્યાય 10.3

1. વર્તુળોની જુદી જુદી જોડીઓ દોરો. પ્રત્યેક જોડીમાં કેટલાં બિંદુઓ સામાન્ય છે? સામાન્ય બિંદુઓની મહત્તમ સંખ્યા કેટલી ?
2. ધારો કે તમને એક વર્તુળ આપવામાં આવ્યું છે. તેનું કેન્દ્ર શોધવાની રચના કરો.
3. જો બે વર્તુળો એકબીજાંને બે બિંદુમાં છેદે તો સાબિત કરો કે તેમનાં કેન્દ્ર, સામાન્ય જીવાના લંબદ્વિભાજક પર છે.

10.6 સમાન જીવાઓ અને તેમનું કેન્દ્રથી અંતર

ધારો કે AB એક રેખા છે અને P રેખાની બહારનું એક બિંદુ છે. રેખા પર અનંત સંખ્યામાં બિંદુઓ હોવાથી, આ બિંદુઓને જો તમે P સાથે જોડશો, તો તમને અનંત સંખ્યામાં રેખાખંડો PL_1, PL_2, PM, PL_3, PL_4 વગેરે મળશે. આ બધામાંથી P થી ABનું અંતર કયું થશે ? તમે થોડી વાર વિચાર કરશો તો તમને જવાબ મળશે. આ બધા રેખાખંડોમાંથી આકૃતિ 10.21 માં P થી AB પરનો લંબ, PM એ નાનામાં નાનો થશે. ગણિતમાં, આપણે આ ઓછામાં ઓછી લંબાઈ PM ને P થી AB ના અંતર તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરીશું. આથી તમે કહી શકશો કે,

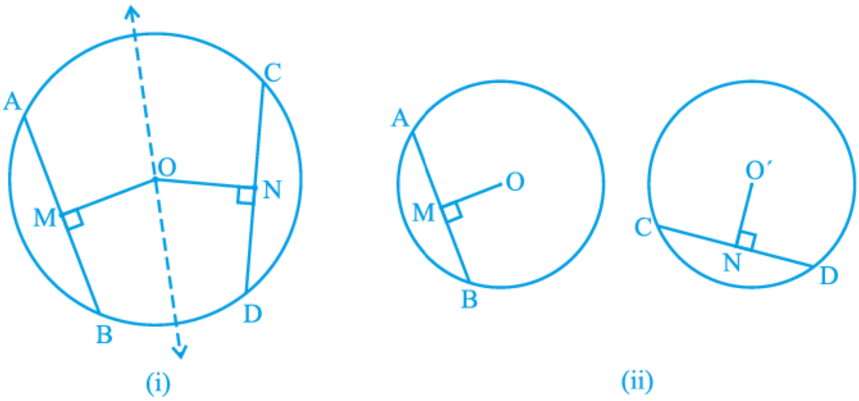


આકૃતિ 10.21

બિંદુથી રેખાના લંબઅંતરને બિંદુથી રેખાનું અંતર કહે છે.

નોંધીશું કે જો બિંદુ, રેખા પર આવેલું હોય, તો બિંદુથી રેખાનું અંતર શૂન્ય છે.

વર્તુળને અનંત જીવાઓ હોય છે. વર્તુળની જીવાઓ દોરતાં, તમે નિરીક્ષણ કરી શકશો કે ઓછી લંબાઈની જીવાઓ કરતાં વધારે લંબાઈની જીવાઓ કેન્દ્રની વધારે નજીક હોય છે. જુદી જુદી લંબાઈની વર્તુળની કેટલીક જીવાઓ દોરી તેમનું કેન્દ્રથી અંતર માપીને તમે આ હકીકતનું અવલોકન કરી શકશો. વર્તુળની લાંબામાં લાંબી જીવા કે જે વર્તુળનો વ્યાસ છે તેનું વર્તુળના કેન્દ્રથી અંતર કેટલું થશે? કેન્દ્ર તેના પર આવેલું હોવાથી, અંતર શૂન્ય થશે. જીવાની લંબાઈ અને તેનું કેન્દ્રથી અંતર આ બે વચ્ચેના કેટલાંક સંબંધો વિશે તમે કંઈક વિચારી શકો છો ? જો કોઈ સંબંધ હોય તો તે વિશે આપણે જોઈએ.

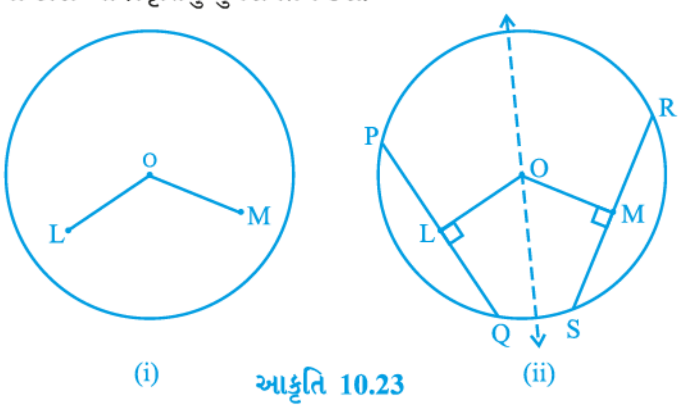


આકૃતિ 10.22

પ્રવૃત્તિ : કાગળ પર કોઈપણ ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દોરો. તેની બે સમાન જીવાઓ AB અને CD દોરો અને કેન્દ્ર O માંથી તેમના પરના લંબ અનુક્રમે OM અને ON દોરો. આકૃતિની એવી રીતે ગડી કરો કે જેથી D એ B ઉપર પડે અને C એ A ઉપર પડે. [જુઓ આકૃતિ10.22 (i).] તમે નિરીક્ષણ કરશો કે O ગડી પર રહેશે અને N એ M ઉપર પડશે. આથી, OM = ON. કેન્દ્ર O અને O′ લઈ, એકરૂપ વર્તુળો દોરો. દરેકમાં એક-એક સમાન જીવા AB અને CD લઈ આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરો. તેમના પર લંબ OM અને O′N દોરો. [જુઓ આકૃતિ 10.22(ii).] એક વર્તુળાકાર તક્તી કાપો અને તેને વર્તુળ પર એવી રીતે ગોઠવો કે જેથી AB એ CD ને બંધબેસતું થાય. તમે જોઈ શકશો કે O એ O′ ને પર આવે છે અને M એ N ની પર આવે છે. આ પ્રમાણે તમે નીચેના પ્રમેયની ચકાસણી કરી શકો:

પ્રમેય 10.6 : *વર્તુળ (અથવા એકરૂપ વર્તુળો)ની સમાન જીવાઓ વર્તુળના કેન્દ્ર (કેન્દ્રો)થી સમાન અંતરે આવેલી હોય છે.*

આ પ્રમેયનું પ્રતીપ સત્ય છે કે નહિ તે હવે પછી જોઈશું. આ માટે O કેન્દ્રવાળું એક વર્તુળ દોરો. વર્તુળમાં રહે તે રીતે સમાન લંબાઈના બે રેખાખંડ OL અને OM દોરો. [જુઓ આકૃતિ 10.23(i).] પછી OL અને OM ને લંબ થાય તેવી વર્તુળની બે જીવાઓ અનુક્રમે PQ અને RS દોરો. [જુઓ આકૃતિ 10.23(ii).] PQ અને RS ની લંબાઈ માપો. શું આ ભિન્ન છે? ના, બંને સમાન છે. સમાન લંબાઈના વધારે રેખાખંડ અને તેમને લંબ જીવાઓ દોરી આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરો.



આકૃતિ 10.23

આ પ્રમેય 10.6 નું પ્રતીપ છે તેની સત્યાર્થતાની ખાતરી થાય છે અને તે નીચે દર્શાવેલ છે.

પ્રમેય 10.7 : *વર્તુળના કેન્દ્રથી સમાન અંતરે આવેલી જીવાઓ સમાન હોય છે.*

ઉપરના પરિણામની વધુ સમજૂતી માટે આપણે હવે એક ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ 2 : જો વર્તુળની પરસ્પર છેદતી બે જીવાઓ તેમના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતા વ્યાસ સાથે સમાન ખૂણા બનાવે, તો સાબિત કરો કે તે જીવાઓ સમાન છે.

ઉકેલ : O કેન્દ્રવાળા વર્તુળની બે જીવાઓ AB અને CD એકબીજીને E બિંદુમાં છેદે છે. $\angle AEQ = \angle DEQ$ થાય તેવો E માંથી પસાર થતો વ્યાસ PQ છે (જુઓ આકૃતિ10.24.) તમારે AB = CD સાબિત કરવાનું છે.

જીવાઓ AB અને CD પર અનુક્રમે લંબ OL અને OM દોરો. હવે,

$\angle LOE = 180° - 90° - \angle LEO$ (ત્રિકોણના ખૂણાઓના સરવાળાનો નિયમ)

$= 90° - \angle LEO$

$= 90° - \angle AEQ$

$= 90° - \angle DEQ$

$= 90° - \angle MEO \quad = \angle MOE$

ત્રિકોણો OLE અને OME માં,

$\angle LEO = \angle MEO$ (શા માટે ?)

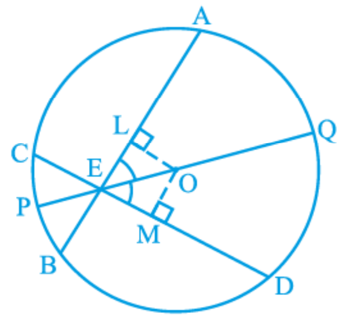
$\angle LOE = \angle MOE$ (ઉપર સાબિત કર્યું)

EO = EO (સામાન્ય)

માટે, $\Delta OLE \cong \Delta OME$ (શા માટે ?)

તે પરથી OL = OM (એકરૂપ ત્રિકોણના એકરૂપ અંગ)

આથી, AB = CD (કેમ ?)



આકૃતિ 10.24

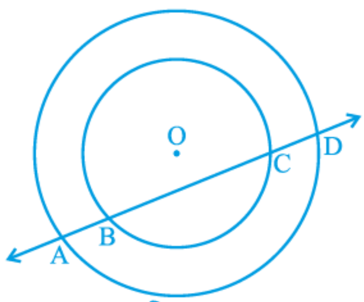
સ્વાધ્યાય 10.4

1. 5 સેમી અને 3 સેમી ત્રિજ્યાવાળાં બે વર્તુળો બે બિંદુમાં છેદે છે અને તેમના કેન્દ્ર વચ્ચેનું અંતર 4 સેમી છે. સામાન્ય જીવાની લંબાઈ શોધો.

2. જો વર્તુળની બે સમાન જીવાઓ વર્તુળની અંદર છેદે, તો એક જીવાના કપાતા ભાગ અને બીજી જીવાના અનુરૂપ ભાગ સમાન છે. તેમ સાબિત કરો.

3. જો વર્તુળની બે સમાન જીવાઓ વર્તુળની અંદર છેદે, તો સાબિત કરો કે છેદબિંદુને કેન્દ્ર સાથે જોડતી રેખા જીવાઓ સાથે સમાન ખૂણા બનાવે છે.

4. જો O કેન્દ્રવાળા બે સમકેન્દ્રી (*concentric*) વર્તુળો (સમાન કેન્દ્રવાળાં વર્તુળો)ને એક રેખા અનુક્રમે A, B, C અને Dમાં છેદે, તો સાબિત કરો કે AB = CD. (જુઓ આકૃતિ 10.25.)



આકૃતિ 10.25

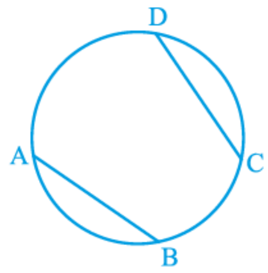
5. એક વિહારસ્થાનમાં 5 મી ત્રિજ્યાવાળા દોરેલા વર્તુળ પર રમત રમવા માટે ત્રણ છોકરીઓ રેશ્મા, સલમા અને મનદીપ ઊભાં છે. રેશ્મા દડાને સલમા તરફ ફેંકે છે. સલમા મનદીપ તરફ અને

મનદીપ રેશ્મા તરફ દડો ફેંકે છે. જો રેશ્મા અને સલમા વચ્ચેનું તથા સલમા અને મનદીપ વચ્ચેનું દરેક અંતર 6 મીટર હોય, તો રેશ્મા અને મનદીપ વચ્ચેનું અંતર કેટલું હશે?

6. એક વસાહતમાં 20મીટર ત્રિજ્યાવાળું એક વર્તુળાકાર વિહારસ્થાન આવેલું છે. ત્રણ છોકરાઓ અંકુર, સૈયદ અને ડૅવિડ દરેકે પોતાના હાથમાં રમકડાનો ટેલિફોન એકબીજા સાથે વાત કરવા માટે રાખીને વર્તુળની સીમા પર સરખા અંતરે બેઠા છે. દરેકના ટેલિફોનની દોરીની લંબાઈ શોધો.

10.7 વર્તુળના ચાપે આંતરેલો ખૂણો

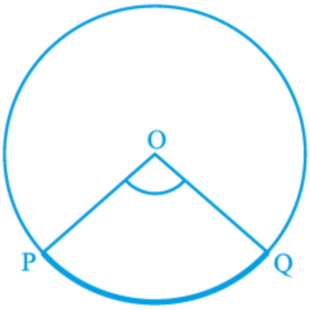
તમે જોયું કે વર્તુળના વ્યાસ સિવાયની જીવાનાં અંત્યબિંદુઓ વર્તુળનું બે ચાપમાં વિભાજન કરે છે–એક ગુરુચાપ અને બીજું લઘુચાપ. જો તમે બે સમાન જીવાઓ લો. તો તેમને સંગત ચાપનાં માપ વિશે શું કહેશો ? શું એક જીવાથી બનેલું ચાપ બીજી જીવાને અનુરૂપ બનેલા ચાપને સમાન હોય છે? હકીકતમાં, તેઓની લંબાઈ સમાન છે. જો એક ચાપને વાળ્યા અથવા વાંકું કર્યા વગર બીજા ચાપ પર મૂકવામાં આવે, તો તે બીજા પર સંપૂર્ણ રીતે આચ્છાદિત થાય છે.



આકૃતિ 10.26

વર્તુળમાંથી જીવા CD ને અનુરૂપ ચાપ કાપી અને તેને સમાન બીજી જીવા AB ને અનુરૂપ ચાપ પર ગોઠવીને આ હકીકતની ચકાસણી તમે કરી શકશો. તમે જોઈ શકશો કે ચાપ CD એ ચાપ AB પર સંપૂર્ણ આચ્છાદિત થાય છે. (જુઓ આકૃતિ 10.26.) આ દર્શાવે છે કે સમાન જીવાઓ સમાન ચાપ બનાવે છે અને તેનું પ્રતીપ, સમાન ચાપ વર્તુળની સમાન જીવાઓ બનાવે છે. તમે તેને નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકશો :

જો વર્તુળની બે જીવા સમાન હોય, તો તેમને અનુરૂપ ચાપ એકરૂપ છે અને તેનું પ્રતીપ, જો વર્તુળનાં બે ચાપ એકરૂપ હોય, તો તેમને અનુરૂપ જીવા સમાન છે.



આકૃતિ 10.27

વર્તુળના ચાપે વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ આંતરેલા ખૂણાની વ્યાખ્યા એ તે ચાપની અનુરૂપ જીવાએ કેન્દ્ર આગળ આંતરેલા ખૂણા તરીકે લઈશું. જો લઘુચાપ કેન્દ્ર આગળ કોઇ ખૂણો આંતરે, તો ગુરુચાપ વિપરીત કોણ આંતરશે એમ અર્થ કરીશું. આથી આકૃતિ 10.27 માં લઘુચાપ PQ એ કેન્દ્ર O આગળ $\angle$POQ આંતરે છે અને ગુરુચાપ PQ એ O આગળ આંતરેલો ખૂણો એ વિપરીતકોણ POQ છે.

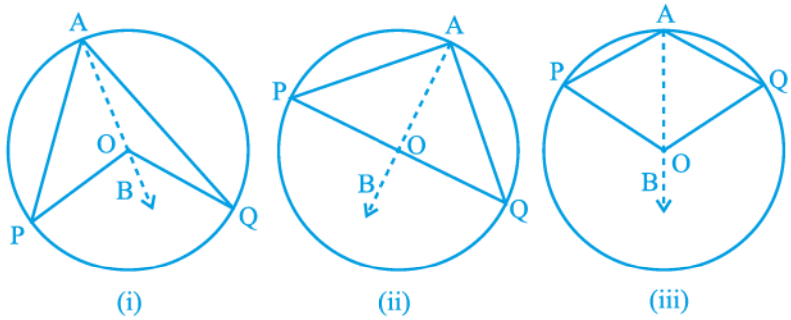
ઉપરના ગુણધર્મનું અવલોકન કરતાં અને પ્રમેય 10.1 ના આધારે નીચેનું પરિણામ સત્ય છે :

વર્તુળનાં એકરૂપ ચાપ અથવા સમાન લંબાઈનાં ચાપ કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણા આંતરે છે.

આથી, વર્તુળની જીવાએ કેન્દ્ર આગળ આંતરેલો ખૂણો અને તેને અનુરૂપ લઘુચાપે કેન્દ્ર આગળ આંતરેલો ખૂણો સમાન છે. નીચેનું પ્રમેય એ ચાપ દ્વારા વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ આંતરેલા ખૂણા અને વર્તુળના કોઈપણ બિંદુએ આંતરેલા ખૂણા વચ્ચેનો સંબંધ આપે છે.

પ્રમેય 10.8 : *વર્તુળના ચાપે કેન્દ્ર આગળ આંતરેલો ખૂણો તે ચાપે વર્તુળના બાકીના ભાગ પરના કોઈપણ બિંદુ આગળ આંતરેલા ખૂણા કરતાં બમણો હોય છે.*

સાબિતી : વર્તુળનું ચાપ PQ એ કેન્દ્ર O આગળ ખૂણો POQ આંતરે છે અને વર્તુળના બાકીના ભાગ પરના બિંદુ A આગળ ખૂણો PAQ આંતરે છે તેમ આપ્યું છે. આપણે સાબિત કરવું છે કે $\angle$ POQ = 2 $\angle$ PAQ.



આકૃતિ 10.28

આકૃતિ 10.28. માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ત્રણ વિકલ્પ લઈએ. (i) માં ચાપ PQ એ લઘુચાપ છે (ii) માં ચાપ PQ એ અર્ધવર્તુળ છે અને (iii) માં ચાપ PQ એ ગુરુચાપ છે.

આપણે AO ને B સુધી લંબાવીએ અને ત્યાંથી શરૂઆત કરીએ.

દરેક વિકલ્પમાં $\angle$ BOQ = $\angle$ OAQ + $\angle$ AQO

કારણ કે ત્રિકોણનો બહિષ્કોણ એ ત્રિકોણના અંતઃસંમુખકોણના સરવાળા જેટલો હોય છે.

Δ OAQ માં,

OA = OQ (વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ)

માટે, $\angle$ OAQ = $\angle$ OQA (પ્રમેય 7.5)

તે પરથી, $\angle$ BOQ = 2 $\angle$ OAQ (1)

તે જ પ્રમાણે, $\angle$ BOP = 2 $\angle$ OAP (2)

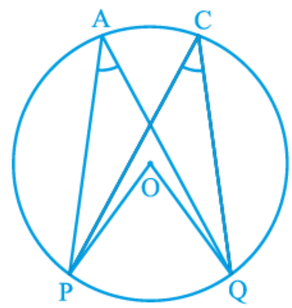
(1) અને (2) પરથી, $\angle$ BOP + $\angle$ BOQ = 2($\angle$ OAP + $\angle$ OAQ)

$\therefore$ $\angle$ POQ = 2 $\angle$ PAQ. (3)

વિકલ્પ (iii) માટે, PQ એ ગુરુચાપ છે, (3) ને નીચે પ્રમાણે બદલીએ :

વિપરીતકોણ POQ = 2 $\angle$ PAQ ■

નોંધ : ધારો કે આપણે ઉપરની આકૃતિમાં બિંદુઓ P અને Q ને જોડી જીવા PQ બનાવીએ, તો પછી $\angle$ PAQ ને વર્તુળના ભાગ PAQP માં બનેલો ખૂણો એમ કહીશું.



આકૃતિ 10.29

પ્રમેય 10.8 માં A એ વર્તુળના બાકી રહેતા ભાગ પરનું કોઈ પણ બિંદુ છે. આથી વર્તુળના બાકી રહેતા ભાગ પર બીજું કોઈ પણ બિંદુ C લેતાં (જુઓ આકૃતિ 10.29.) તમને

$\angle$ POQ = 2 $\angle$ PCQ = 2 $\angle$ PAQ મળશે.

આથી, $\angle$ PCQ = $\angle$ PAQ.

આ નીચેનું પ્રમેય સાબિત કરે છે :

પ્રમેય 10.9 : *એક જ વૃત્તખંડમાં આવેલા ખૂણાઓ સમાન હોય છે.*

પ્રમેય 10.8 ના વિકલ્પ (ii)ની ચર્ચા પુનઃ આપણે જુદી કરીએ. અહીં $\angle$PAQ એ અર્ધવર્તુળ વૃત્તખંડમાં એક ખૂણો છે વળી,

$\angle PAQ = \frac{1}{2}\ \angle POQ = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$. જો તમે અર્ધવર્તુળ પર બીજું કોઈ બિંદુ C લેશો, તો તમને પુનઃ

$\angle PCQ = 90°$ મળશે.

આથી, તમને વર્તુળનો એક બીજો ગુણધર્મ આ પ્રમાણે મળશે :

અર્ધવર્તુળમાંનો ખૂણો કાટકોણ હોય છે.

પ્રમેય10.9 નું પ્રતીપ પણ સત્ય છે. તે નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :

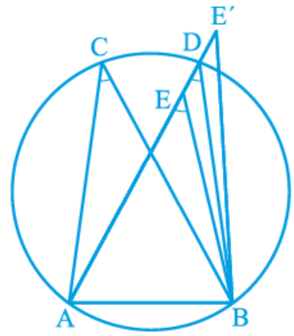
પ્રમેય 10.10 : જો બે બિંદુઓને જોડતો રેખાખંડ, એ રેખાખંડને સમાવતી રેખાની એક જ બાજુએ આવેલાં બીજાં બે બિંદુઓ આગળ સમાન ખૂણા આંતરે, તો ચારેય બિંદુઓ એક જ વર્તુળ પર આવેલાં છે. *(આ ચારેય બિંદુઓ **વૃત્તીય** (concyclic) બિંદુઓ કહેવાય.)*

આ પરિણામની સત્યાર્થતા તમે નીચે જોઈ શકશો :

આકૃતિ 10.30 માં, રેખાખંડ AB, બિંદુઓ C અને D આગળ સમાન ખૂણા આંતરે છે એટલે કે

$\angle ACB = \angle ADB$

બિંદુઓ A, B, C અને D એક જ વર્તુળ પર આવેલાં છે તે બતાવવા માટે આપણે A, C અને B માંથી પસાર થતું એક વર્તુળ દોરીએ. ધારો કે તે બિંદુ D માંથી પસાર થતું નથી. તો પછી તે AD ને અથવા (લંબાવેલી AD) ને કોઈક બિંદુ E (અથવા E′) માં છેદશે.



આકૃતિ 10.30

જો બિંદુઓ A, C, E અને B વર્તુળ પર આવેલાં હોય, તો

$\angle ACB = \angle AEB$ (શા માટે ?)

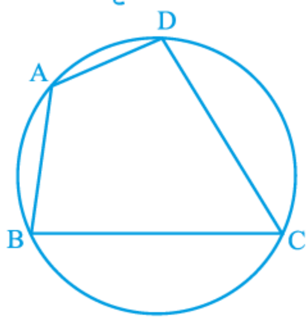
પરંતુ $\angle ACB = \angle ADB$ આપેલ છે.

માટે, $\angle AEB = \angle ADB$

જો E એ D ઉપર હોય તો જ આ બને નહિ તો આ શક્ય નથી. (શા માટે ?)

તે જ પ્રમાણે E′ પણ D ઉપર થશે.

10.8 ચક્રીય ચતુષ્કોણ



આકૃતિ 10.31

ચતુષ્કોણ ABCDનાં બધા શિરોબિંદુઓ જો એક જ વર્તુળ પર આવેલાં હોય તો ABCD ને ***ચક્રીય*** *(cyclic)* ચતુષ્કોણ કહે છે. (જુઓ આકૃતિ 10.31.) આવા ચતુષ્કોણમાં તમને એક વિશિષ્ટ ગુણધર્મ જોવા મળશે. જુદી જુદી બાજુઓવાળા કેટલાક ચક્રીય ચતુષ્કોણ દોરો અને દરેકને ABCD નામ આપો. (ભિન્ન ભિન્ન ત્રિજ્યાવાળાં કેટલાંક વર્તુળ દોરી અને તે દરેક પર ચાર બિંદુઓ લઈ આ પ્રક્રિયા કરવાથી તે શક્ય બનશે.) સામસામેના ખૂણાઓ માપો અને તમારાં અવલોકન નીચેના કોષ્ટકમાં લખો.

ચતુષ્કોણનો ક્રમાંક	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle D$	$\angle A + \angle C$	$\angle B + \angle D$
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						

આગળના કોષ્ટક પરથી તમે શું નિષ્કર્ષ કાઢશો ?

માપનની ક્ષતિને અવગણતાં, તમે મેળવી શકશો કે $\angle A + \angle C = 180^\circ$ અને $\angle B + \angle D = 180^\circ$. આ પરિણામથી નીચેની ચકાસણી થાય છે :

પ્રમેય 10.11 : *ચક્રીય ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણાઓની પ્રત્યેક જોડના ખૂણાનો સરવાળો 180° થાય છે.*

હકીકતમાં, આ પ્રમેયનું નીચે રજૂ કરેલ પ્રતીપ પણ સત્ય છે.

પ્રમેય 10.12 : *જો ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણાઓની જોડના ખૂણાનો સરવાળો 180° હોય, તો તે ચતુષ્કોણ ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે.*

પ્રમેય 10.10 માં જે રીત બતાવી છે તે રીત અપનાવશો તો આ પ્રમેયની સાબિતી પણ તમને મળશે.

ઉદાહરણ 3 : આકૃતિ 10.32 માં, વર્તુળનો વ્યાસ AB છે. વર્તુળની ત્રિજ્યાના માપની બરાબર જીવા CD છે. AC અને BD ને લંબાવતાં તે બિંદુ E માં છેદે છે. સાબિત કરો કે $\angle AEB = 60^\circ$

ઉકેલ : OC, OD અને BC જોડો.

ત્રિકોણ ODC સમબાજુ ત્રિકોણ છે. (શા માટે ?)

માટે, $\angle COD = 60^\circ$

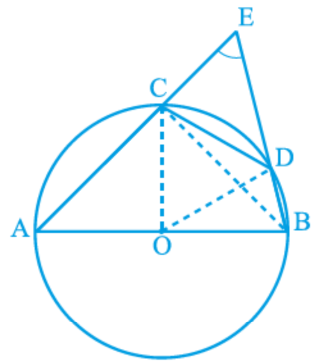
હવે, $\angle CBD = \frac{1}{2} \angle COD$ (પ્રમેય 10.8)

તે પરથી, $\angle CBD = 30^\circ$ થાય.

ફરીથી, $\angle ACB = 90^\circ$ (શા માટે?)

આથી, $\angle BCE = 180^\circ - \angle ACB = 90^\circ$

તે પરથી, $\angle CEB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, એટલે કે $\angle AEB = 60^\circ$ થાય.



આકૃતિ 10.32

ઉદાહરણ 4 : આકૃતિ 10.33 માં, ABCD ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે અને AC તથા BD તેના વિકર્ણો છે. જો $\angle DBC = 55^\circ$ અને $\angle BAC = 45^\circ$, તો $\angle BCD$ શોધો.

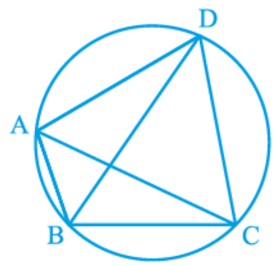
ઉકેલ : $\angle CAD = \angle DBC = 55^\circ$ (એક જ વૃત્તખંડના ખૂણાઓ)

આથી, $\angle DAB = \angle CAD + \angle BAC$

$= 55^\circ + 45^\circ = 100^\circ$

પરંતુ, $\angle DAB + \angle BCD = 180^\circ$ (ચક્રીય ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણા)

આથી, $\angle BCD = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$



આકૃતિ 10.33

ઉદાહરણ 5 : બે વર્તુળો બે બિંદુઓ A અને B માં છેદે છે. આ બે વર્તુળોના વ્યાસ AD અને AC છે. (જુઓ આકૃતિ10.34.) સાબિત કરો કે B એ રેખાખંડ DC પર આવેલું છે.

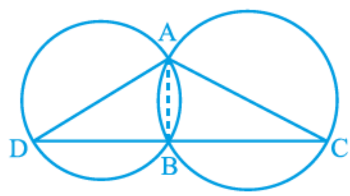
ઉકેલ : AB જોડો.

$\angle ABD = 90^\circ$ (અર્ધવર્તુળમાંનો ખૂણો)

$\angle ABC = 90^\circ$ (અર્ધવર્તુળમાંનો ખૂણો)

આથી, $\angle ABD + \angle ABC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

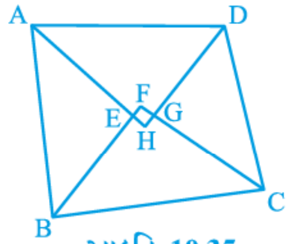
માટે, DBC એક રેખા છે એટલે કે રેખાખંડ DC પર B આવેલું છે.



આકૃતિ 10.34

ઉદાહરણ 6 : સાબિત કરો કે જો કોઈ પણ ચતુષ્કોણના અંદરના ખૂણાઓના દુભાજકો વડે ચતુષ્કોણ બને (શક્ય હોય,) તો તે ચક્રીય છે.

ઉકેલ : આકૃતિ 10.35 માં, ચતુષ્કોણ ABCD ના અંદરના ખૂણાઓ A, B, C અને D ના દુભાજકો અનુક્રમે AH, BF, CF અને DH છે. તે ચતુષ્કોણ EFGH રચે છે.



આકૃતિ 10.35

હવે, $\angle FEH = \angle AEB = 180° - \angle EAB - \angle EBA$ (કેમ ?)

$$= 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$$

અને $\angle FGH = \angle CGD = 180° - \angle GCD - \angle GDC$ (કેમ ?)

$$= 180° - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$$

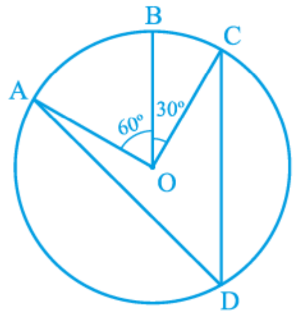
આથી, $\angle FEH + \angle FGH = 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) + 180° - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$

$$= 360° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) = 360° - \frac{1}{2} \times 360°$$

$$= 360° - 180° = 180°$$

માટે, પ્રમેય 10.12 પરથી ચતુષ્કોણ EFGH ચક્રીય છે.

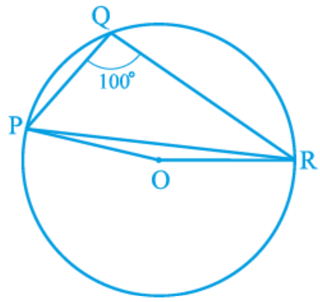
સ્વાધ્યાય 10.5



આકૃતિ 10.36

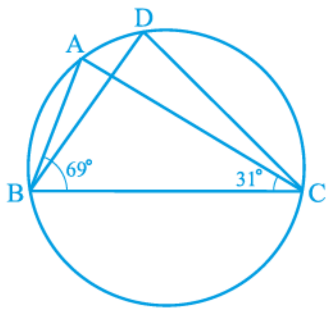
1. આકૃતિ 10.36 માં O કેન્દ્રવાળા વર્તુળ પર બિંદુઓ A, B અને C એવી રીતે આવેલાં છે કે જેથી $\angle BOC = 30°$ અને $\angle AOB = 60°$ થાય. જો ચાપ ABC સિવાયના વર્તુળ પર બિંદુ D હોય, તો $\angle ADC$ શોધો.

2. એક વર્તુળની જીવા અને તેની ત્રિજ્યા સમાન છે. આ જીવાએ લઘુચાપ પરના બિંદુ આગળ અને ગુરુચાપ પરના બિંદુ આગળ આંતરેલા ખૂણા શોધો.



આકૃતિ 10.37

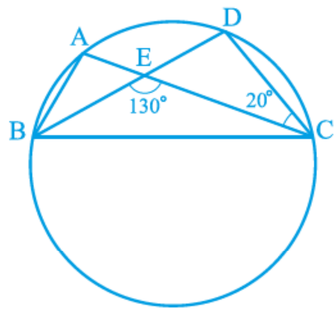
3. આકૃતિ 10.37 માં, $\angle PQR = 100°$, જ્યાં P, Q અને R એ O કેન્દ્રવાળા વર્તુળ પરનાં બિંદુઓ છે. $\angle OPR$ શોધો.



આકૃતિ10.38

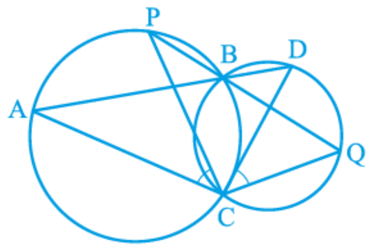
4. આકૃતિ 10.38 માં, $\angle ABC = 69°$, $\angle ACB = 31°$, છે, $\angle BDC$ શોધો.

5. આકૃતિ 10.39 માં, વર્તુળ પર ચાર બિંદુઓ A, B, C અને D આવેલાં છે. AC અને BD એ E બિંદુએ એવી રીતે છેદે છે કે જેથી $\angle BEC = 130°$ અને $\angle ECD = 20°$. $\angle BAC$ શોધો.



આકૃતિ 10.39

6. ચક્રીય ચતુષ્કોણ ABCD ના વિકર્ણો E બિંદુએ છેદે છે. જો $\angle DBC = 70°$, $\angle BAC = 30°$, તો $\angle BCD$ શોધો અને જો AB = BC, તો $\angle ECD$ શોધો.
7. જો ચક્રીય ચતુષ્કોણના વિકર્ણો એ ચતુષ્કોણનાં શિરોબિંદુઓમાંથી પસાર થતા વર્તુળના વ્યાસ હોય, તો સાબિત કરો કે તે લંબચોરસ છે.
8. જો સમલંબ ચતુષ્કોણની સમાંતર ન હોય તેવી બાજુઓ સમાન હોય, તો સાબિત કરો કે તે ચક્રીય છે.
9. બે વર્તુળો એકબીજાને બે બિંદુઓ B અને C માં છેદે છે. B માંથી પસાર થતા બે રેખાખંડ ABD અને PBQ વર્તુળોને અનુક્રમે A, D અને P, Q માં છેદે તે રીતે દોરેલા છે. (જુઓ આકૃતિ 10.40.) સાબિત કરો કે $\angle ACP = \angle QCD$.



આકૃતિ 10.40

10. જો ત્રિકોણની બે બાજુઓ વ્યાસ થાય તેવી રીતે વર્તુળો દોરેલાં હોય, તો સાબિત કરો કે આ વર્તુળોનું એક છેદબિંદુ, ત્રિકોણની ત્રીજી બાજુ પર આવેલું છે.
11. કર્ણ AC હોય તેવા બે કાટકોણ ત્રિકોણ ABC અને ADC છે. સાબિત કરો કે $\angle CAD = \angle CBD$.
12. સાબિત કરો કે ચક્રીય સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ એ લંબચોરસ છે.

સ્વાધ્યાય 10.6 (વૈકલ્પિક)*

1. સાબિત કરો કે બે છેદતાં વર્તુળોના કેન્દ્રને જોડતી રેખા વર્તુળોનાં બે છેદબિંદુ આગળ સમાન ખૂણા આંતરે છે.
2. વર્તુળની 5 સેમી અને 11 સેમી લંબાઈની બે જીવાઓ અનુક્રમે AB અને CD એકબીજીને સમાંતર છે અને કેન્દ્રની વિરુદ્ધ બાજુએ આવેલી છે. AB અને CD વચ્ચેનું અંતર 6 સેમી હોય, તો વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો.
3. વર્તુળની બે સમાંતર જીવાઓની લંબાઈ 6 સેમી અને 8 સેમી છે. નાની જીવા કેન્દ્રથી 4 સેમી દૂર હોય, તો કેન્દ્રથી બીજી જીવાનું અંતર કેટલું હશે?
4. ધારો કે ખૂણા ABC નું શિરોબિંદુ વર્તુળની બહારના ભાગમાં આવેલું છે અને ખૂણાની બાજુઓ સમાન જીવાઓ AD અને CE બને તે રીતે વર્તુળને છેદે છે. સાબિત કરો કે જીવાઓ AC અને DE એ કેન્દ્ર આગળ આંતરેલા ખૂણાઓના તફાવતથી અડધો $\angle ABC$ છે.
5. સાબિત કરો કે સમબાજુ ચતુષ્કોણની કોઈ પણ બાજુને વ્યાસ તરીકે લઈ દોરેલું વર્તુળ, ચતુષ્કોણના વિકર્ણોના છેદબિંદુમાંથી પસાર થાય છે.
6. ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. A, B અને C માંથી પસાર થતું વર્તુળ CD (અથવા લંબાવેલી CD) ને E માં છેદે છે. સાબિત કરો કે AE = AD.

* *આ સ્વાધ્યાયને પરીક્ષાનો મુદ્દો બનાવવો નહિ.*

7. એક વર્તુળની જીવાઓ AC અને BD એકબીજીને દુભાગે છે. સાબિત કરો કે (i) AC અને BD વ્યાસ છે. (ii) ABCD લંબચોરસ છે.

8. ત્રિકોણ ABC ના ખૂણાઓ A, B અને C ના દુભાજકો, ત્રિકોણના પરિવર્તુળને અનુક્રમે D, E અને F માં છેદે છે. સાબિત કરો કે ત્રિકોણ DEF ના ખૂણાઓ $90° - \frac{1}{2}A$, $90° - \frac{1}{2}B$ અને $90° - \frac{1}{2}C$ છે.

9. બે સમાન વર્તુળો એકબીજાને A અને B બિંદુએ છેદે છે. A માંથી એક રેખાખંડ PAQ એવી રીતે દોરેલો છે કે જેથી P અને Q વર્તુળો પર હોય. સાબિત કરો કે BP = BQ.

10. કોઈપણ ત્રિકોણ ABC માં, જો $\angle A$ નો દુભાજક અને BC નો લંબદ્વિભાજક છેદતાં હોય, તો સાબિત કરો કે તેઓ ત્રિકોણ ABCના પરિવર્તુળ પર છેદે છે.

10.9 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં, તમે નીચેના મુદ્દાઓ શીખ્યાં :

1. વર્તુળ એ સમતલના નિશ્ચિત બિંદુથી સમાન અંતરે આવેલાં સમતલનાં તમામ બિંદુઓનો સમૂહ છે.
2. વર્તુળ (એકરૂપ વર્તુળો)ની સમાન જીવાઓ કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણા આંતરે છે.
3. જો વર્તુળ(સમાન વર્તુળો)ની બે જીવાઓ કેન્દ્ર (અનુરૂપ કેન્દ્ર) આગળ સમાન ખૂણા આંતરે, તો તે જીવાઓ સમાન છે.
4. વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી જીવા પરનો લંબ, જીવાને દુભાગે છે.
5. વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી દોરેલી રેખા જીવાને દુભાગે, તો તે રેખા જીવાને લંબ છે.
6. ત્રણ અસમરેખ બિંદુઓમાંથી પસાર થતું એક અને માત્ર એક જ વર્તુળ હોય છે.
7. વર્તુળ (એકરૂપ વર્તુળો)ની સમાન જીવાઓ કેન્દ્ર (અનુરૂપ કેન્દ્ર)થી સમાન અંતરે હોય છે.
8. વર્તુળ (એકરૂપ વર્તુળો)ના કેન્દ્ર (અનુરૂપ કેન્દ્ર)થી સમાન અંતરે આવેલી જીવાઓ સમાન હોય છે.
9. જો વર્તુળનાં બે ચાપ એકરૂપ હોય, તો તેમને સંગત જીવાઓ સમાન છે અને તેનું પ્રતીપ, જો વર્તુળની બે જીવાઓ સમાન હોય, તો તેમને સંગત (લઘુ, ગુરુ) ચાપ એકરૂપ છે.
10. વર્તુળનાં એકરૂપ ચાપ તેના કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણા આંતરે છે.
11. વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ ચાપે આંતરેલો ખૂણો એ તે ચાપે વર્તુળના બાકી રહેલા ભાગ પરના કોઈ પણ બિંદુ આગળ આંતરેલા ખૂણાથી બમણો છે.
12. વર્તુળના સમાન વૃત્તખંડના ખૂણા સમાન છે.
13. અર્ધવર્તુળમાંનો ખૂણો કાટકોણ છે.
14. જો બે બિંદુઓને જોડતો રેખાખંડ, આ રેખાખંડને સમાવતી રેખાની એક જ બાજુએ આવેલાં બીજાં બે બિંદુઓ આગળ સમાન ખૂણા આંતરે, તો તે ચારેય બિંદુઓ એક જ વર્તુળ પર આવેલાં છે.
15. ચક્રીય ચતુષ્કોણની સામસામેના ખૂણાઓની એક જોડના ખૂણાઓનો સરવાળો 180° છે.
16. જો ચતુષ્કોણની સામસામેના ખૂણાઓની એક જોડના ખૂણાઓનો સરવાળો 180° હોય, તો તે ચતુષ્કોણ ચક્રીય છે.

પ્રકરણ 11

રચનાઓ

11.1 પ્રાસ્તાવિક

અગાઉનાં પ્રકરણોમાં આપણે દોરતાં હતાં તે આકૃતિઓ માત્ર પ્રમેય સાબિત કરવા કે સ્વાધ્યાયના ઉકેલ માટે સહાયક થવા માટે જરૂરી હતી, પરંતુ તે ચોકસાઈવાળી હોય તેવું જરૂરી ન હતું. તે માત્ર પરિસ્થિતિને સમજવા અને ઉચિત તર્કને રજૂ કરવા માટે દોરવામાં આવતી હતી. આમ છતાં કેટલીક વાર ચોકસાઈવાળી આકૃતિઓની જરૂર પડે છે, ઉદાહરણ તરીકે બાંધવામાં આવનાર મકાનનો નકશો, યંત્રોના ઓજાર કે સાધનના નકશાના જુદા જુદા ભાગનાં માનચિત્રો, માર્ગનો નકશો દોરવા વગેરે. આવી કેટલીક આકૃતિઓ દોરવા માટે કેટલાક પાયાનાં ભૌમિતિક ઉપકરણોની જરૂર પડે છે. આ માટે તમારી પાસે નીચેની સામગ્રીઓ સમાવતી કંપાસપેટી હોવી જરૂરી છેઃ

(i) **અંકિત માપપટ્ટી :** તેની એક તરફ સેન્ટિમીટર અને મિલિમીટર તથા બીજી તરફ ઇંચ અને તેના ભાગ અંકિત થયેલ હોય છે.

(ii) **કાટખૂણિયાની જોડ :** તે પૈકી એકમાં $90°$, $60°$ અને $30°$ ના ખૂણા તથા બીજામાં $90°$, $45°$ અને $45°$ ના ખૂણાનો સમાવેશ થાય છે.

(iii) **વિભાજકની જોડ :** જેના બે છેડા કાગળ પર ગોઠવી શકાય તેવી સગવડ સાથે.

(iv) **પરિકરની જોડ :** જેના એક છેડે પેન્સિલ ગોઠવી શકાય તેવી સગવડ સાથે.

(v) **કોણમાપક**

સામાન્ય રીતે આ દરેક ઉપકરણની જરૂરિયાત આપેલ માપ પ્રમાણે ત્રિકોણ, વર્તુળ, ચતુષ્કોણ, બહુકોણ વગેરે જેવી ભૌમિતિક આકૃતિઓ દોરવામાં પડે છે. પરંતુ *માત્ર અન-અંકિત માપપટ્ટી કે સીધી પટ્ટી અને પરિકર જેવાં બે ઉપકરણોની મદદથી*

ભૌમિતિક આકૃતિઓ દોરવાની પ્રક્રિયાને ભૌમિતિક રચના કહે છે. જે રચનામાં માપની પણ જરૂર પડે છે, તેમાં અંકિત માપપટ્ટી અને પરિકરનો ઉપયોગ પણ કરી શકાય છે. આ પ્રકરણમાં ચોક્કસ પ્રકારના ત્રિકોણોની રચના કરવામાં ઉપયોગી હોય તેવી કેટલીક પાયાની રચનાઓનો વિચાર કરીશું.

11.2 પાયાની રચનાઓ

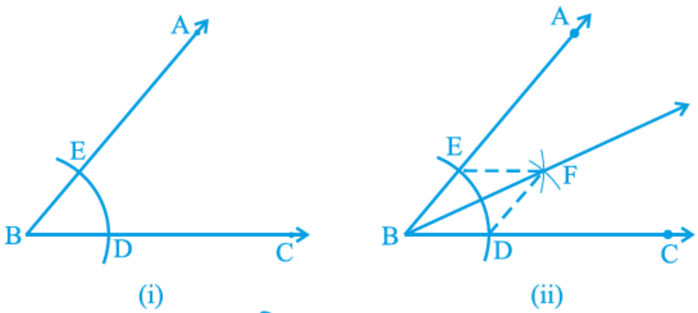
ધોરણ VI માં તમે વર્તુળ, રેખાખંડનો લંબદ્વિભાજક, 30°, 45°, 60°, 90° તથા 120° ના ખૂણાઓ અને આપેલ ખૂણાનો દ્વિભાજક જેવી રચનાઓનો કોઈ વ્યાજબી યથાર્થતા આપ્યા વગર અભ્યાસ કરી ગયાં છો. આ વિભાગમાં આ પૈકીની તેની પાછળના તર્ક સાથે કેટલીક રચનાઓ તથા આ રચનાઓ શા માટે પ્રમાણિત છે તેનો અભ્યાસ કરીશું.

રચના 11.1 : *આપેલ ખૂણાનો દ્વિભાજક રચવો.*

ખૂણો ABC આપેલ છે. આપણે તેનો દ્વિભાજક રચવો છે.

રચનાના મુદ્દા :

1. B ને કેન્દ્ર લઈ અનુકૂળ ત્રિજ્યા વડે બંને બાજુએ કિરણ BA અને BC ને છેદતું ચાપ દોરો. તે છેદબિંદુને અનુક્રમે E અને D કહો. [જુઓ આકૃતિ 11.1(i).]
2. $\frac{1}{2}$ DE કરતાં મોટી ત્રિજ્યા લઈ D અને E ને કેન્દ્ર તરીકે લઈ એકબીજાને છેદતાં ચાપ દોરો. છેદબિંદુને F કહો.
3. કિરણ BF દોરો. [જુઓ આકૃતિ 11.1(ii)]



આકૃતિ 11.1

આ કિરણ BF એ ખૂણા ABC નો માંગેલ દ્વિભાજક છે.

હવે આપણે માંગેલ ખૂણાનો દ્વિભાજક કેવી રીતે મળે છે તે જોઈએ.

DF અને EF રચો.

ત્રિકોણ BEF અને ત્રિકોણ BDF માં

$BE = BD$ (એક જ ચાપની ત્રિજ્યાઓ)

$EF = DF$ (સમાન ત્રિજ્યાવાળું ચાપ)

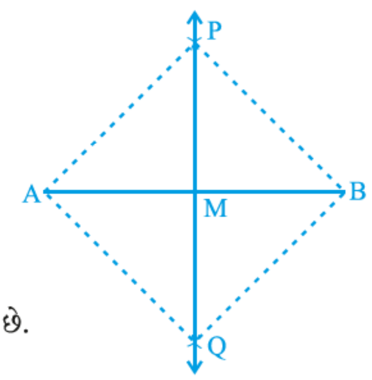
$BF = BF$ (સામાન્ય રેખાખંડ)

$\therefore \Delta BEF \cong \Delta BDF$ (બાબાબા શરત)

$\therefore \angle EBF = \angle DBF$ (એકરૂપ ત્રિકોણના અનુરૂપ ભાગો)

રચના 11.2 : *આપેલા રેખાખંડના લંબદ્વિભાજકની રચના કરવી.*

રેખાખંડ AB આપેલ છે. આપણે તેનો લંબદ્વિભાજક રચવો છે.



આકૃતિ 11.2

રચનાના મુદ્દા :

1. $\frac{1}{2}$ AB કરતાં વધારે મોટી ત્રિજ્યા લઈ ક્રમશઃ A અને B ને કેન્દ્ર તરીકે લઈ AB ની બંને બાજુએ ચાપ દોરો. (એકબીજાને છેદે તેમ)
2. આ બંને ચાપ એકબીજાને P અને Q માં છેદે છે. PQ દોરો. (જુઓ આકૃતિ.11.2.)
3. હવે PQ, AB ને બિંદુ M માં છેદે છે. આથી રેખા PMQ એ AB નો માંગેલ લંબદ્વિભાજક છે.

હવે આપણે AB નો લંબદ્વિભાજક કેવી રીતે મળે છે તે સમજીએ.

A અને B ને P તથા Q બંને સાથે જોડીએ જેથી રેખાખંડ AP, AQ, BP અને BQ મળે.

ત્રિકોણો PAQ અને PBQ માં,

$AP = BP$ (સમાન ત્રિજ્યાવાળાં ચાપ)

$AQ = BQ$ (સમાન ત્રિજ્યાવાળાં ચાપ)

$PQ = PQ$ (સામાન્ય)

$\therefore \Delta PAQ \cong \Delta PBQ$ (બાબાબા નિયમ)

$\therefore \angle APM = \angle BPM$ (એકરૂપ ત્રિકોણનાં અનુરૂપ અંગો)

હવે ત્રિકોણ PMA અને PMB માં,

$AP = BP$ (આગળ પ્રમાણે)

$PM = PM$ (સામાન્ય)

$\angle APM = \angle BPM$ (ઉપર સાબિત કર્યું)

$\therefore \Delta PMA \cong \Delta PMB$ (બાખૂબા નિયમ)

$\therefore AM = BM$ અને $\angle PMA = \angle PMB$ (એકરૂપ ત્રિકોણના અનુરૂપ ભાગો)

પરંતુ $\angle PMA + \angle PMB = 180°$ (રૈખિક જોડના ખૂણાની પૂર્વધારણા)

આથી $\angle PMA = \angle PMB = 90°$.

તેથી, PM એટલે કે PMQ એ AB નો લંબ દ્વિભાજક છે.

રચના 11.3 : *આપેલ કિરણના ઉદ્ભવબિંદુએ 60° માપના ખૂણાની રચના કરવી.*

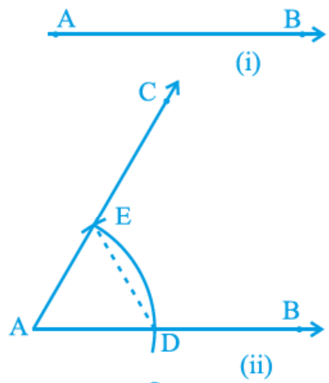
ઉદ્ભવબિંદુ A વાળું કિરણ AB લઈએ. [જુઓ આકૃતિ 11.3(i).] આપણે $\angle CAB = 60°$ થાય એવું કિરણ AC રચવું છે. તેમ કરવાની એક રીત આગળ પ્રમાણે છે :

રચનાના મુદ્દા :

1. A ને કેન્દ્ર લઈ કોઇક ત્રિજ્યા લઈ વર્તુળનું એક ચાપ દોરો. તે AB ને જ્યાં છેદે તે બિંદુને D નામ આપો.

2. D ને કેન્દ્ર લઈ તે જ માપની ત્રિજ્યા લઈ એક ચાપ દોરો. તે પ્રથમ ચાપને જે બિંદુમાં છેદે તેનું નામ E આપો.

3. E માંથી પસાર થાય તેવું કિરણ AC રચો [જુઓ આકૃતિ 11.3 (ii).]



આકૃતિ. 11.3

$\angle CAB$ માંગેલ 60° નો ખૂણો છે.

હવે આપણે 60° નો ખૂણો કેવી રીતે મળે છે તે સમજીએ.

DE જોડો.

હવે AE = AD = DE (રચના પરથી)

તેથી Δ EAD એ સમબાજુ ત્રિકોણ છે અને $\angle$ EAD તથા $\angle$ CAB એક જ છે, તેનું માપ 60° જેટલું છે.

સ્વાધ્યાય 11.1

1. આપેલ કિરણના ઉદ્ભવબિંદુ પર 90^0ના ખૂણાની રચના કરો અને પ્રમાણિત કરો.

2. આપેલ કિરણના ઉદ્ભવબિંદુ પર 45^0 ના ખૂણાની રચના કરો અને પ્રમાણિત કરો.

3. નીચે આપેલા માપના ખૂણાઓની રચના કરો :

(i) 30° (ii) $22\frac{1}{2}^\circ$ (iii) 15°

4. નીચે આપેલ ખૂણાઓ રચો અને કોણમાપક વડે માપીને ચકાસો :

(i) 75° (ii) 105° (iii) 135°

5. આપેલ બાજુઓના માપવાળા સમબાજુ ત્રિકોણની રચના કરી તેની યથાર્થતા દર્શાવો.

11.3 ત્રિકોણની કેટલીક રચનાઓ

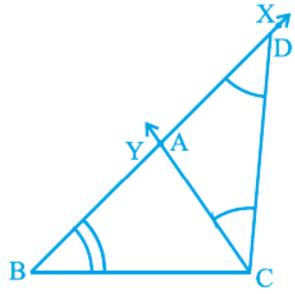
અત્યાર સુધી આપણે કેટલીક પાયાની રચનાઓનો વિચાર કર્યો. હવે પછી આપણે આગળના ધોરણની તથા ઉપર આપેલ રચનાઓનો ઉપયોગ કરીને ત્રિકોણની કેટલીક રચનાઓ કરી. પ્રકરણ 7 ની બે ત્રિકોણની એકરૂપતા માટેના બાખૂબા, બાબાબા, ખૂબાખૂ અને કાકબા નિયમને યાદ કરી લઈએ. (i) જો બે બાજુ અને અંતર્ગત ખૂણો આપેલ હોય. (ii) ત્રણ બાજુઓ આપેલ હોય. (iii) બે ખૂણા અને અંતર્ગત બાજુ આપેલ હોય. (iv) કાટકોણ ત્રિકોણમાં કર્ણ તથા એક બાજુ આપેલ હોય તો અનન્ય ત્રિકોણ મળે. તમે ધોરણ VII માં આવા ત્રિકોણની રચના કેવી રીતે કરવી તે શીખી ગયાં છો. હવે ત્રિકોણની કેટલીક વધુ રચનાઓનો વિચાર કરીએ. તમે એ નોંધ્યું હશે કે ત્રિકોણની રચના કરવા માટે તેનાં ઓછામાં ઓછા ત્રણ અંગ (ભાગ) આપેલ હોવા જોઈએ. પરંતુ ત્રણ અંગોના બધા જ સંયોજન હેતુ સિદ્ધ કરવા માટે પર્યાપ્ત નથી. ઉદાહરણ તરીકે બે બાજુઓ અને એક ખૂણો (અંતર્ગત ન હોય તેવો) આપેલ હોય, તો આવા અનન્ય ત્રિકોણની રચના કરવી હંમેશાં શક્ય નથી.

રચના 11.4 : *ત્રિકોણનો પાયો, પાયા પરનો એક ખૂણો અને બીજી બે બાજુઓના માપનો સરવાળો આપ્યો હોય તેવો ત્રિકોણ રચવો.*

તમારે એવી રચના કરવાની છે કે જેમાં પાયો BC, પાયા પરનો ખૂણો $\angle B$ અને ત્રિકોણ ABC ની બે બાજુઓનો સરવાળો AB + AC આપેલ છે.

રચનાના મુદ્દા :

1. પાયો BC રચો અને આપેલ ખૂણા જેવડો ખૂણો બિંદુ B પર રચો. તેને ખૂણો XBC કહો.
2. કિરણ BX પર BD = AB + AC થાય તેવો રેખાખંડ BD કાપો.
3. DC રચો અને $\angle BDC$ જેટલો ખૂણો DCY રચો.
4. ધારો કે CY એ BX ને A માં છેદે. (જુઓ આકૃતિ 11.4.)



આકૃતિ 11.4

આમ, ABC માગેલ ત્રિકોણ છે.

હવે આપણે માગેલ ત્રિકોણ કેવી રીતે મળે છે તે જોઈએ.

પાયો BC અને $\angle B$ આપ્યા પ્રમાણે દોરેલ છે. ત્યાર બાદ ત્રિકોણ ACD માં

$\angle ACD = \angle ADC$ (રચના પરથી)

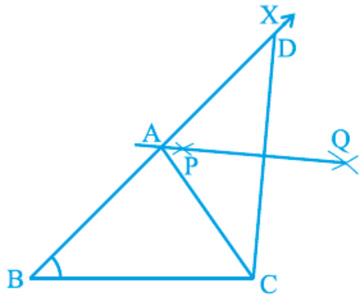
તેથી $AC = AD$

આથી, $AB = BD - AD = BD - AC$

$\therefore\ AB + AC = BD$

વૈકલ્પિક પદ્ધતિ :

ઉપરના વિકલ્પ પ્રમાણે પ્રથમ બે મુદ્દાને અનુસરો. ત્યાર બાદ CD નો લંબદ્વિભાજક PQ રચો. તે BD ને A માં છેદે. (જુઓ આકૃતિ 11.5.) AC રચો. આમ ABC માંગેલ ત્રિકોણ છે. એ નોંધીએ કે A, CD ના લંબદ્વિભાજક પર આવેલ છે. તેથી AD = AC.



આકૃતિ 11.5

નોંધ : જો $AB + AC \le BC$ હોય, તો તેવા ત્રિકોણની રચના શક્ય નથી.

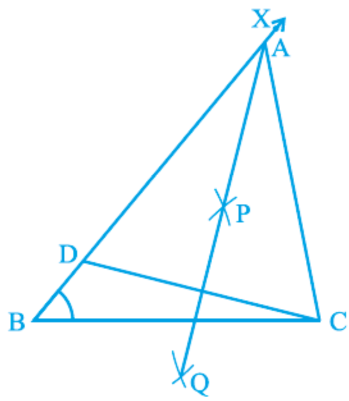
રચના 11.5 : *પાયો, પાયા પરનો એક ખૂણો અને બાકીની બે બાજુઓનો તફાવત આપ્યો હોય તેવો ત્રિકોણ રચવો.*

પાયો BC, પાયા પરનો $\angle B$ અને બે બાજુઓનો તફાવત AB – AC અથવા AC – AB આપેલ છે. તમારે ત્રિકોણ ABC ની રચના કરવાની છે. અહીં નીચે આપેલ બે વિકલ્પો સ્પષ્ટ છે :

વિકલ્પ (i) : ધારો કે AB > AC. તેથી AB – AC આપેલ છે :

રચનાના મુદ્દા :

1. પાયો BC રચો. આપેલ ખૂણા જેટલો ખૂણો XBC બિંદુ B પર રચો.
2. કિરણ BX પર, BD = AB – AC થાય તેવો રેખાખંડ કાપો.
3. DC રચો અને DC નો લંબ દ્વિભાજક PQ રચો.



આકૃતિ 11.6

4. ધારો કે PQ એ BX ને બિંદુ A માં છેદે છે. AC રચો. (જુઓ આકૃતિ 11.6.)

આમ ABC માગેલ ત્રિકોણ છે.

હવે, આપણે માગેલ ત્રિકોણ ABC કેવી રીતે મળે છે તે જોઈએ.

પાયો BC અને $\angle B$ કહેવા પ્રમાણે દોરેલ છે.

બિંદુ A લંબદ્વિભાજક DC પર આપેલ છે.

આથી, $AD = AC$

$\therefore BD = AB - AD = AB - AC.$

વિકલ્પ (ii) : ધારો કે $AB < AC$. તેથી $AC - AB$ આપેલ છે.

રચનાના મુદ્દા :

1. વિકલ્પ (i) પ્રમાણે

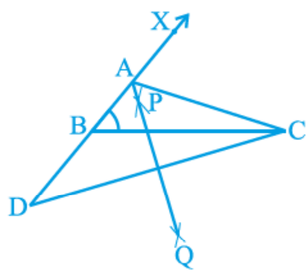
2. રેખાખંડ BC ના જે અર્ધતલમાં કિરણ BX છે તેના વિરૂધ્ધ અર્ધતલમાં લંબાવેલ રેખા BX પર $AC - AB$ ના માપનો એક રેખાખંડ BD કાપો.

3 DC રચો અને DC નો લંબદ્વિભાજક PQ રચો.

4. ધારો કે PQ એ BX ને A માં છેદે છે. AC રચો. (જુઓ આકૃતિ 11.7.)

આમ ABC માંગેલ ત્રિકોણ છે.

તમે રચનાને વિકલ્પ (i) પ્રમાણે પ્રમાણિત કરી શકો છો.



આકૃતિ 11.7

રચના 11.6 : *ત્રિકોણની પરિમિતિ અને પાયા પરના ખૂણા આપ્યા હોય તેવો ત્રિકોણ રચવો.*

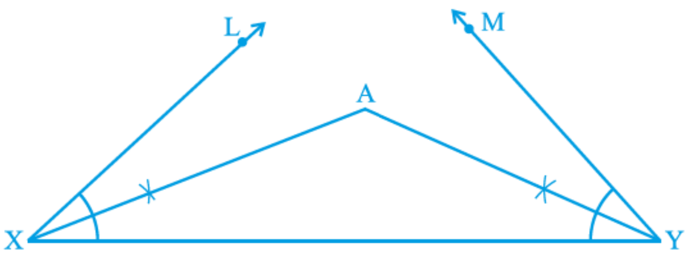
તમારે એવા ત્રિકોણ ABC ની રચના કરવાની છે કે જેના પાયા પરના $\angle B$, $\angle C$ અને $BC + CA + AB$ આપેલ છે.

રચનાના મુદ્દા :

1. $BC + CA + AB$ થાય તેવો રેખાખંડ રચો, તેને XY કહો.

2. $\angle B$ ને સમાન $\angle LXY$ અને $\angle C$ ને સમાન $\angle MYX$ રચો.

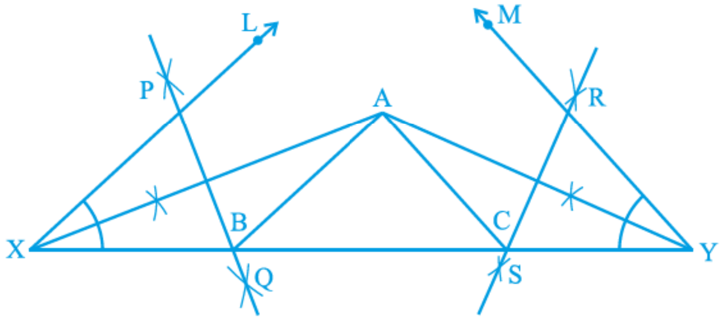
3. બિંદુ A માં છેદે તેવા $\angle LXY$ અને $\angle MYX$ ના દ્વિભાજક રચો. [જુઓ આકૃતિ 11.8(i).]



આકૃતિ 11.8 (i)

4. AX નો લંબદ્વિભાજક PQ તથા AY નો લંબદ્વિભાજક RS દોરો.

5. PQ એ XY ને B માં તથા RS એ XY ને C માં છેદે તેમ દોરો . AB અને AC રચો. [જુઓ આકૃતિ11.8(ii).]



આકૃતિ 11.8 (ii)

આમ ABC માંગેલ ત્રિકોણ છે.

આ રચનાને પ્રમાણિત કરવા માટે, તમે એ નોંધો કે AXના લંબદ્વિભાજક PQ પર B આવેલ છે.

તેથી XB = AB અને તે જ રીતે CY = AC.

આ પરથી $\quad BC + CA + AB = BC + XB + CY = XY.$

ફરીથી, $\quad \angle BAX = \angle AXB \quad$ ($\angle AXB$ પરથી $AB = XB$)

અને $\angle ABC = \angle BAX + \angle AXB = 2\,\angle AXB = \angle LXY$

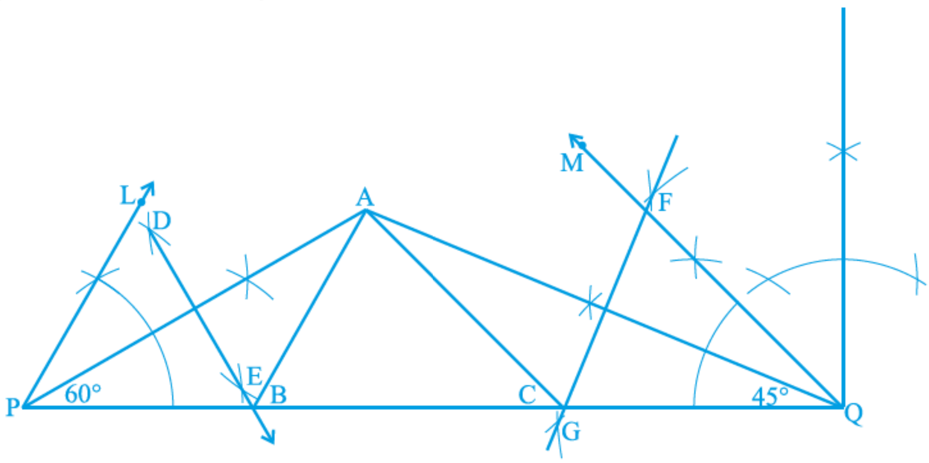
તે જ રીતે, માંગ્યા પ્રમાણે $\angle ACB = \angle MYX$

ઉદાહરણ 1 : જે ત્રિકોણમાં $\angle B = 60°$, $\angle C = 45°$ અને $AB + BC + CA = 11$ સેમી હોય તેવા ત્રિકોણ ABC ની રચના કરો.

રચનાના મુદ્દા :

1. 11 સેમીનો રેખાખંડ PQ રચો. (= AB + BC + CA)

2. P પર 60° નો ખૂણો અને Q પર 45° નો ખૂણો રચો.



આકૃતિ 11.9

3. આ ખૂણાઓનું દ્વિભાજન કરો. ધારો કે આ ખૂણાઓના દ્વિભાજક A બિંદુએ છેદે છે.

4. PQ ને B માં છેદે તેવો AP નો લંબદ્વિભાજક DE રચો તથા PQ ને C માં છેદે તેવો AQ નો લંબદ્વિભાજક FG રચો.

5. AB અને AC રચો. (જુઓ આકૃતિ 11.9.) આમ, ABC માગેલ ત્રિકોણ છે.

સ્વાધ્યાય 11.2

1. $BC = 7$ સેમી, $\angle B = 75^\circ$ અને $AB + AC = 13$ સેમી હોય તેવા ત્રિકોણ ABC ની રચના કરો.

2. $BC = 8$ સેમી, $\angle B = 45^\circ$ અને $AB - AC = 3.5$ સેમી હોય તેવા ત્રિકોણ ABC ની રચના કરો.

3. $QR = 6$ સેમી, $\angle Q = 60^\circ$ અને $PR - PQ = 2$ સેમી હોય તેવા ત્રિકોણ PQR ની રચના કરો.

4. $\angle Y = 30^\circ$, $\angle Z = 90^\circ$ અને $XY + YZ + ZX = 11$ સેમી હોય તેવા ત્રિકોણ XYZ ની રચના કરો.

5. પાયો 12 સેમી અને કર્ણ તથા બીજી બાજુનો સરવાળો 18 સેમી હોય તેવા કાટકોણ ત્રિકોણની રચના કરો.

11.4 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે પરિકર અને સીધીપટ્ટીની મદદથી નીચેની રચનાઓ દોરતા શીખ્યા :

1. આપેલ ખૂણાના દ્વિભાજકની રચના

2. આપેલ રેખાખંડના લંબદ્વિભાજકની રચના

3. 60° ખૂણાની રચના અને વગેરે

4. ત્રિકોણનો પાયો, પાયા પરનો એક ખૂણો અને બીજી બે બાજુઓનો સરવાળો આપ્યો હોય તેવા ત્રિકોણની રચના

5. ત્રિકોણનો પાયો, પાયા પરનો એક ખૂણો અને બીજી બે બાજુઓનો તફાવત આપ્યો હોય તેવા ત્રિકોણની રચના

6. ત્રિકોણના પાયાના બે ખૂણા અને ત્રિકોણની પરિમિતિ આપી હોય તેવા ત્રિકોણની રચના

પ્રકરણ 12

હેરોનું સૂત્ર

12.1 પ્રાસ્તાવિક

અગાઉનાં ધોરણોમાં તમે ભિન્ન આકારની આકૃતિઓ જેવી કે ચોરસ, લંબચોરસ, ત્રિકોણ અને ચતુષ્કોણનો અભ્યાસ કરેલ છે. વધુમાં તમે આમાંની કેટલીક આકૃતિઓ જેવી કે લંબચોરસ, ચોરસ વગેરેની પરિમિતિ અને ક્ષેત્રફળની ગણતરી પણ કરેલ છે. ઉદાહરણ તરીકે તમે તમારા વર્ગના ભોંયતળિયાની પરિમિતિ અને ક્ષેત્રફળ શોધી શકો.

જો આપણે ભોંયતળિયાની ફરતે ધાર પર એક ચક્કર પૂર્ણ કરીએ, તો કાપેલ અંતરને ભોંયતળિયાની પરિમિતિ કહેવાય. વળી, ભોંયતળિયાનું માપ એ તેનું ક્ષેત્રફળ છે.

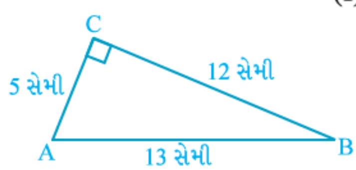
આથી જો તમારો વર્ગખંડ લંબચોરસ હોય અને તેની લંબાઈ 10 મીટર અને પહોળાઈ 8 મીટર હોય, તો તેની પરિમિતિ 2(10 મી + 8 મી) = 36 મી અને ક્ષેત્રફળ = 10 મી × 8 મી અર્થાત્, 80 મી^{2} થાય.

લંબાઈ તથા પહોળાઈના માપના એકમ મીટર (મી) અથવા સેન્ટિમીટર(સેમી) વગેરે લખાય.

કોઈ સમતલીય આકૃતિના ક્ષેત્રફળના માપનો એકમ ચોરસ મીટર (મી^{2}) અથવા ચોરસ સેન્ટિમીટર(સેમી^{2}) વગેરે લખાય.

ધારો કે તમે ત્રિકોણાકાર બગીચામાં બેઠા છો. તમે તેનું ક્ષેત્રફળ કેવી રીતે શોધશો ? પ્રકરણ 9 અને તમે આગળના ધોરણમાં શીખ્યાં છો તે પરથી તમે જાણો છો કે,

$$\boxed{\text{ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ} = \frac{1}{2} \times \text{પાયો} \times \text{વેધ}} \qquad \text{(I)}$$



આકૃતિ 12.1

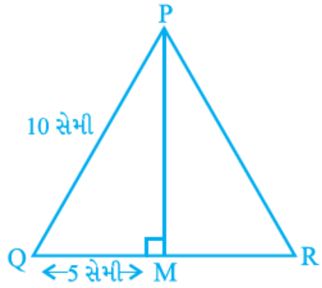
આપણે જોઈ શકીએ કે જો ત્રિકોણ કાટકોણ ત્રિકોણ હોય તો કાટખૂણો બનાવતી બે બાજુઓને પાયો અને વેધ ગણી આ સૂત્રનો સીધો ઉપયોગ કરી શકીએ. ઉદાહરણ તરીકે, કાટકોણ ત્રિકોણની બાજુઓનાં માપ 5 સેમી, 12 સેમી અને 13 સેમી છે; તો આપણે પાયાની લંબાઈ 12 સેમી અને

વેધ 5 સેમી લઈ શકીએ. (જુઓ આકૃતિ 12.1.) આથી,

$$\Delta ABC \text{ નું ક્ષેત્રફળ} = \frac{1}{2} \times \text{પાયો} \times \text{વેધ} = \frac{1}{2} \times 12 \times 5 \text{ સેમી}^2 = 30 \text{ સેમી}^2$$

આપણે પાયો 5 સેમી અને વેધ 12 સેમી પણ લઈ શકીએ.

હવે, ધારો કે આપણે 10 સેમી બાજુવાળા સમબાજુ ત્રિકોણ PQR નું ક્ષેત્રફળ શોધવું છે. (જુઓ આકૃતિ 12.2.) તેનું ક્ષેત્રફળ શોધવા આપણને તેનો વેધ જોઈશે. તમે આ ત્રિકોણનો વેધ શોધી શકો ?



આકૃતિ 12.2

આપણે યાદ કરીએ કે જ્યારે બાજુઓ જાણતા હોઈએ ત્યારે તેનો વેધ કેવી રીતે શોધી શકીએ. સમબાજુ ત્રિકોણમાં આ શક્ય છે. QR નું મધ્યબિંદુ M લો અને તેને P સાથે જોડો. આપણે જાણીએ છીએ કે PMQ કાટકોણ ત્રિકોણ છે. આથી પાયથાગોરસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં, નીચે પ્રમાણે આપણે PM ની લંબાઈ શોધી શકીએ.

$$PQ^2 = PM^2 + QM^2$$

$$\therefore\ (10)^2 = PM^2 + (5)^2, \text{ કારણ કે } QM = MR.$$

$$\therefore\ PM^2 = 75$$

$$\therefore\ PM = \sqrt{75} \text{ સેમી} = 5\sqrt{3} \text{ સેમી}$$

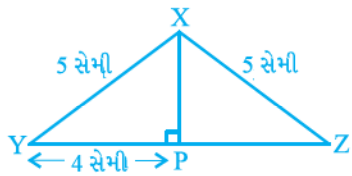
આથી, Δ PQR નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \times$ પાયો $\times$ વેધ

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 5\sqrt{3} \text{ સેમી}^2 = 25\sqrt{3} \text{ સેમી}^2$$

હવે આપણે જોઈએ કે આ સૂત્રના ઉપયોગથી સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળની ગણતરી કરી શકાય કે નહિ. ઉદાહરણ તરીકે, ત્રિકોણ XYZ માં સમાન બાજુઓ XY અને XZ ની લંબાઈ 5 સેમી અને અસમાન બાજુ YZ ની લંબાઈ 8 સેમી લઈએ. (જુઓ આકૃતિ12.3.)

આ વિકલ્પમાં પણ આપણે ત્રિકોણનો વેધ શોધીશું. તે માટે X માંથી YZ બાજુ પર લંબ XP દોરો. આમ, જોઈ શકાય કે લંબ XP ત્રિકોણની બાજુ YZ ને બે સમાન ભાગમાં વહેંચે.

આથી, $YP = PZ = \frac{1}{2} YZ = 4$ સેમી



આકૃતિ 12.3

આથી, પાયથાગોરસના પ્રમેય મુજબ,

$$XP^2 = XY^2 - YP^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$$

આથી, $XP = 3$ સેમી

હવે, Δ XYZ નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \times$ પાયો YZ $\times$ વેધ XP $= \frac{1}{2} \times 8 \times 3$ સેમી$^2 = 12$ સેમી^{2}.

હવે ધારો કે વિષમબાજુ ત્રિકોણની બાજુઓની લંબાઈ આપણે જાણીએ છીએ. પરંતુ વેધ જ્ઞાત નથી. તો પણ તમે તેનું ક્ષેત્રફળ શોધી શકો? દાખલા તરીકે એક ત્રિકોણાકાર બગીચાની બાજુઓ 40 મી, 32 મી અને 24 મી છે. તેનું ક્ષેત્રફળ કેવી રીતે શોધવું ? જો સૂત્રનો ઉપયોગ કરવો હોય તો ચોક્કસપણે તમારે તેના વેધની ગણતરી કરવી પડે. પરંતુ તેના વેધ શોધવાની ચાવી

આપણી પાસે નથી. તે શોધવાનો પ્રયત્ન કરો. જો તમે આ કરવા સક્ષમ ન હો તો, આ પછીનો વિભાગ જુઓ.

12.2 ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ - હેરોના સૂત્ર પરથી

Heron was born in about 10AD possibly in Alexandria in Egypt. He worked in applied mathematics. His works on mathematical and physical subjects are so numerous and varied that he is considered to be an encyclopedic writer in these fields. His geometrical works deal largely with problems on mensuration written in three books. Book I deals with the area of squares, rectangles, triangles, trapezoids (trapezia), various other specialised quadrilaterals, the regular polygons, circles, surfaces of cylinders, cones, spheres etc. In this book, Heron has derived the famous formula for the area of a triangle in terms of its three sides.

Hero (10 C.E. – 75 C.E.)

આકૃતિ 12.4

ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધવા હેરોએ આપેલ સૂત્રને ઘણી વખત ***હેરોનું સૂત્ર*** *(Heron's formula)* પણ કહેવાય છે. તે નીચે મુજબ દર્શાવાય છે :

$$\boxed{\text{ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} \qquad \text{(II)}$$

અહીં, a, b અને c ત્રિકોણની બાજુઓ અને s = ***અર્ધપરિમિતિ*** અર્થાત્ $s = \dfrac{a+b+c}{2}$,

જ્યાં સહેલાઈથી વેધનું માપ ના શોધી શકાતું હોય તેવા ત્રિકોણ માટે આ સૂત્ર ઉપયોગી છે. ચાલો આપણે આ સૂત્રનો ઉપયોગ ઉપર દર્શાવેલ ત્રિકોણાકાર બગીચા ABC નું ક્ષેત્રફળ શોધવા કરીએ. (જુઓ આકૃતિ 12.5.)

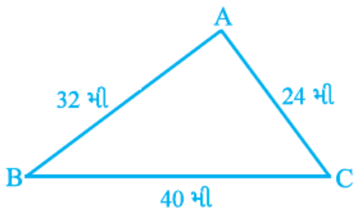
આપણે, $a = 40$ મી, $b = 24$ મી, $c = 32$ મી લઈએ.

આથી, આપણી પાસે $s = \dfrac{40+24+32}{2}$ મી $= 48$ મી

$s - a = (48 - 40)$ મી $= 8$ મી

$s - b = (48 - 24)$ મી $= 24$ મી

$s - c = (48 - 32)$ મી $= 16$ મી



આકૃતિ 12.5

આથી, બગીચા ABC નું ક્ષેત્રફળ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{48 \times 8 \times 24 \times 16}$ મી$^2 = 384$ મી^{2}

આપણે જોઇએ કે, $32^2 + 24^2 = 1024 + 576 = 1600 = 40^2$. આથી, બગીચાની બાજુઓ કાટકોણ ત્રિકોણ બનાવે છે. સૌથી મોટી બાજુ અર્થાત્, કર્ણ BC = 40 મી અને બાજુઓ AB અને AC વચ્ચેનો ખૂણો 90° નો થાય.

સૂત્ર (I) નો ઉપયોગ કરતાં આપણે ચકાસી શકીએ કે બગીચાનું ક્ષેત્રફળ એ $\frac{1}{2} \times 32 \times 24$ મી^{2} = 384 મી^{2} થાય.

આ રીતે મળતું ક્ષેત્રફળ હેરોના સૂત્રથી મળતા ક્ષેત્રફળ જેટલું જ છે.

હવે, હેરોના સૂત્રથી તમે આગળ જેની ચર્ચા કરેલ છે તે ત્રિકોણનાં ક્ષેત્રફળ ચકાસો. દાખલા તરીકે,

(i) જેની પ્રત્યેક બાજુ 10 સેમી હોય તેવો ત્રિકોણ સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

(ii) જેની બે સમાન બાજુ 5 સેમી અને ત્રીજી અસમાન બાજુ 8 સેમી હોય તેવો ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.

તમે જોઈ શકો છો કે,

(i) માટે, $s = \frac{10+10+10}{2}$ સેમી = 15 સેમી

ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ = $\sqrt{15(15-10)(15-10)(15-10)}$ સેમી^{2}

$= \sqrt{15 \times 5 \times 5 \times 5}$ સેમી^{2} = $25\sqrt{3}$ સેમી^{2}

(ii) માટે, $s = \frac{8+5+5}{2}$ સેમી = 9 સેમી

ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ = $\sqrt{9(9-8)(9-5)(9-5)}$ સેમી^{2} = $\sqrt{9 \times 1 \times 4 \times 4}$ સેમી^{2} = 12 સેમી^{2}

ચાલો હવે, કેટલાંક વધુ ઉદાહરણો ગણીએ :

ઉદાહરણ 1 : એક ત્રિકોણની પરિમિતિ 32 સેમી અને બે બાજુ 8 સેમી અને 11 સેમી હોય, તો તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો. (જુઓ આકૃતિ 12.6.)

ઉકેલ : અહીં, આપણી પાસે ત્રિકોણની પરિમિતિ = 32 સેમી, a = 8 સેમી અને b = 11 સેમી,

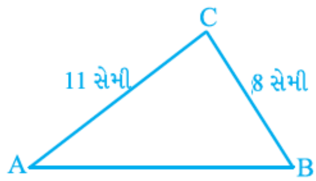
ત્રીજી બાજુ c = 32 સેમી − (8 + 11) સેમી = 13 સેમી,

અહીં, $2s = 32$, અર્થાત્ s = 16 સેમી,

$s - a$ = (16 − 8) સેમી = 8 સેમી,

$s - b$ = (16 − 11) સેમી = 5 સેમી,

$s - c$ = (16 − 13) સેમી = 3 સેમી,



આકૃતિ 12.6

આથી, ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{16 \times 8 \times 5 \times 3}$ સેમી^{2} = $8\sqrt{30}$ સેમી^{2}

ઉદાહરણ 2 : એક ત્રિકોણાકાર બગીચા ABCની બાજુઓ 120 મી, 80 મી અને 50 મી છે. (જુઓ આકૃતિ 12.7.) *ધનિયા* માળીએ બધી જ તરફ તારની વાડ બાંધવાની છે અને અંદર તરફ ઘાસ વાવવાનું છે. તેને કેટલા ક્ષેત્રફળમાં વાવણી કરવાની રહેશે ? તે એક બાજુએ 3 મીટર પહોળી જગા દરવાજા માટે છોડે છે, તો તેની ફરતે કાંટાળી વાડ કરવા માટે ₹ 20 પ્રતિ મીટરના ભાવે થતો ખર્ચ શોધો.

ઉકેલ : બગીચાનું ક્ષેત્રફળ શોધવા,

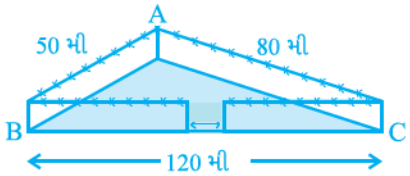
$2s$ = 50 મી + 80 મી + 120 મી = 250 મી

અર્થાત્, $s = 125$ મી

હવે, $s - a = (125 - 120)$ મી $= 5$ મી

$s - b = (125 - 80)$ મી $= 45$ મી

$s - c = (125 - 50)$ મી $= 75$ મી



આકૃતિ 12.7

આથી બગીચાનું ક્ષેત્રફળ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{125 \times 5 \times 45 \times 75}$ મી^{2}

$= 375\sqrt{15}$ મી^{2}

વળી બગીચાની પરિમિતિ $= AB + BC + CA = 250$ મી

આથી, વાડ બનાવવા માટે જરૂરી લંબાઈ $= 250$ મી $- 3$ મી (દરવાજા માટે છોડેલ) $= 247$ મી અને આથી, વાડ માટે થતો ખર્ચ $=$ ₹ $20 \times 247 =$ ₹ 4940

ઉદાહરણ 3 : એક ત્રિકોણાકાર જમીનના ટુકડાની બાજુઓની લંબાઈ 3 : 5 : 7 ના પ્રમાણમાં છે અને તેની પરિમિતિ 300 મી છે. તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

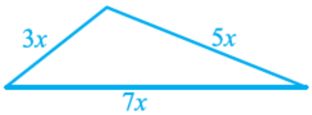
ઉકેલ : ધારો કે બાજુઓ (મીટરમાં) $3x$, $5x$ અને $7x$ છે. (જુઓ આકૃતિ 12.8)

આથી, આપણે જાણીએ છીએ કે $3x + 5x + 7x = 300$ (ત્રિકોણની પરિમિતિ)

માટે, $15x = 300$, અર્થાત્ $x = 20$.

આથી, ત્રિકોણની બાજુઓ 3×20 મી, 5×20 મી અને 7×20 મી થાય.

અર્થાત્, 60 મી, 100 મી અને 140 મી થાય.



આકૃતિ 12.8

તમે ક્ષેત્રફળ શોધી શકો ? [હેરોના સૂત્ર પરથી]

$$\text{અહીં, } s = \frac{60 + 100 + 140}{2} \text{ મી} = 150 \text{ મી}$$

અને આથી, ક્ષેત્રફળ $= \sqrt{150(150 - 60)(150 - 100)(150 - 140)}$ મી^{2}

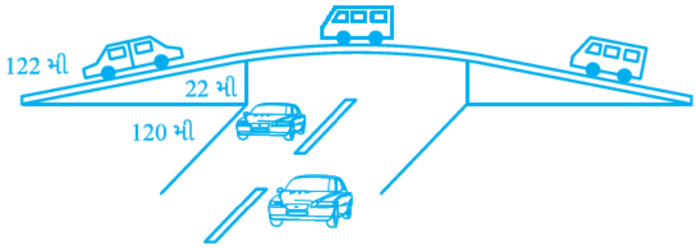
$= \sqrt{150 \times 90 \times 50 \times 10}$ મી^{2}

$= 1500\sqrt{3}$ મી^{2}

સ્વાધ્યાય 12.1

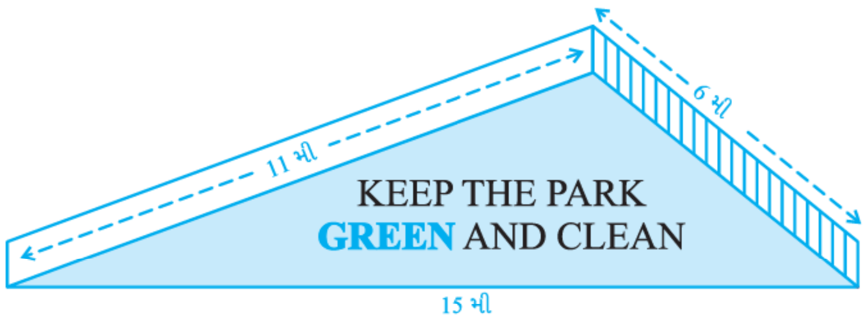
1. જેની બાજુની લંબાઈ 'a' હોય તેવા સમબાજુ ત્રિકોણ આકારના ટ્રાફિક સિગ્નલના પાટિયામાં 'SCHOOL AHEAD' એમ લખેલ છે. તો આ પાટિયાનું ક્ષેત્રફળ હેરોના સૂત્ર પરથી મેળવો. જો તેની પરિમિતિ 180 સેમી હોય, તો તેનું ક્ષેત્રફળ કેટલું થાય ?
2. એક ફ્લાય ઓવરની ત્રિકોણાકાર દિવાલોનો ઉપયોગ જાહેરાત માટે કરવામાં આવે છે. આ દિવાલોની બાજુઓ 122 મી, 22 મી અને 120 મી છે. (જુઓ આકૃતિ 12.9.) જાહેરાત પ્રતિવર્ષ ₹ 5000 પ્રતિ મી^{2} ના દરે કમાણી કરી આપે છે.

એક કંપની તે દીવાલોમાંની એક 3 મહિના માટે ભાડે રાખે છે, તો તેણે કેટલું ભાડું ચૂકવવું પડે :



આકૃતિ 12.9

3. બગીચામાં એક લપસણી છે. તેની એક બાજુની દીવાલ કોઈક રંગથી રંગી તેના પર “KEEP THE PARK GREEN AND CLEAN” એવો સંદેશ લખેલ છે. (જુઓ આકૃતિ 12.10.) જો દીવાલની બાજુઓ 15 મી, 11 મી અને 6 મીની હોય, તો રંગેલ દીવાલનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



આકૃતિ 12.10

4. જો ત્રિકોણની પરિમિતિ 42 સેમી અને બે બાજુઓ 18 સેમી તથા 10 સેમીની હોય, તો તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

5. ત્રિકોણની બાજુઓ 12 : 17 : 25 ના પ્રમાણમાં હોય અને તેની પરિમિતિ 540 સેમી હોય, તો તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

6. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની પરિમિતિ 30 સેમી અને સમાન બાજુઓ પૈકી પ્રત્યેકની લંબાઈ 12 સેમી છે, તો ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

12.3 ચતુષ્કોણનાં ક્ષેત્રફળ શોધવા હેરોના સૂત્રનો ઉપયોગ

ધારો કે એક ખેડૂતને પોતાની જમીન ખેડવાની છે અને તે આ કામ માટે કેટલાક મજૂરો રાખે છે. જો ખેડવા માટે મજૂરી પ્રતિ ચોરસ મીટર ચૂકવવાની હોય, તો તે આ કેવી રીતે કરી શકે ? ઘણી વખત ખેતરોના આકાર ચતુષ્કોણ હોય છે. આપણે ચતુષ્કોણના ત્રિકોણાકાર ભાગ પાડી ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધવાનું સૂત્ર વાપરી શકીએ. ચાલો નીચેનો પ્રશ્ન જોઈએ :

ઉદાહરણ 4 : કમલા પાસે ત્રિકોણાકાર ખેતર છે. તેની બાજુની લંબાઈ 240 મી, 200 મી, 360 મી છે. ત્યાં તે ઘઉં ઉગાડે છે. તેને અડીને આવેલ બીજા ત્રિકોણાકાર ખેતરની બાજુઓ 240 મી, 320 મી, 400 મી છે. ત્યાં તે ડુંગળી અને બટાટા ઉગાડે છે. (જુઓ આકૃતિ 12.11.) તે સૌથી મોટી બાજુના મધ્યબિંદુને સામેના શિરોબિંદુ સાથે જોડી ખેતરના બે ભાગ કરે છે અને એક ભાગમાં બટાટા અને બીજા ભાગમાં ડુંગળી ઉગાડે છે, તો ઘઉં, બટાટા અને ડુંગળી પ્રત્યેક માટે કેટલું ક્ષેત્રફળ(હેક્ટરમાં) ઉપયોગમાં લેવાયું હશે? (1 હેક્ટર = 10000 મી^{2})

ઉકેલ : ધારો કે તે ખેતર ABC માં ઘઉં ઉગાડે છે. વળી, ધારો કે તે ખેતર ACD માં AD ના મધ્યબિંદુ E ને C સાથે જોડી બે ભાગમાં વિભાજિત કરાય છે. ત્રિકોણ ABC નું ક્ષેત્રફળ શોધવા આપણી પાસે,

$a = 200$ મી, $b = 240$ મી, $c = 360$ મી છે.

આથી, $s = \dfrac{200 + 240 + 360}{2}$ મી $= 400$ મી.

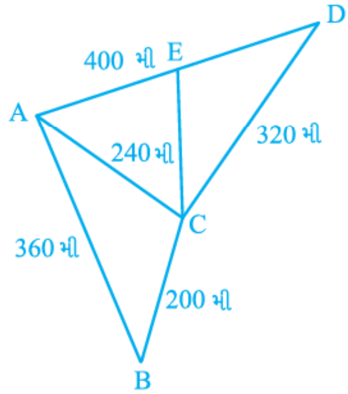
આથી, ઘઉં ઉગાડવા માટે પ્રાપ્ત ક્ષેત્રફળ,

$= \sqrt{400(400-200)\,(400-240)\,(400-360)}$ મી^{2}

$= \sqrt{400 \times 200 \times 160 \times 40}$ મી^{2}

$= 16000\sqrt{2}$ મી^{2} $= 1.6 \times \sqrt{2}$ હેક્ટર

$= 2.26$ હેક્ટર (લગભગ)



આકૃતિ 12.11

હવે, ત્રિકોણ ACD નું ક્ષેત્રફળ શોધીએ.

અહીં, $s = \dfrac{240 + 320 + 400}{2}$ મી $= 480$ મી

આથી, Δ ACD નું ક્ષેત્રફળ $= \sqrt{480(480-240)\,(480-320)\,(480-400)}$ મી^{2}

$= \sqrt{480 \times 240 \times 160 \times 80}$ મી^{2} $= 38400$ મી^{2} $= 3.84$ હેક્ટર

આપણે નોંધીએ કે AD ના મધ્યબિંદુ E ને C સાથે જોડતો રેખાખંડ Δ ACD ને બે સમાન ક્ષેત્રફળવાળા ભાગમાં વહેંચે છે. તમે તેનું કારણ આપી શકો ? અલબત્ત તેમના પાયા AE અને ED સમાન લંબાઈના તથા વેધ પણ સમાન છે.

આથી, ડુંગળી ઉગાડવા માટેનું ક્ષેત્રફળ = બટાટા ઉગાડવા માટેનું ક્ષેત્રફળ

$= (3.84 \div 2)$ હેક્ટર $= 1.92$ હેક્ટર

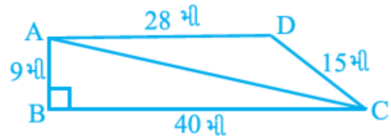
ઉદાહરણ 5 : સ્વચ્છતા અભિયાન માટે શાળાના વિદ્યાર્થીઓ રેલી કાઢે છે. તે શેરીઓમાં બે સમૂહમાં ચાલે છે. એક સમૂહ AB, BC અને CA શેરીઓમાં તથા બીજો સમૂહ AC, CD અને DA શેરીઓમાં (જુઓ આકૃતિ 12.12.) ચાલે છે. પછી તે આ શેરીઓથી ઘેરાયેલા ક્ષેત્રફળની સફાઈ કરે છે. જો AB = 9 મી, BC = 40 મી, CD = 15 મી, DA = 28 મી અને $\angle$ B = 90° હોય, તો કયો સમૂહ વધુ ક્ષેત્રફળની સફાઈ કરે છે અને કેટલાં વધુ ક્ષેત્રફળ જેટલી ? વિદ્યાર્થી દ્વારા કુલ કેટલા ક્ષેત્રફળ જેટલી સફાઈ થઈ છે ? (શેરીની પહોળાઈને અવગણતાં)

ઉકેલ : AB = 9 મી અને BC = 40 મી, $\angle$ B = 90° હોવાથી,

$$AC = \sqrt{9^2 + 40^2} \text{ મી}$$

$$= \sqrt{81 + 1600} \text{ મી}$$

$$= \sqrt{1681} \text{ મી} = 41 \text{ મી}$$



આકૃતિ 12.12

હવે પ્રથમ સમૂહ Δ ABC ના ક્ષેત્રફળ જેટલી સફાઈ કરે છે. તે કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

આથી Δ ABC નું ક્ષેત્રફળ $= \dfrac{1}{2} \times$ પાયો $\times$ વેધ

$$= \frac{1}{2} \times 40 \times 9 \text{ મી}^2 = 180 \text{ મી}^2$$

બીજો સમૂહ Δ ACD ના ક્ષેત્રફળ જેટલી સફાઈ કરે છે. તે વિષમબાજુ ત્રિકોણ છે અને તેની બાજુઓ 41 મી, 15 મી અને 28 મી છે.

અહીં, $$s = \frac{41+15+28}{2} \text{ મી} = 42 \text{ મી}$$

આથી, Δ ACD નું ક્ષેત્રફળ $$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{42(42-41)(42-15)(42-28)} \text{ મી}^2$$

$$= \sqrt{42 \times 1 \times 27 \times 14} \text{ મી}^2 = 126 \text{ મી}^2$$

આથી, પ્રથમ સમૂહ 180 મી^{2} જેટલી સફાઈ કરે છે. તે (180 – 126) મી^{2} અર્થાત્, બીજા સમૂહ દ્વારા થતી સફાઈના ક્ષેત્રફળ કરતાં 54 મી^{2} વધુ છે.

બધા જ વિદ્યાર્થીઓ દ્વારા સફાઈ થયેલ કુલ ક્ષેત્રફળ = (180 + 126) મી^{2} = 306 મી^{2}

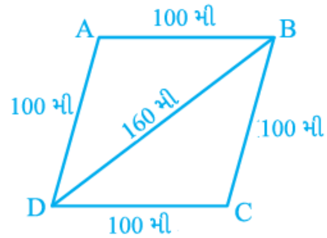
ઉદાહરણ 6 : સાન્યા પાસે સમભુજ ચતુષ્કોણ આકારનો જમીનનો એક ટુકડો છે. (જુઓ આકૃતિ 12.13) તે તેના એક પુત્ર અને પુત્રીને આ જમીનમાં કામ કરી ભિન્ન-ભિન્ન પાક ઉગાડે તેમ ઇચ્છે છે. તે જમીનના બે સમાન ભાગ કરે છે. જો જમીનની પરિમિતિ 400 મી અને એક વિકર્ણની લંબાઈ 160 મી હોય, તો પાક ઉગાડવા માટે બંનેને કેટલું ક્ષેત્રફળ મળશે ?

ઉકેલ : ધારો કે ABCD ખેતર છે.

પરિમિતિ = 400 મી

આથી દરેક બાજુ = 400 મી ÷ 4 = 100 મી

આથી, AB = AD = 100 મી



આકૃતિ 12.13

ધારો કે વિકર્ણ BD = 160 મી

આથી, Δ ABD ની અર્ધપરિમિતિ

$$s = \frac{100+100+160}{2} \text{ મી} = 180 \text{ મી}$$

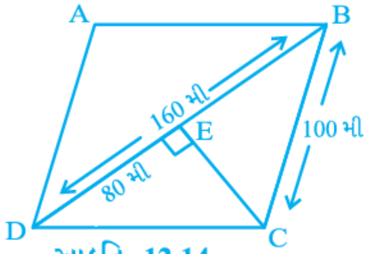
આથી, Δ ABD નું ક્ષેત્રફળ $$= \sqrt{180(180-100)(180-100)(180-160)} \text{ મી}^2$$

$$= \sqrt{180 \times 80 \times 80 \times 20} \text{ મી}^2$$

$$= 4800 \text{ મી}^2$$

આથી, દરેકને મળતું ક્ષેત્રફળ 4800 મી^{2} જેટલું હશે.

વૈકલ્પિક રીત : $CE \perp BD$ દોરો (જુઓ આકૃતિ 12.14.)



આકૃતિ 12.14

BD = 160 મી હોવાથી

DE = 160 મી ÷ 2 = 80 મી

અને, $DE^2 + CE^2 = DC^2$,

$CE = \sqrt{DC^2 - DE^2}$

અથવા $CE = \sqrt{100^2 - 80^2}$ મી $= 60$ મી

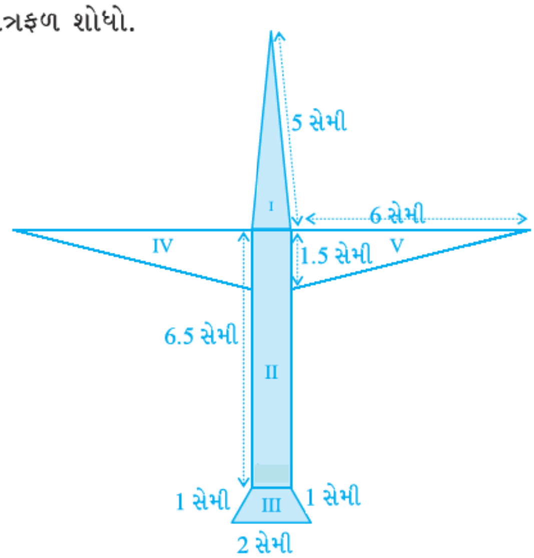
માટે Δ BCD નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \times 160 \times 60$ મી^{2} $= 4800$ મી^{2}

સ્વાધ્યાય 12.2

1. એક બગીચો ABCD ચતુષ્કોણ આકારનો છે, જ્યાં, $\angle C = 90^\circ$, AB = 9 મી, BC = 12 મી, CD = 5 મી અને AD = 8 મી. તેનાથી ઘેરાયેલ ભાગનું ક્ષેત્રફળ કેટલું થશે ?

2. જો AB = 3 સેમી, BC = 4 સેમી, CD = 4 સેમી, DA = 5 સેમી અને AC = 5 સેમી હોય, તો ચતુષ્કોણ ABCD નું ક્ષેત્રફળ શોધો.

3. રાધા રંગીન કાગળનો ઉપયોગ કરી આકૃતિ 12.15 માં બતાવ્યા મુજબનું હવાઈ જહાજનું ચિત્ર તૈયાર કરે છે. આ માટે વપરાતા કાગળનું કુલ ક્ષેત્રફળ શોધો.



આકૃતિ 12.15

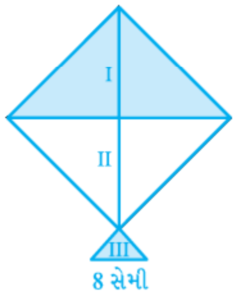
4. એક ત્રિકોણ અને એક સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણના ક્ષેત્રફળ તથા આધાર સમાન છે. જો ત્રિકોણની બાજુઓ 26 સેમી, 28 સેમી અને 30 સેમી હોય અને સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણ 28 સેમીના આધાર પર રહેલ હોય તો તેની ઊંચાઈ શોધો.

5. સમબાજુ ચતુષ્કોણ આકારના ખેતરમાં 18 ગાયોને ચરવા લીલું ઘાસ ઉગાડેલ છે. જો સમબાજુ ચતુષ્કોણની દરેક બાજુની લંબાઈ 30 મી હોય અને મોટા વિકર્ણનું માપ 48 મી હોય, તો દરેક ગાયને ચરવા કેટલા ક્ષેત્રફળ જેટલું ઘાસ ખેતરમાંથી મળશે ?

6. એક છત્રી બે અલગ રંગના 10 ત્રિકોણાકાર કપડાંમાંથી સીવીને બનાવેલ છે.(જુઓ આકૃતિ 12.16.) દરેક ટુકડાની લંબાઈ 20 સેમી, 50 સેમી અને 50 સેમી છે. છત્રી બનાવવા દરેક રંગના કુલ કેટલા કાપડનો ઉપયોગ થયો હશે ?

આકૃતિ 12.16

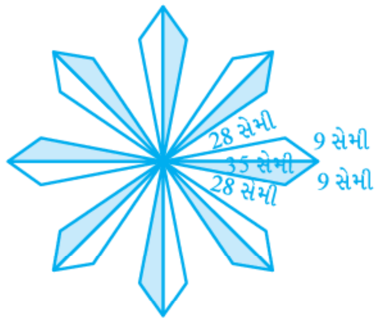
7. એક પતંગ ચોરસ આકારનો છે. તેના વિકર્ણની લંબાઈ 32 સેમી છે અને એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણનો પાયો 8 સેમી અને પ્રત્યેક સમાન બાજુ 6 સેમી છે. તેને ત્રણ જુદા જુદા રંગથી આકૃતિ 12.17 માં બતાવ્યા પ્રમાણે બનાવવામાં આવે છે. તેમાં દરેક રંગનો કેટલો કાગળ વપરાયો હશે ?



આકૃતિ 12.17

8. એક ભોંયતળિયે 16 ત્રિકોણાકાર ટાઇલ્સનો ઉપયોગ કરી ફૂલની આકૃતિ બનાવવામાં આવી છે. ત્રિકોણની બાજુઓ 9 સેમી, 28 સેમી અને 35 સેમી હોય, તો 50 પૈસા પ્રતિ સેમી^{2} ના દરે ટાઇલ્સને પૉલીશ કરવાનો ખર્ચ શોધો.(આકૃતિ 12.18.)

9. એક ખેતરનો આકાર સમલંબ ચતુષ્કોણ છે. તેની સમાંતર બાજુઓ 25 મી અને 10 મી લંબાઈની છે. સમાંતર ના હોય તેવી બાજુઓ 14 મી અને 13 મી હોય, તો ખેતરનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



આકૃતિ 12.18

12.4 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દા શીખ્યાં :

1. જે ત્રિકોણની બાજુઓ a, b અને c હોય તેવા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટેનું હેરોનું સૂત્ર

$$\text{ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \text{ છે.}$$

$$\text{જ્યાં, } s = \frac{a+b+c}{2}$$

2. જે ચતુષ્કોણની બાજુઓનાં અને એક વિકર્ણનાં માપ આપેલ હોય તે ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ શોધવા તેને બે ત્રિકોણમાં વિભાજિત કરો અને હેરોના સૂત્રનો ઉપયોગ કરો.

પ્રકરણ 13

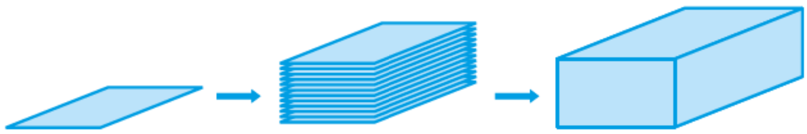
પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ

13.1 પ્રાસ્તાવિક

સામાન્ય રીતે, જ્યાં જોઈએ ત્યાં આપણે ઘન પદાર્થ જોઈએ છીએ. આપણે અત્યાર સુધી આપણી નોંધપોથી કે કાળાપાટિયા પર સહેલાઈથી દોરી શકાય તેવી આકૃતિનો અભ્યાસ કર્યો. એવી આકૃતિઓને સમતલીય આકૃતિઓ કહેવાય. આપણે લંબચોરસ, ચોરસ અને વર્તુળની પરિમિતિ અને ક્ષેત્રફળ કેવી રીતે શોધવાં તેની સમજ આગળના ધોરણમાં મેળવી ચૂક્યાં છીએ. એ જોવું રસપ્રદ બનશે કે આવી ઘણી બધી સમાન આકાર અને કદની સમતલીય આકૃતિઓને કાગળના પૂંઠામાંથી કાપી અને તેની લંબરૂપે થપ્પી કરતાં શું મળશે તે જોવું રસપ્રદ થશે. આમ કરતાં, આપણને ***લંબઘન*** (*cuboid*), ***નળાકાર*** (*cylinder*) વગેરે જેવી ઘન આકૃતિઓ મળે છે. અગાઉના ધોરણમાં તમે લંબઘન, સમઘન અને નળાકારનાં પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ કેવી રીતે શોધવા તે વિશે શીખી ગયા છો. હવે આપણે લંબઘન અને નળાકારનાં પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ શોધવાની ચર્ચા ઊંડાણથી કરીશું અને તે પરથી ***શંકુ*** (*cone*) અને ***ગોલક*** (*sphere*) જેવી ઘનાકૃતિઓનો અભ્યાસ કરીશું.

13.2 લંબઘન અને સમઘનનાં પૃષ્ઠફળ

શું તમે ઘણાબધા કાગળનું બંડલ જોયું છે? તે કેવું દેખાય છે? શું તે આકૃતિ 13.1 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેનું લાગે છે ?



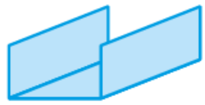
આકૃતિ 13.1

તે લંબઘન બનાવે છે. જો આપણે તેને ઢાંકવું હોય, તો તે માટે કેટલો ખાખી કાગળ જોઈએ ? ચાલો આપણે જોઈએ :

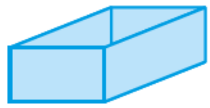
પ્રથમ બંડલનું તળિયું ઢાંકવા માટે લંબચોરસ કાગળનો ટુકડો જોઈશે. તે આકૃતિ 13.2 (a) માં દર્શાવેલ છે.


(a)

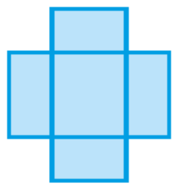
ત્યાર બાદ બે બાજુ ઢાંકવા બે મોટા લંબચોરસ ટુકડા જોઈશે. તે આકૃતિ 13.2 (b) જેવું દેખાશે.


(b)

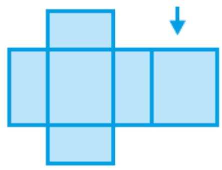
હવે તેના આગળ અને પાછળના ભાગ ઢાંકવા બીજાં વધુ બે જુદાં માપના લંબચોરસ ટુકડાની જરૂર પડશે. તેમના ઉપયોગથી આકૃતિ 13.2(c) માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેની રચના થશે.


(c)

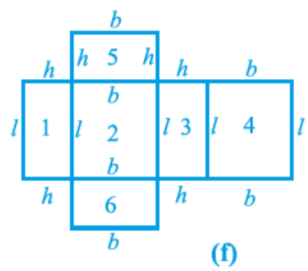
આ આકૃતિને ખોલી નાંખતાં 13.2 (d) માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેની દેખાશે.


(d)

અંતે આ બંડલને ઉપરથી ઢાંકવા આપણે તળિયા જેટલા જ માપના બીજા લંબચોરસ ટુકડાની જરૂર પડશે. તેને જમણી બાજુ ચોંટાડતા આકૃતિ 13.2(e) માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેનું ચિત્ર દેખાશે.


(e)

આમ, આપણે લંબઘનની બહારની બધી જ સપાટી ઢાંકવા છ લંબચોરસ ટુકડાનો ઉપયોગ કરેલ છે.



(f)

આકૃતિ 13.2

તે દર્શાવે છે કે લંબઘનની બહારની સપાટી છ લંબચોરસથી બને છે. (અલબત, આ લંબચોરસ પ્રદેશને લંબઘનનાં પૃષ્ઠ કહેવાય). તે દરેકનાં ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે તેમની લંબાઈ અને પહોળાઈના ગુણાકાર કરી અને આવાં છ ક્ષેત્રફળનો સરવાળો કરતાં કુલ ક્ષેત્રફળ મળે.

હવે, જો લંબઘનની લંબાઈ l, પહોળાઈ b અને ઊંચાઈ h લઈએ તો આ માપથી બનતા આકારની આકૃતિ 13.2(f) માં દર્શાવ્યા મુજબની હશે.

આથી, છ લંબચોરસના ક્ષેત્રફળનો સરવાળો :

લંબચોરસ 1 નું ક્ષેત્રફળ $(= l \times h)$

$+$

લંબચોરસ 2 નું ક્ષેત્રફળ $(= l \times b)$

$+$

લંબચોરસ 3 નું ક્ષેત્રફળ $(= l \times h)$

$+$

લંબચોરસ 4 નું ક્ષેત્રફળ $(= l \times b)$

$+$

લંબચોરસ 5 નું ક્ષેત્રફળ $(= b \times h)$

$+$

લંબચોરસ 6 નું ક્ષેત્રફળ $(= b \times h)$

$= 2(l \times b) + 2(b \times h) + 2(l \times h)$

$= 2(lb + bh + hl)$

આ પરથી :

લંબઘનનું પૃષ્ઠફળ = **$2(lb + bh + hl)$**

અહીં l, b અને h લંબઘનની *ત્રણ ધાર* (*edges*) છે.

નોંધ : આપણે ક્ષેત્રફળનો એકમ એ ચોરસ એકમ તરીકે લઈશું કારણ કે આ પ્રદેશનું પરિમાણ આપણે એકમ લંબાઈની બાજુના ચોરસથી ભરી અને માપીએ છીએ

ઉદાહરણ તરીકે, જો લંબઘનની લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈ અનુક્રમે 15 સેમી, 10 સેમી અને 20 સેમી હોય, તો તેનું પૃષ્ઠફળ :

$2[(15 \times 10) + (10 \times 20) + (20 \times 15)]$ સેમી^{2}

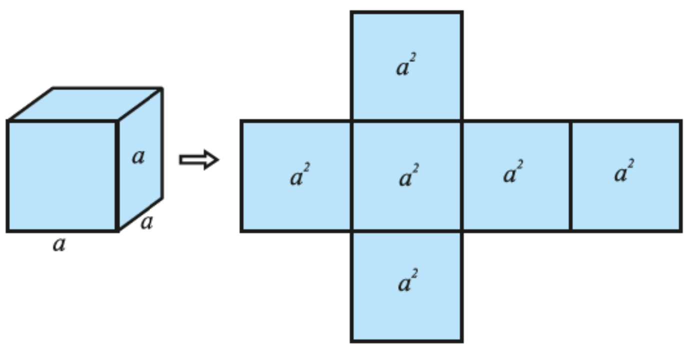
$= 2(150 + 200 + 300)$ સેમી^{2}

$= 2 \times 650$ સેમી^{2}

$= 1300$ સેમી^{2}

યાદ કરો કે જે લંબઘનમાં લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈ સમાન હોય તે લંબઘનને ***સમઘન*** (*cube*) કહેવાય. જો સમઘનની દરેક ધાર a હોય, તો આ સમઘનનું પૃષ્ઠફળ $2(a \times a + a \times a + a \times a)$, અર્થાત્, $6a^2$ (જુઓ આકૃતિ 13.3), જેટલું થાય.

a ધારવાળા સમઘનનું પૃષ્ઠફળ = **$6a^2$**



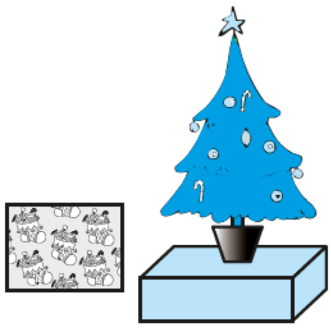
આકૃતિ 13.3

હવે, આપણે લંબઘનનાં છ પૃષ્ઠો પૈકી લંબઘનના પાયા અને તળિયા સિવાયનાં ચાર પૃષ્ઠોનાં જ ક્ષેત્રફળ શોધીએ. આવા કિસ્સામાં ચાર બાજુનાં ક્ષેત્રફળને લંબઘનનાં **પાર્શ્વપૃષ્ઠોનું ક્ષેત્રફળ***(Lateral surface area)* કહેવાય. *આથી જો લંબઘનની લંબાઈ l, પહોળાઈ b અને ઊંચાઈ h હોય તો તેનાં પાર્શ્વપૃષ્ઠોનું ક્ષેત્રફળ $2lh + 2bh$ અથવા $2(l + b)h$ થાય. આ જ રીતે, સમઘનની બાજુની લંબાઈ a હોય, તો તેના પાર્શ્વપૃષ્ઠોનું ક્ષેત્રફળ $4a^2$ થાય.*

ઉપરની બાબતો ધ્યાનમાં રાખતાં સમઘન કે લંબઘનના પૃષ્ઠફળને કુલ પૃષ્ઠફળ કહીશું. ચાલો આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ ગણીએ.

ઉદાહરણ 1 : મેરીને તેનું ક્રિસમસ-ટ્રી શણગારવું છે. તે સાન્તાક્લોઝના ચિત્રને રંગીન કાગળ વીંટાળેલા લંબઘન લાકડાના ખોખા પર આ ક્રિસમસ-ટ્રી મૂકવા માંગે છે. (જુઓ આકૃતિ. 13.4.) આ કામ માટે તેણે ચોક્કસ કેટલો કાગળ ખરીદવો જોઇએ તે જાણવું છે. જો ખોખાની લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈ અનુક્રમે 80 સેમી, 40 સેમી અને 20 સેમી હોય, તો 40 સેમી લંબાઈવાળા કેટલા ચોરસ કાગળની જરૂર પડે?

ઉકેલ : મેરીને ખોખાની બહારની બાજુ કાગળ ચોંટાડવો છે. આથી જરૂરી કાગળ એ લંબઘન આકારના ખોખાના પૃષ્ઠફળ જેટલો થાય. ખોખાની બાજુનાં માપઃ



આકૃતિ 13.4

લંબાઈ = 80 સેમી, પહોળાઈ = 40 સેમી, ઊંચાઈ = 20 સેમી

ખોખાનું પૃષ્ઠફળ $= 2(lb + bh + hl)$

$= 2[(80 \times 40) + (40 \times 20) + (20 \times 80)]$ સેમી^{2}

$= 2[3200 + 800 + 1600]$ સેમી^{2}

$= 2 \times 5600$ સેમી^{2} $= 11200$ સેમી^{2}

દરેક કાગળનું ક્ષેત્રફળ $= 40 \times 40$ સેમી^{2}

$= 1600$ સેમી^{2}

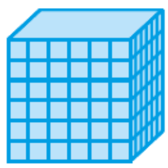
આથી, જરૂરી કાગળના ટુકડાની સંખ્યા $= \dfrac{\text{ખોખાનું પૃષ્ઠફળ}}{\text{એક કાગળનું ક્ષેત્રફળ}} = \dfrac{11200}{1600} = 7$

આથી, તેને 7 કાગળની જરૂર પડશે.

નોંધ : $2lb$, $2bh$, $2hl$ માટે અનુક્રમે 4, 1 અને 2 કાગળ જોઈએ. કાગળના માપ તથા ખોખાના માપ વચ્ચે યોગ્ય ગુણિતના સંબંધ ના હોય, તો કાગળના ટુકડા કરવા પડે તે યોગ્ય નથી.

ઉદાહરણ 2 : હમીદ તેના ઘર માટે સમઘન આકારની ઢાંકણ સાથેની પાણીની ટાંકી બનાવે છે. તેની બહારની ધાર 1.5 મી લાંબી છે. તે તળિયા સિવાયના ટાંકીના બહારના ભાગમાં 25 સેમી લંબાઈવાળી ચોરસ લાદી લગાવે છે. (જુઓ આકૃતિ 13.5.) તો લાદીના પ્રત્યેક ડઝનના ₹ 360 લેખે તેણે કરેલ ખર્ચ શોધો.

ઉકેલ : હમીદ પાંચ બાજુ પર લાદી લગાવવા માંગે છે. તેથી જરૂરી લાદીની સંખ્યા નક્કી કરવા, તેણે ટાંકીનું પૃષ્ઠફળ જાણવું પડે.



આકૃતિ 13.5

સમઘન ટાંકીની ધાર = 1.5 મી = 150 સેમી ($= a$)

આથી, ટાંકીના બહારના ભાગનું જરૂરી ક્ષેત્રફળ $= 5 \times 150 \times 150$ સેમી^{2}

દરેક ચોરસ લાદીનું ક્ષેત્રફળ $= (\text{બાજુ})^2 = 25 \times 25$ સેમી^{2}

$$\text{જરૂરી લાદીની સંખ્યા} = \frac{\text{ટાંકીના બહારના ભાગનું ક્ષેત્રફળ}}{\text{એક લાદીનું ક્ષેત્રફળ}}$$

$$= \frac{5 \times 150 \times 150}{25 \times 25} = 180$$

1 ડઝન અર્થાત્ 12 લાદી લગાડવાનો ખર્ચ = ₹ 360

$$\text{એક લાદી લગાડવાનો ખર્ચ} = ₹\ \frac{360}{12} = ₹\ 30$$

180 લાદી લગાડવાનો ખર્ચ $= 180 \times$ ₹ 30 = ₹ 5400

સ્વાધ્યાય 13.1

1. એક 1.5 મી લાંબો, 1.25 મી પહોળો અને 65 સેમી ઊંડો પ્લાસ્ટિકનો ડબો બનાવવો છે. તેનું મથાળું ખુલ્લું છે. પ્લાસ્ટિક શીટની જાડાઈ અવગણતાં

(i) ડબો બનાવવા જરૂરી શીટનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

(ii) 1 મી^{2} શીટના ₹ 20 લેખે શીટ માટે થતો કુલ ખર્ચ શોધો.

2. એક રૂમની લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈ અનુક્રમે 5 મી, 4 મી અને 3 મી છે. રૂમની દીવાલ અને છત ₹ 7.50 પ્રતિ મી^{2} પ્રમાણે રંગવાનો ખર્ચ શોધો.

3. લંબચોરસ હૉલના તળિયાની પરિમિતિ 250 મી છે. જો ₹ 10 પ્રતિ મી^{2} લેખે તેની ચાર દીવાલ રંગવાનો ખર્ચ ₹15000 થતો હોય, તો હૉલની ઊંચાઈ શોધો.

[**સૂચના :** ચાર દીવાલનું ક્ષેત્રફળ = પાર્શ્વપૃષ્ઠોનું ક્ષેત્રફળ]

4. એક ડબામાં 9.375 મી^{2} ક્ષેત્રફળ રંગી શકાય તેટલો રંગ છે. 22.5 સેમી× 10 સેમી × 7.5 સેમી માપની કેટલી ઇંટો આ ડબાના રંગથી રંગી શકાય?

5. એક સમઘન પેટીની બધી જ ધાર 10 સેમી અને બીજી લંબઘન પેટીની લંબાઈ 12.5 સેમી, પહોળાઈ 10 સેમી અને ઊંચાઈ 8 સેમી છે.

(i) કઈ પેટીનાં પાર્શ્વપૃષ્ઠોનું ક્ષેત્રફળ વધુ છે? કેટલું?

(ii) કઈ પેટીનું કુલ પૃષ્ઠફળ ઓછું છે? કેટલું?

6. ઘરમાં એક કાચનું ગ્રીન હાઉસ (તળિયા સાથે) બનાવેલ છે. તેને ટેપથી જોડેલ છે. જો તે 30 સેમી લાંબું, 25 સેમી પહોળું અને 25 સેમી ઊંચું હોય, તો

(i) વપરાયેલ કાચનું ક્ષેત્રફળ કેટલું થશે?

(ii) આ 12 ધાર માટે કેટલી ટેપની જરૂર પડે?

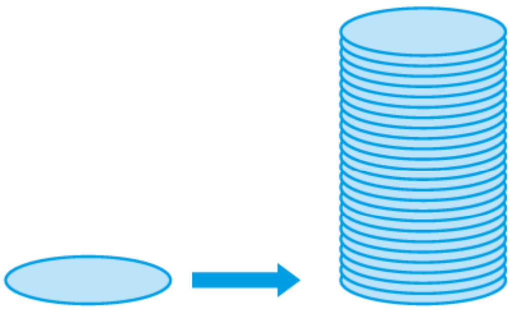
7. મીઠાઈની દુકાન, 'શાંતિ મીઠાઈ' કાગળના ખોખામાં મીઠાઈ પૅક કરવા ખોખા બનાવવાનો ઑર્ડર આપે છે. જુદાં જુદાં માપનાં

બે ખોખાની જરૂરિયાત છે. મોટા ખોખાનાં માપ 25 સેમી × 20 સેમી × 5 સેમી અને નાના ખોખાનાં માપ 15 સેમી × 12 સેમી × 5 સેમી છે. બધાને ઢાંકવા કુલ પૃષ્ઠફળના 5 % જેટલો વધુ કાગળ જોઈશે. જો પૂંઠાનો ભાવ 1000 સેમી^{2} ના ₹ 4 હોય, તો બંને પ્રકારના 250 ખોખાં બનાવવાનો ખર્ચ શોધો.

8. પરવીન તેની ગાડી ઢાંકવા જેની ચાર બાજુઓ અને મથાળું તાડપત્રીથી બનાવેલ હોય તેવા માળખાવાળી કામચલાઉ પેટી (તેનો આગળનો ભાગ વીંટાળી શકાય તેવા ઢાંકણ જેવો હોય) આકારનું માળખું રચવા ઇચ્છે છે. માની લઈએ કે સિલાઇ કામમાં ખૂબ ઓછી જગા વપરાય છે. તેને અવગણી શકાય તો 2.5 મી ઊંચી અને 4 મી × 3 મી આધારવાળી પેટી માટે કેટલી તાડપત્રી જોઈશે?

13.3 લંબવૃત્તીય નળાકારનું પૃષ્ઠફળ

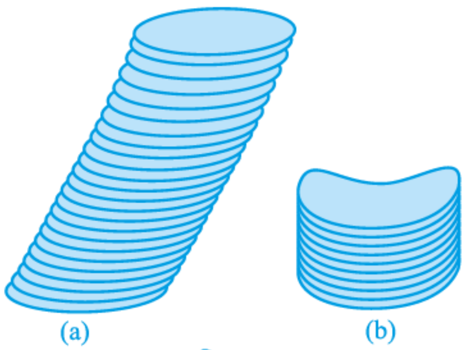
જો આપણે વર્તુળાકાર કાગળને એકબીજા પર ગોઠવીએ તો, આગળ લંબચોરસ ટુકડાની થપ્પી કરી હતી તે મુજબ અહીં આપણને શું મળે? (જુઓ આકૃતિ 13.6.)



આકૃતિ 13.6

અહીં, જો થપ્પી શિરોલંબ હોય, તો આપણને **લંબવૃત્તીય નળાકાર** (*Right circular cylinder*) મળશે, કેમકે તે વર્તુળાકાર તળિયા સાથે કાટખૂણો બનાવે છે. આપણે હવે જોઈએ કે કયા નળાકારને લંબવૃત્તીય નળાકાર ન કહેવાય.

આકૃતિ 13.7 (a) માં તમે જેનો પાયો વર્તુળાકાર છે તેવો નળાકાર જોઈ શકો છો તે પાયા સાથે કાટકોણ રચતો નથી. આથી આપણે તેને લંબવૃત્તીય નળાકાર કહી શકીએ નહિ.

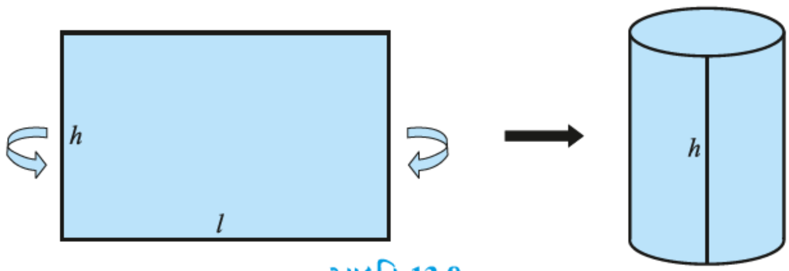


આકૃતિ 13.7

વળી, જો આકૃતિ 13.7 (b) માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેનો પાયો વર્તુળાકાર ના હોય, તોપણ આપણે તેને લંબવૃત્તીય નળાકાર કહીશું નહિ.

નોંધ : અહીં આપણે લંબવૃત્તીય નળાકારનો જ ઉપયોગ કરીશું. આથી, જો ઉલ્લેખ ના કરેલ હોય, તો નળાકાર શબ્દનો અર્થ લંબવૃત્તીય નળાકાર કરીશું.

હવે, જો નળાકારને રંગીન કાગળ વડે ઢાંકવો હોય તો ઓછામાં ઓછો કેટલો કાગળ જોઈએ? પ્રથમ જેની લંબાઈ નળાકારને ગોળ વીંટાળવા માટે પૂરતી હોય તેવો એક લંબચોરસ કાગળનો ટુકડો લો અને પહોળાઈ નળાકારની ઊંચાઈ જેટલી હોય. (જુઓ આકૃતિ 13.8.)



આકૃતિ 13.8

કાગળનું ક્ષેત્રફળ એ નળાકારની વક્રસપાટીના ક્ષેત્રફળ જેટલું હશે. નોંધો કે કાગળની લંબાઈ એ વર્તુળાકાર પાયાના પરિઘ જેટલી અર્થાત્ $2\pi r$ છે.

આથી, નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = લંબચોરસ કાગળનું ક્ષેત્રફળ

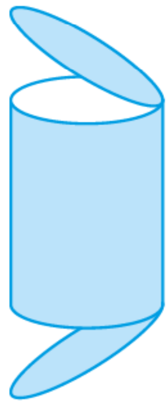
= લંબાઈ × પહોળાઈ

= નળાકારના પાયાની પરિમિતિ × h

= $2\pi r \times h$

આમ, નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = $\boldsymbol{2\pi rh}$

અહીં, નળાકારના પાયાની ત્રિજ્યા r અને નળાકારની ઊંચાઈ h છે.



આકૃતિ 13.9

નોંધ : નળાકારના કિસ્સામાં, જો બીજો ઉલ્લેખ ના કરેલ હોય, તો 'નળાકારની ત્રિજ્યા' અર્થાત્ 'નળાકારના પાયાની ત્રિજ્યા' સમજીશું.

જો નળાકારના તળિયા અને મથાળાને પણ ઢાંકીએ તો, આપણે r ત્રિજ્યાવાળાં બે વર્તુળો (અલબત વર્તુળાકાર પ્રદેશ)ની જરૂર પડે અને દરેકનું ક્ષેત્રફળ πr^2 હોવાથી (જુઓ આકૃતિ 13.9), નળાકારનું કુલ પૃષ્ઠફળ $2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(r + h)$ થશે.

આથી, $\boxed{\text{નળાકારનું કુલ પૃષ્ઠફળ} = \boldsymbol{2\pi r(r + h)}}$

અહીં, નળાકારની ઊંચાઈ h અને ત્રિજ્યા r છે.

નોંધ : તમે પ્રકરણ 1 પરથી યાદ કરી શકશો કે π એ અસંમેય સંખ્યા છે. આથી, π ની દશાંશ અભિવ્યક્તિ અનંત અને અનાવૃત્ત હોય છે. પરંતુ, આપણે ગણતરીમાં તેની લગભગ કિંમત $\frac{22}{7}$ અથવા 3.14 લઈશું.

ઉદાહરણ 3 : સાવિત્રી તેના વિજ્ઞાનના પ્રૉજેક્ટ માટે નળાકાર કેલિડોસ્કૉપનું મોડેલ બનાવવા માંગે છે. કેલિડોસ્કૉપની વક્રસપાટી માટે તે ચાર્ટ પેપરનો ઉપયોગ કરે છે. (જુઓ આકૃતિ 13.10.) જો કેલિડોસ્કૉપની લંબાઈ 25 સેમી અને ત્રિજ્યા 3.5 સેમી રાખે, તો તેને કેટલા પેપરની જરૂર પડે? તમે $\pi = \frac{22}{7}$ લઈ શકો.

આકૃતિ 13.10

ઉકેલ : નળાકાર કેલિડોસ્કૉપના પાયાની ત્રિજ્યા (r) = 3.5 સેમી

કેલિડોસ્કૉપની ઊંચાઈ (લંબાઈ) (h) = 25 સેમી

આવશ્યક ચાર્ટ પેપરનું ક્ષેત્રફળ = કેલિડોસ્કૉપની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$= 2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 25$ સેમી^{2}

$= 550$ સેમી^{2}

સ્વાધ્યાય 13.2

જ્યાં અન્ય ઉલ્લેખ ન હોય ત્યાં $\pi = \frac{22}{7}$ લો.

1. લંબવૃત્તીય નળાકારની ઊંચાઈ 14 સેમી અને વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ 88 સેમી^{2} છે, તો નળાકારના પાયાનો વ્યાસ શોધો.

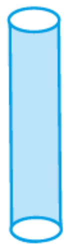
2. ધાતુના પતરામાંથી 1 મીટર ઊંચાઈ અને 140 સેમી પાયાના વ્યાસવાળી બંધ નળાકાર ટાંકી બનાવવી છે. તે બનાવવા માટે કેટલા ચોરસ મીટર પતરાની જરૂર પડશે?

3. ધાતુની એક પાઇપ 77 સેમી લાંબી છે. તેના *આડ છેદ* (*cross section*)નો અંદરનો વ્યાસ 4 સેમી અને બહારનો વ્યાસ 4.4 સેમી છે. (જુઓ આકૃતિ 13.11.) તો,

   (i) તેની અંદરની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

   (ii) તેની બહારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

   (iii) તેનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો



આકૃતિ 13.11

4. 120 સેમી લંબાઈવાળા રોલરનો વ્યાસ 84 સેમી છે. જો રમતના મેદાનને સમતલ બનાવવા માટે રોલરને 500 આંટા મારવા પડે, તો રમતના મેદાનનું ક્ષેત્રફળ કેટલા ચોરસ મીટર હશે?

5. એક નળાકાર આકારના થાંભલાની ઊંચાઈ 3.5 મીટર અને વ્યાસ 50 સેમી છે. થાંભલાની વક્રસપાટીને રંગવાનો ખર્ચ પ્રતિ મી^{2} ના ₹ 12.50 હોય, તો રંગકામ માટે કુલ ખર્ચ શોધો.

6. એક નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ 4.4 મી^{2} છે. જો તેના પાયાની ત્રિજ્યા 0.7 મી હોય, તો તેની ઊંચાઈ શોધો.

7. એક કૂવાની અંદરની સપાટીનો વ્યાસ 3.5 મી છે. તે 10 મી ઊંડો છે, તો

   (i) અંદરની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

   (ii) એક મી^{2} ના ₹ 40 લેખે અંદરની વક્રસપાટીને પ્લાસ્ટર કરવાનો ખર્ચ કેટલો આવે?

8. પાણીને ગરમ કરવાના સાધનમાં એક 28 મી લાંબો અને 5 સેમી વ્યાસવાળો નળાકાર પાઇપ છે. સાધનની ગરમ થતી સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ શોધો.

9. (i) 4.5 મી ઊંચી અને 4.2 મી વ્યાસ ધરાવતી બંધ નળાકારીય પેટ્રોલની ટાંકીની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

(ii) ટાંકી બનાવતી વખતે $\frac{1}{12}$ ભાગનું સ્ટીલ નકામું ગયું હોય, તો ખરેખર કેટલું સ્ટીલ ઉપયોગમાં લેવાયું હશે?

10. આકૃતિ 13.12 માં લૅમ્પશેડની ફ્રેમ જુઓ. તેને સુશોભિત કપડાંથી ઢાંકેલ છે. ફ્રેમના પાયાનો વ્યાસ 20 સેમી અને ઊંચાઈ 30 સેમી છે. મથાળા અને તળિયા માટે 2.5 સેમીની જગા તેને વાળવા માટે રાખેલી છે. લૅમ્પશેડને ઢાંકવા માટે કેટલું કાપડ જોઈશે તે શોધો.

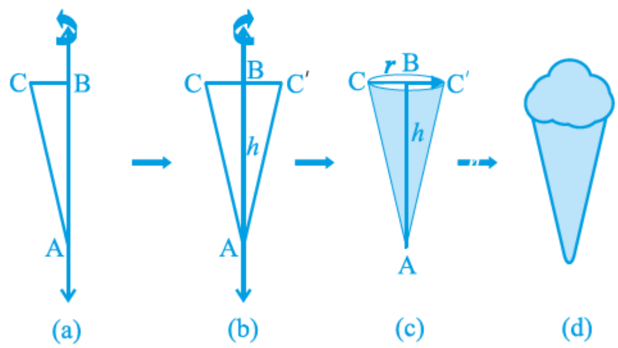
આકૃતિ 13.12

11. વિદ્યાલયના વિદ્યાર્થીઓ કાર્ડબૉર્ડમાંથી કે જેનો પાયો નળાકાર છે તેવું પેન-હૉલ્ડર બનાવવાની અને સજાવવાની હરીફાઈમાં ભાગ લે છે. દરેક પેન-હૉલ્ડરની ત્રિજ્યા 3 સેમી અને ઊંચાઈ 10.5 સેમી રાખવાની છે. વિદ્યાલયે હરીફાઈ માટે કાર્ડબૉર્ડ આપવાના છે. જો 35 હરીફો હોય, તો આ હરીફાઈ માટે કેટલું કાર્ડબૉર્ડ જોઈશે?

13.4 લંબવૃત્તીય શંકુનું પૃષ્ઠફળ

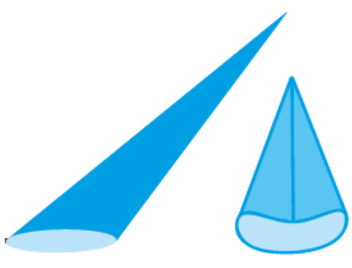
આપણે અત્યાર સુધી એકરૂપ આકૃતિઓની થપ્પી બનાવીને નક્કર પદાર્થ બનાવ્યા. આવી આકૃતિઓને *પ્રિઝમ (ત્રિપાર્શ્વ) (prism)* કહેવાય છે. હવે પ્રિઝમ ના હોય તેવા બીજા પ્રકારના નક્કર પદાર્થનો વિચાર કરીએ. (આ પ્રકારના નક્કર પદાર્થોને *પિરામિડ* કહેવાય.) ચાલો આપણે જોઈએ કે તે કેવી રીતે બનાવવા.

પ્રવૃત્તિ : B પાસે કાટખૂણો હોય તેવો ત્રિકોણ ABC કાપો. ત્રિકોણની કોઈ એક લંબ બાજુ (ધારો કે) AB પર લાંબી ઘટ્ટ દોરી ચોંટાડો. [જુઓ આકૃતિ 13.13(a).] દોરીને ત્રિકોણની બાજુ પર બંને બાજુથી પકડી અને ત્રિકોણને દોરીની આસપાસ ઘણી વખત ઘુમાવો. શું બને છે? તમે ત્રિકોણને દોરીની આસપાસ ફેરવતાં બનતાં આકારને ઓળખી શકશો?[આકૃતિ 13.13(b).] તે તમને તમે જેમાં આઇસક્રીમ ખાધો હોય તેવા આકારની યાદ અપાવે છે? [જુઓ આકૃતિ 13.13 (c) અને (d).]



આકૃતિ 13.13

આને ***લંબવૃત્તીય શંકુ*** (*Right circular cone*) કહેવાય. આકૃતિ 13.13(c) એ A શિરોબિંદુવાળો લંબવૃત્તીય શંકુ છે. AB ને ઊંચાઈ, BC ને ત્રિજ્યા અને AC ને શંકુની ત્રાંસી ઊંચાઈ (તિર્યક ઊંચાઈ) કહેવાય. અહીં આપણે B ને શંકુના વર્તુળાકાર પાયાનું કેન્દ્ર કહીશું. આપણે શંકુની ઊંચાઈ, ત્રિજ્યા અને ત્રાંસી ઊંચાઈને અનુક્રમે h, r અને l વડે દર્શાવીશું. ફરી એક વખત કયા શંકુને લંબવૃત્તીય શંકુ ન કહેવાય તે જોઈએ. હવે મુદ્દા પર આવ્યા. (જુઓ આકૃતિ 13.14.)

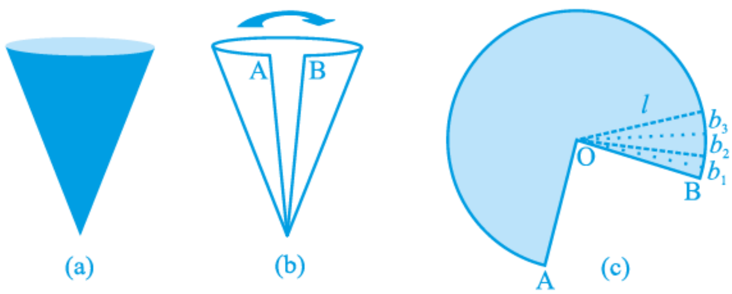


આકૃતિ 13.14

આ આકૃતિઓ લંબવૃત્તીય શંકુ નથી, કારણ કે (a)માં શિરોબિંદુને પાયાના કેન્દ્ર સાથે જોડતી રેખા, પાયા સાથે કાટખૂણો બનાવતી નથી અને (b)માં પાયો વર્તુળાકાર નથી. આપણે નળાકારની જેમ માત્ર લંબવૃત્તીય શંકુનો જ અભ્યાસ કરવાના હોવાથી 'શંકુ'નો અર્થ 'લંબવૃત્તીય શંકુ' ગણીશું.

પ્રવૃત્તિ : (i) કાગળમાંથી વ્યવસ્થિત રીતે જેમાં સીધી બાજુ પર ઉપરાઉપરી કાગળ લગાવેલ ન હોય તેવો શંકુ ધારથી કાપો અને તેને શંકુની વક્રસપાટીનો કાગળ પર બનતો આકાર જોઈ શકાય તેવી રીતે ખોલી કાઢો. (તમે જ્યાંથી શંકુને કાપો છો તે શંકુની ત્રાંસી ઊંચાઈ છે. તેને l વડે દર્શાવાય છે.) તે વર્તુળાકાર કેકના ભાગ જેવો દેખાય છે.

(ii) A અને B ચિહ્નવાળા અણીવાળા ભાગને જો તમે એકબીજા પાસે લાવો તો, આકૃતિ 13.15 (c)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેનો વર્તુળાકાર પાયો ધરાવતા શંકુનો વક્રભાગ તમે જોઈ શકશો.



આકૃતિ 13.15

(iii) જો આકૃતિ 13.15 (c)માં દર્શાવેલ કાગળને બિંદુ O માંથી પસાર થતી રેખાઓ દ્વારા બનતાં સેંકડો નાના ટુકડામાં કાપવામાં આવે તો દરેક કપાતો ટુકડો, એ લગભગ નાનો ત્રિકોણ હશે અને તેની ઊંચાઈ શંકુની ત્રાંસી(*slant*) ઊંચાઈ l જેટલી હશે.

(iv) હવે, દરેક ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ = $\frac{1}{2}$ × દરેક ત્રિકોણના પાયાની લંબાઈ × l

આથી, પૂરા કાગળનું ક્ષેત્રફળ = બધા જ ત્રિકોણનાં ક્ષેત્રફળનો સરવાળો

$$= \frac{1}{2}b_1l + \frac{1}{2}b_2l + \frac{1}{2}b_3l + \cdots$$

$$= \frac{1}{2}l\left(b_1 + b_2 + b_3 + \cdots\right)$$

$= \frac{1}{2} \times l \times$ આકૃતિ 13.15(c) ની વક્રસપાટીની પૂર્ણ લંબાઈ

(કેમ કે $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$ આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે વક્રસપાટીનો ભાગ બનાવે છે.)

પરંતુ, આકૃતિનો વક્રભાગ શંકુના પાયાની પરિમિતિ બનાવે છે અને તે શંકુના પાયાના પરિઘ = $2\pi r$ જેટલો છે. અહીં r શંકુના પાયાની ત્રિજ્યા છે.

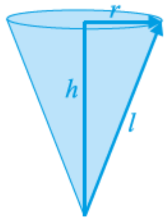
આથી, $\boxed{\text{શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ} = \frac{1}{2} \times l \times 2\pi r = \pi r l}$

અહીં, પાયાની ત્રિજ્યા r અને ત્રાંસી ઊંચાઈ l છે.

નોંધો કે, પાયથાગોરસનું પ્રમેય લગાડતાં $l^2 = r^2 + h^2$ (આકૃતિ 13.16 માં જોઈ શકાય.)

અહીં, h શંકુની ઊંચાઈ છે.

આથી, $l = \sqrt{r^2 + h^2}$



આકૃતિ 13.16

હવે, જો શંકુનો પાયો બંધ હોય, તો r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળાકાર કાગળની પણ જરૂર પડે, તેનું ક્ષેત્રફળ πr^2 થાય.

આથી, $$\boxed{\text{શંકુનું કુલ પૃષ્ઠફળ} = \pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r)}$$

ઉદાહરણ 4 : જેની ત્રાંસી ઊંચાઈ 10 સેમી અને પાયાની ત્રિજ્યા 7 સેમી હોય તેવા લંબવૃત્તીય શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = πrl

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 10 \text{ સેમી}^2 = 220 \text{ સેમી}^2$$

ઉદાહરણ 5 : શંકુની ઊંચાઈ 16 સેમી અને પાયાની ત્રિજ્યા 12 સેમી છે. તેની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ અને કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)

ઉકેલ : અહીં, $h = 16$ સેમી અને $r = 12$ સેમી

આથી, $l^2 = h^2 + r^2$, પરથી

$$l = \sqrt{16^2 + 12^2} \text{ સેમી} = 20 \text{ સેમી}$$

આથી, વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = πrl

$$= 3.14 \times 12 \times 20 \text{ સેમી}^2$$

$$= 753.6 \text{ સેમી}^2$$

વળી, કુલ પૃષ્ઠફળ = $\pi rl + \pi r^2$

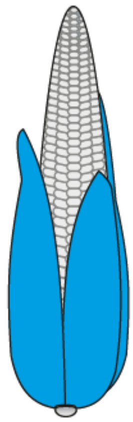
$$= (753.6 + 3.14 \times 12 \times 12) \text{ સેમી}^2$$

$$= (753.6 + 452.16) \text{ સેમી}^2$$

$$= 1205.76 \text{ સેમી}^2$$

ઉદાહરણ 6 : મકાઈના ડોડાનો આકાર લગભગ શંકુ જેવો હોય છે. (જુઓ આકૃતિ 13.17.) તેના સૌથી પહોળા ભાગની ત્રિજ્યા 2.1 સેમી અને લંબાઈ (ઊંચાઈ) 20 સેમી છે. જો ડોડાની પ્રત્યેક 1 સેમી^{2} સપાટી પર આશરે 4 મકાઈના દાણા હોય, તો આખા ડોડા પર કુલ કેટલા દાણા હશે, તે શોધો.

ઉકેલ : મકાઈના દાણા માત્ર ડોડાની વક્રસપાટી પર જ હોવાથી, કુલ મકાઈના દાણા શોધવા આપણે તેની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધીશું. આ પ્રશ્નમાં, આપણને મકાઈના ડોડાની ઊંચાઈ આપેલ હોવાથી તેની ત્રાંસી ઊંચાઈ શોધીશું.


આકૃતિ 13.17

અહીં, $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(2.1)^2 + 20^2}$ સેમી $= \sqrt{404.41}$ સેમી $= 20.11$ સેમી

આથી, મકાઈના ડોડાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$= \pi rl = \frac{22}{7} \times 2.1 \times 20.11$ સેમી^{2} $= 132.726$ સેમી^{2} $= 132.73$ સેમી^{2} (લગભગ)

1 સેમી^{2} ડોડાની વક્રસપાટી પર દાણાની સંખ્યા = 4

આથી, આખા ડોડા પર દાણાની સંખ્યા $= 132.73 \times 4 = 530.92 = 531$ (લગભગ)

આથી, મકાઈના ડોડા પર આશરે 531 મકાઈના દાણા હશે.

સ્વાધ્યાય 13.3

જ્યાં અન્ય ઉલ્લેખ ન કરેલ હોય ત્યાં $\pi = \frac{22}{7}$ લો.

1. શંકુના પાયાનો વ્યાસ 10.5 સેમી અને તેની ત્રાંસી ઊંચાઈ 10 સેમી છે. તેની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

2. જેની ત્રાંસી ઊંચાઈ 21 મી અને પાયાનો વ્યાસ 24 મી હોય તેવા શંકુનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો.

3. શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ 308 સેમી^{2} અને તેની ત્રાંસી ઊંચાઈ 14 સેમી છે. આ શંકુની (i) પાયાની ત્રિજ્યા અને (ii) કુલ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

4. શંકુ આકારનો તંબુ 10 મી ઊંચો છે અને તેના પાયાની ત્રિજ્યા 24 મી છે. તો,

(i) તંબુની ત્રાંસી ઊંચાઈ શોધો.

(ii) 1 મી^{2} ના ₹ 70 લેખે તંબુ બનાવવા માટે વપરાતા કાપડનો કુલ ખર્ચ શોધો.

5. જેની ઊંચાઈ 8મી અને પાયાની ત્રિજ્યા 6 મી હોય તેવા શંકુ આકારના તંબુ બનાવવા માટે 3 મી પહોળી કેટલી તાડપત્રીની જરૂર પડે? માની લો કે સિલાઈના માપ અને કાપકૂપમાં થતા બગાડમાં લગભગ 20 સેમી જેટલી વધારાની તાડપત્રી વપરાય છે. ($\pi = 3.14$ લો.)

6. શંકુ આકારના મકબરાની ત્રાંસી ઊંચાઈ અને પાયાનો વ્યાસ અનુક્રમે 25 મી અને 14 મી છે. તેની વક્રસપાટી પર 100 મી^{2} ના ₹ 210 લેખે ચૂનો કરવાનો ખર્ચ શોધો.

7. એક જોકર (વિદૂષક)ની ટોપી લંબવૃત્તીય શંકુ આકારની છે, તેના પાયાની ત્રિજ્યા 7 સેમી અને ઊંચાઈ 24 સેમી છે. આવી 10 ટોપી બનાવવા વપરાતા કાગળનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

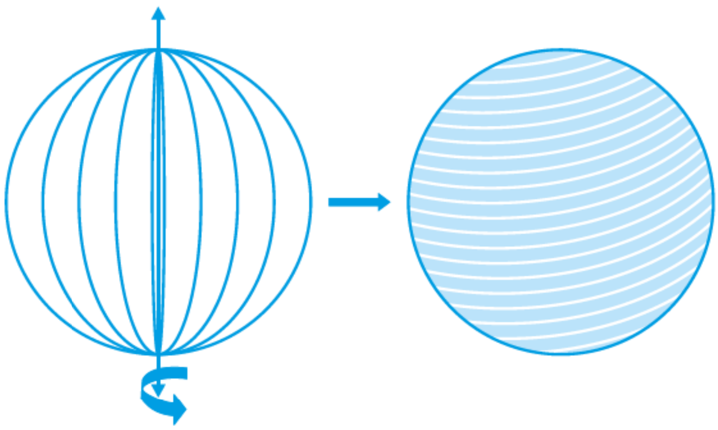
8. એક બસ સ્ટૉપને રોડના બાકીના ભાગથી જુદો પાડવા ફરી ઉપયોગમાં લઈ શકાય તેવા કાર્ડબૉર્ડથી 50 પોલા શંકુ બનાવ્યા છે. પ્રત્યેક શંકુનો પાયાનો વ્યાસ 40 સેમી અને ઊંચાઈ 1 મી છે. જો પ્રત્યેક શંકુના બહારના ભાગને રંગવાનો ખર્ચ 1 મી^{2} ના ₹ 12 લેખે આવે તો બધા જ શંકુ રંગવાનો કુલ ખર્ચ શોધો.

($\pi = 3.14$ અને $\sqrt{1.04} = 1.02$ લો.)

13.5 ગોલકનું પૃષ્ઠફળ

ગોલક *(sphere)* શું છે? શું તે વર્તુળ જેવું જ છે? શું તમે વર્તુળને કાગળ પર દોરી શકો છો? હા, તમે કરી શકો. જેના પરનું પ્રત્યેક બિંદુ નિશ્ચિત બિંદુથી (કે જેને વર્તુળનું કેન્દ્ર કહેવાય.) સમાન અંતરે (કે જેને ત્રિજ્યા કહેવાય.) આવેલ એવી સમતલ પરની બંધ આકૃતિ વર્તુળ કહેવાય છે. હવે વર્તુળાકાર તક્તીના વ્યાસ આસપાસ દોરી વીંટાળી અને જે રીતે આગળના વિભાગમાં ત્રિકોણને ઘુમાવેલ, તેમ ઘુમાવવામાં આવે તો એક નવો નક્કર પદાર્થ બને તે તમે જોઈ શકશો. (આકૃતિ 13.18) તે શું દર્શાવે છે? એક દડો? હા, તેને ગોલક કહેવાય.

જ્યારે વર્તુળને ગોળ ઘુમાવીએ ત્યારે બનતા વર્તુળના કેન્દ્રનું શું થાય તેની તમે કલ્પના કરી શકો? અલબત, તે ગોલકનું કેન્દ્ર બને. આમ, અવકાશમાં નિશ્ચિત બિંદુથી નિશ્ચિત અંતરે આવેલ બિંદુઓથી બનતી ત્રિપરિમાણીય ઘન આકૃતિને *ગોલક* કહે છે. નિશ્ચિત બિંદુને ગોલકનું કેન્દ્ર અને નિશ્ચિત અંતરને તેની *ત્રિજ્યા* કહે છે.



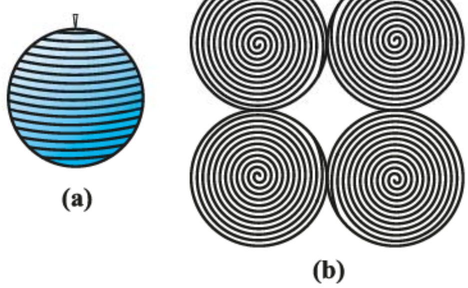
આકૃતિ 13.18

નોંધ : ગોલક એ દડાની વક્રસપાટી જેવું છે. જેની વક્રસપાટી ગોલક હોય એવા ઘન પદાર્થ માટે ઘન ગોલક શબ્દનો ઉપયોગ થાય.

પ્રવૃત્તિ : શું તમે ભમરડાથી રમ્યા છો કે કોઈને તેનાથી રમતા જોયા છે? તમે જાણતા જ હશો કે તેની આસપાસ દોરી કેમ વીંટાળાય છે. હવે, એક રબરનો દડો લઈ તેમાં ખીલી ખોસીએ. ખીલીનો આધાર લઈ દડાની આસપાસ દોરી વીંટાળીએ. જ્યારે 'સંપૂર્ણ' દડો ભરાઈ જાય ત્યારે દોરીને તેની જગાએ રાખવા માટે ટાંકણીનો ઉપયોગ કરીએ. જ્યાં સુધી આખો જ દડો દોરીથી ઢંકાઈ ત્યાં સુધી દોરી બાંધવાનું ચાલુ રાખો. [જુઓ આકૃતિ 13.19(a).] દોરીના શરૂઆત અને અંત્યબિંદુ પર નિશાની કરી, દડાની વક્રસપાટી પરની દોરીને હળવેથી કાઢી નાખો.

હવે, તમારા શિક્ષકને આસાનીથી તે ત્રિજ્યા શોધી શકાય તે માટે દડાના વ્યાસના માપન માટે મદદ કરવા કહો. એક કાગળ પર દડાની ત્રિજ્યા જેટલી ત્રિજ્યાવાળાં ચાર વર્તુળ દોરો. હવે દડાને વીંટાળેલ દોરીથી એક પછી એક વર્તુળ ભરવાનું શરૂ કરો.

[જુઓ આકૃતિ 13.19(b).]



આકૃતિ 13.19

આ બધું કરતાં તમને શું મળ્યું ?

ગોલકની વક્રસપાટી ઢાંકવા વપરાયેલ દોરી ગોલક જેટલી જ ત્રિજ્યાવાળાં ચાર વર્તુળોનો પ્રદેશ ઢાંકવા માટે વપરાય છે. આથી આનો અર્થ શું કરીશું? આ દર્શાવે છે કે r ત્રિજ્યાવાળા ગોલકનું પૃષ્ઠફળ

= ચાર વખત r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ = $4 \times (\pi r^2)$

આમ, $\boxed{\text{ગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ} = 4\pi r^2}$

r ગોલકની ત્રિજ્યા છે.

તમે ગોલકનાં કેટલાં પૃષ્ઠ જોઈ શકો છો ? માત્ર એક જ, તે વક્રાકાર છે.

હવે, એક નક્કર ગોલક લઈ તેને બરાબર વચ્ચેથી કાપીએ. ગોલકનું શું થાય છે?

આકૃતિ 13.20

હા, તે બે સમાન ભાગમાં વહેંચાય છે. (જુઓ આકૃતિ 13.20.) પ્રત્યેક અડધા ભાગને શું કહેવાય? તેને ***અર્ધગોલક*** (*hemisphere*) કહેવાય. (કેમ કે *hemi* શબ્દનો અર્થ અર્ધ થાય છે.)

અને તેની વક્રસપાટીનું શું ? તેને કેટલાં પૃષ્ઠ હશે? બે! એક વક્ર અને બીજો સપાટ (પાયો).

અર્ધગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ ગોલકના ક્ષેત્રફળ કરતાં અડધું થશે તે $4\pi r^2$ના $\frac{1}{2}$ ભાગનું હશે.

આથી, $\boxed{\text{અર્ધગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ} = 2\pi r^2}$

અહીં, અર્ધગોલક જેનો એક ભાગ હોય તેવા ગોલકની ત્રિજ્યા r છે.

આથી, અર્ધગોલકનાં બંને પૃષ્ઠો લેતાં, તેનું કુલ પૃષ્ઠફળ $2\pi r^2 + \pi r^2$ થાય.

આમ, $\boxed{\text{અર્ધગોલકની કુલ સપાટીનું પૃષ્ઠફળ} = 3\pi r^2}$

ઉદાહરણ 7 : 7 સેમી ત્રિજ્યાવાળાં ગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : 7 સેમી ત્રિજ્યાવાળાં ગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$ સેમી^{2} = 616 સેમી^{2}

ઉદાહરણ 8 : 21 સેમી ત્રિજ્યાવાળાં અર્ધગોલકની (i) વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ (ii) કુલ સપાટીનું પૃષ્ઠફળ શોધો.

ઉકેલ : 21 સેમી ત્રિજ્યાવાળાં અર્ધગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 2\pi r^2 = 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$ સેમી^{2} = 2772 સેમી^{2}

(ii) અર્ધગોલકનું કુલ પૃષ્ઠફળ $3\pi r^2 = 3 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$ સેમી^{2} = 4158 સેમી^{2}

ઉદાહરણ 9 : સરકસમાં કામ કરતો મોટરસાઇકલ-સવાર 7 મી વ્યાસવાળા પોલા ગોલકમાં પ્રદર્શન કરે છે. મોટરસાઇકલ-સવારને ચલાવવા મળતી જગ્યાનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : ગોલકનો વ્યાસ = 7 મી. આથી, તેની ત્રિજ્યા 3.5 મી થાય. આથી, મોટરસાઇકલ-સવારને ચલાવવા મળતી જગ્યા

= ગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$= 4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5$ મી^{2}

= 154 મી^{2}

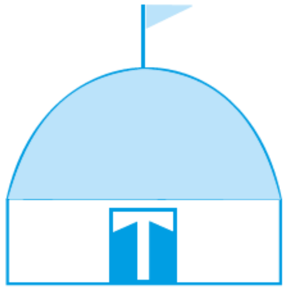
ઉદાહરણ 10 : એક મકાનના અર્ધગોળાકાર ઘુમ્મટને રંગ કરવાનો છે. (જુઓ આકૃતિ 13.21.) જો અર્ધગોળાકાર ઘુમ્મટનો પરિઘ 17.6 મી હોય, તો તેને 100સેમી^{2} ના ₹ 5 લેખે રંગવાનો ખર્ચ શોધો.

ઉકેલ : અહી, આપણે માત્ર ઘુમ્મટની વક્રસપાટી પર રંગ કરવો છે. તેથી આપણે અર્ધગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધીશું.

હવે, ઘુમ્મટનો પરિઘ = 17.6 મી

તેથી, $17.6 = 2\pi r$

તેથી, ઘુમ્મટની ત્રિજ્યા = $17.6 \times \frac{7}{2 \times 22}$ મી = 2.8 મી



આકૃતિ 13.21

ઘુમ્મટની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = $2\pi r^2$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8$ મી^{2}

$= 49.28$ મી^{2}

હવે, 100 સેમી^{2} રંગવાનો ખર્ચ ₹ 5.

તો, 1 મી^{2} રંગવાનો ખર્ચ ₹ 500.

આખા અર્ધગોળાકાર ઘુમ્મટને રંગવાનો ખર્ચ = ₹ 500×49.28

= ₹ 24,640

સ્વાધ્યાય 13.4

જ્યાં ઉલ્લેખ ન કર્યો હોય, ત્યાં $\pi = \frac{22}{7}$ લો.

1. આપેલ ત્રિજ્યા પરથી ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો :

   (i) 10.5 સેમી (ii) 5.6 સેમી (iii) 14 સેમી

2. આપેલ વ્યાસ પરથી ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો :

   (i) 14 સેમી (ii) 21 સેમી (iii) 3.5 મી

3. 10 સેમી ત્રિજ્યાવાળા અર્ધગોળાનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)

4. એક ગોળાકાર ફુગ્ગામાં હવા ભરવાથી તેની ત્રિજ્યા 7 સેમીથી વધીને 14 સેમી થાય છે. આ બંને પરિસ્થિતિમાં ગોળાકાર ફુગ્ગાની વક્રસપાટીનાં ક્ષેત્રફળનો ગુણોત્તર શોધો.

5. તાંબાના અર્ધગોળાકાર વાટકાની અંદરનો વ્યાસ 10.5 સેમી છે. તેની અંદર સપાટીને 100સેમી^{2} ના ₹ 16 લેખે કલાઈ કરવાનો ખર્ચ કેટલો થાય?

6. જો ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ 154 સેમી^{2} હોય, તો તેની ત્રિજ્યા શોધો.

7. જો ચંદ્રનો વ્યાસ પૃથ્વીના વ્યાસના આશરે ચોથા ભાગ જેટલો હોય, તો તેમની વક્રસપાટીઓનાં ક્ષેત્રફળનો ગુણોત્તર શોધો.

8. સ્ટીલના અર્ધગોળાકાર વાટકાની જાડાઈ 0.25 સેમી છે. જો વાટકાની અંદરની સપાટીની ત્રિજ્યા 5 સેમી હોય, તો વાટકાની બહારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

9. એક લંબવૃત્તીય નળાકારમાં બંધબેસે તે રીતે r ત્રિજ્યાવાળો એક ગોળો મૂકેલ છે.

(જુઓ આકૃતિ 13.22.) તો,

(i) ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

(ii) નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

(iii) (i) અને (ii) માં મળતાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર શોધો.

આકૃતિ 13.22

13.6 લંબઘનનું ઘનફળ

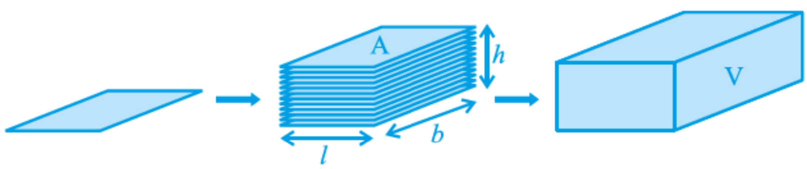
આપણે અગાઉનાં ધોરણોમાં અમુક ઘન પદાર્થોનું ઘનફળ શોધતાં શીખી ગયાં છીએ. આપણે જાણીએ છીએ કે, ઘન પદાર્થ અવકાશમાં જગ્યા રોકે છે. આ રોકેલી જગ્યાના માપને તે ઘન પદાર્થનું ***ઘનફળ*** કહેવાય.

નોંધ : જો ઘન પદાર્થ નક્કર હોય તો તે ઘન પદાર્થ દ્વારા અવકાશમાં રોકાયેલ જગ્યા માપી શકાય છે અને તે રોકેલી જગ્યાના માપને તેનું ઘનફળ કહેવાય.

હવે, જો ઘન પદાર્થ પોલો હોય તો તે અંદરથી ખાલી હોય છે અને તે ખાલી જગ્યા વાયુ કે પ્રવાહીથી ભરવામાં આવે, તો તે વાસણ જેવો આકાર ધારણ કરે છે. વાસણમાં ભરવામાં આવેલ પદાર્થના ઘનફળને *વાસણની ક્ષમતા (capacity of the container)* કહે છે. *ટૂંકમાં પદાર્થે રોકેલી જગ્યાના માપને તે પદાર્થનું ઘનફળ કહેવાય અને પદાર્થની ક્ષમતા તે પદાર્થની અંદરની જગ્યામાં સમાવી શકાતા પદાર્થનું ઘનફળ.*

હવે, જો આપણે લંબઘનના ઘનફળની વાત કરીએ તો, આપણે લંબઘન દ્વારા અવકાશમાં રોકાયેલી જગ્યાના માપની વાત કરીએ છીએ.

વધુમાં આપણે ક્ષેત્રફળ અને ઘનફળ કોઈક વિસ્તારનું માપ દર્શાવવા માટે જોઈએ છે. પરંતુ વાસ્તવમાં આપણે વર્તુળાકારનું ક્ષેત્રફળ, લંબઘનાકારનું ઘનફળ અથવા ગોળાકારનું ઘનફળ વગેરે શોધીએ છીએ, પરંતુ સરળતા ખાતર આપણે વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ, લંબઘનનું ઘનફળ અથવા ગોળાનું ઘનફળ તેવો ઉલ્લેખ કરીએ છીએ. જોકે ઉલ્લેખ કરેલ આકાર માત્ર તેની સીમા દર્શાવે છે.



આકૃતિ 13.23

આકૃતિ 13.23 જુઓ. ધારો કે આકૃતિમાં દર્શાવેલ લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ A છે. આવી લંબચોરસ તક્તીઓને વ્યવસ્થિત થપ્પીમાં ગોઠવો. તેની ઊંચાઈ h અને લંબઘનના ઘનફળને V લઈએ. શું તમે કહી શકશો કે V, A અને H વચ્ચે કેવો સંબંધ છે?

પ્રત્યેક સમતલીય લંબચોરસ સપાટી દ્વારા રોકાયેલ જગ્યાનું ક્ષેત્રફળ × ઊંચાઈ = લંબઘન દ્વારા અવકાશમાં રોકાયેલ જગ્યાનું માપ.

તેથી, આપણે $A \times h = V$ મળે.

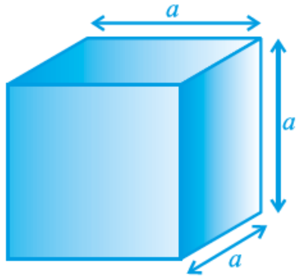
લંબઘનનું ઘનફળ = પાયાનું ક્ષેત્રફળ × ઊંચાઈ = લંબાઈ × પહોળાઈ × ઊંચાઈ

અથવા $l \times b \times h$, જ્યાં l, b અને h અનુક્રમે લંબઘનની લંબાઈ, પહોળાઈ, ઊંચાઈ છે.

નોંધ : જ્યારે આપણે અવકાશમાં આવેલ પ્રદેશનું માપ કાઢીએ, એટલે કે ઘન પદાર્થે રોકેલી જગા ત્યારે તે વિસ્તારમાં એક એકમ લંબાઈ ધરાવતા સમઘનની મહત્તમ કેટલી સંખ્યા સમાવિષ્ટ કરી શકાય તે ગણીએ છીએ. તેથી ઘનફળના માપન માટેનો એકમ ઘન એકમ છે.

ફરીથી, જો સમઘનની બાજુની લંબાઈ a હોય તો (જુઓ આકૃતિ 13.24.)

સમઘનનું ઘનફળ = ધારની લંબાઈ × ધારની લંબાઈ × ધારની લંબાઈ = $a \times a \times a = a^3$



આકૃતિ 13.24

જો સમઘનની બાજુની લંબાઈ 12 સેમી હોય,

તો સમઘનનું ઘનફળ = 12 × 12 × 12 સેમી = 1728 (સેમી)^3

તમે યાદ કરો કે તમે આ સૂત્ર અગાઉના ધોરણમાં શીખી ગયાં છો. ચલો હવે આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો દ્વારા આ સૂત્રનો ઉપયોગ સમજીએ.

ઉદાહરણ 11 : એક ખુલ્લા મેદાનની એક બાજુથી બીજી બાજુ સુધી 10 મી લંબાઈની એક દીવાલ બનાવવી છે. આ દીવાલની ઊંચાઈ 4 મી અને દીવાલની જાડાઈ 24 સેમી છે. હવે, જો આ દીવાલ બનાવવા 24 સેમી × 12 સેમી × 8 સેમી માપની ઈંટો વાપરવાની હોય, તો આવી કેટલી ઈંટોની જરૂર પડશે?

ઉકેલ : અહીં, આપણે દીવાલ દ્વારા અવકાશમાં રોકેલી જગ્યાના માપને ઈંટો દ્વારા ભરવું છે. તેથી આપણે દીવાલનું ઘનફળ શોધવું પડશે. દીવાલનું ઘનફળ એ બીજું કશું નહિ પણ લંબઘનનું ઘનફળ થશે.

લંબાઈ = 10 મી = 1000 સેમી

જાડાઈ = 24 સેમી

ઊંચાઈ = 4 મી = 400 સેમી

તેથી, દીવાલનું ઘનફળ = લંબાઈ × જાડાઈ × ઊંચાઈ

= 1000 × 24 × 400 સેમી^{3}

હવે, પ્રત્યેક ઈંટ એ લંબઘન છે. તેની લંબાઈ = 24 સેમી, પહોળાઈ = 12 સેમી અને ઊંચાઈ = 8 સેમી

તેથી, એક ઈંટનું ઘનફળ = લંબાઈ × પહોળાઈ × ઊંચાઈ = 24 × 12 × 8 સેમી^{3}

તેથી, જરૂરી ઈંટોની સંખ્યા = $\dfrac{\text{દીવાલનું ઘનફળ}}{\text{એક ઈંટનું ઘનફળ}}$

$$= \frac{1000 \times 24 \times 400}{24 \times 12 \times 8}$$

$$= 4166.6$$

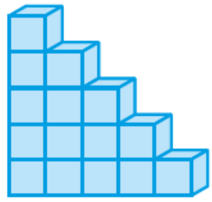
આમ, દીવાલ બનાવવા માટે 4167 ઈંટોની જરૂર પડશે.

ઉદાહરણ 12 : એક બાળક ઘન આકારના બ્લૉકથી રમે છે. તે આકૃતિ 13.25 માં દર્શાવ્યા મુજબનું માળખું ઘન આકારના બ્લૉકથી બનાવે છે. જો દરેક બ્લૉકની બાજુની લંબાઈ 3 સેમી હોય, તો બાળકે બનાવેલ માળખાનું ઘનફળ શોધો.

ઉકેલ : દરેક ઘનનું ઘનફળ = લંબાઈ × લંબાઈ × લંબાઈ = 3 × 3 × 3 સેમી^{3} = 27 સેમી^{3}

અહીં, માળખામાં ઘનની સંખ્યા = 15

તેથી માળખાનું ઘનફળ = 27 × 15 સેમી^{3} = 405 સેમી^{3}



આકૃતિ 13.25

સ્વાધ્યાય 13.5

1. દીવાસળીની એક પેટીનું માપ 4 સેમી × 2.5 સેમી × 1.5 સેમી છે, તો આવી 12 પેટી સમાય તેવી પેટીનું ઘનફળ કેટલું થાય ?
2. એક લંબઘન પાણીની ટાંકી 6 મી લાંબી, 5 મી પહોળી અને 4.5 મી ઊંડી છે. આ ટાંકીમાં કેટલા લિટર પાણી સમાઈ શકે ? (1 મી^{3} = 1000 લીટર)
3. એક લંબઘન વાસણ 10 મી લાંબું અને 8 મી પહોળું છે. તેમાં 380 મી^{3} પ્રવાહી સમાઈ શકે, તો તેની ઊંચાઈ કેટલી?
4. 8 મી લંબાઈ, 6 મી પહોળાઈ અને 3 મી ઊંડાઇનો એક લંબઘન ખાડો ખોદવો છે. 1 મી^{3} ના ₹ 30 લેખે ખાડો ખોદવાનો ખર્ચ કેટલો થાય?
5. એક લંબઘન પાણીની ટાંકીની ક્ષમતા 50000 લિટર છે. જો તેની લંબાઈ અને ઊંડાઈ અનુક્રમે 2.5 મી અને 10મી હોય, તો તેની પહોળાઈ શોધો.
6. એક ગામમાં 4000 લોકો રહે છે. દરેક વ્યક્તિની એક દિવસની જરૂરિયાત 150 લિટર પાણીની છે. આ ગામમાં 20 મી × 15 મી × 6 મી માપની ટાંકી છે. આ ટાંકીનું પાણી ગામના લોકોને કેટલા દિવસ ચાલે ?
7. એક ગોદામનું માપ 40 મી × 25 મી × 15 મી છે. આ ગોદામમાં 1.5 મી × 1.25 મી × 0.5 મી માપનાં કેટલાં લાકડાંનાં ખોખાં સમાય?
8. 12 સેમી લંબાઈવાળા નક્કર ઘન પદાર્થને સરખા ઘનફળવાળા 8 ઘનમાં કાપવામાં આવે છે, તો નવા બનેલ ઘનની લંબાઈ કેટલી હશે? તેમના પૃષ્ઠફળનો ગુણોત્તર શોધો.
9. 3 મી ઊંડાઈવાળી અને 40 મી પહોળાઈવાળી એક નદી 2 કિમી/કલાકની ઝડપથી વહે છે તો તે 1 મિનિટમાં કેટલું પાણી સમુદ્રમાં ઠાલવશે ?

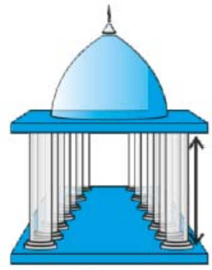
13.7 નળાકારનું ઘનફળ

જેવી રીતે સમાન લંબચોરસને ગોઠવીને લંબઘન બનાવાય, તેવી રીતે સમાન માપનાં વર્તુળોને ગોઠવીને થપ્પી કરી લંબવૃત્તીય નળાકાર બનાવી શકાય. હવે જે દલીલની મદદથી આપણે લંબઘનનું ઘનફળ મેળવ્યું તે જ દલીલ મુજબ નળાકારનું ઘનફળ = પાયાનું ક્ષેત્રફળ × ઊંચાઈ = વર્તુળાકાર પાયાનું ક્ષેત્રફળ × ઊંચાઈ = $\pi r^2 h$

આમ, **નળાકારનું ઘનફળ = $\pi r^2 h$**

આ સૂત્રમાં પાયાની ત્રિજ્યા r છે તથા નળાકારની ઊંચાઈ h છે.

ઉદાહરણ 13 : એક મંદિરના થાંભલાઓ નળાકાર છે. (જુઓ આકૃતિ 13.26) જો પ્રત્યેક થાંભલાનો પાયો 20 સેમી ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ અને ઊંચાઈ 10 મીટર હોય, તો આવા 14 થાંભલાઓમાં કોંક્રીટનું કેટલું મિશ્રણ જોઇએ?


આકૃતિ 13.26

ઉકેલ : થાંભલાઓ બનાવવા કૉંક્રીટના મિશ્રણનો ઉપયોગ કરવાનો હોવાથી, થાંભલાઓ જેટલી જગ્યા રોકે, તેટલું સિમેન્ટ કૉંક્રીટનું મિશ્રણ જોઈએ. માટે અહીં, આપણે નળાકારનું ઘનફળ શોધીશું.

નળાકાર થાંભલાની ત્રિજ્યા = 20 સેમી

નળાકાર થાંભલાની ઊંચાઈ = 10 મી = 1000 સેમી

તેથી, દરેક નળાકારનું ઘનફળ $= \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times 20 \times 20 \times 1000$ સેમી^{3}

$= \frac{8800000}{7}$ સેમી^{3}

$= \frac{8.8}{7}$ મી^{3} (કારણ કે 1000000 સેમી^{3} = 1 મી^{3})

14 થાંભલાનું ઘનફળ = દરેક નળાકારનું ઘનફળ × 14

$= \frac{8.8}{7} \times 14$ મી^{3}

$= 17.6$ મી^{3}

આમ, 14 થાંભલાઓ માટે 17.6 મી^{3} સિમેન્ટ-કૉંક્રીટનું મિશ્રણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 14 : રમજાનના મેળામાં એક દુકાનદારે ખાણીપીણીની દુકાનમાં 15 સેમી ત્રિજ્યાવાળા એક નળાકાર વાસણમાં 32 સેમી ઊંચાઈ સુધી નારંગીનો રસ ભરેલો છે. આ રસ તે 3 સેમી ત્રિજ્યાવાળા નળાકાર પ્યાલાઓમાં 8 સેમી ઊંચાઈ સુધી ભરે છે. (જુઓ આકૃતિ 13.27.) તે ₹15 પ્રતિ પ્યાલાના ભાવે તેનું વેચાણ કરે છે. જો દુકાનદાર બધો રસ વેચી દે તો તેને કેટલા રૂપિયા મળે?


આકૃતિ 13.27

ઉકેલ : રસ ભરેલા વાસણનું ઘનફળ = નળાકાર વાસણનું ઘનફળ

$= \pi R^2 H$ (R અને H એ અનુક્રમે નળાકાર વાસણની ત્રિજ્યા અને ઊંચાઈ છે.)

$= \pi \times 15 \times 15 \times 32$ સેમી^{3}

એ જ રીતે, દરેક પ્યાલામાં રહેલા રસનું ઘનફળ $= \pi r^2 h$ (r અને h એ અનુક્રમે દરેક પ્યાલાની ત્રિજયા અને ઊંચાઈ છે.)

$= \pi \times 3 \times 3 \times 8$ સેમી^{3}

આમ, વેચાતા રસના પ્યાલાની કુલ સંખ્યા $= \dfrac{\text{વાસણનું ઘનફળ}}{\text{દરેક પ્યાલાનું ઘનફળ}}$

$= \dfrac{\pi \times 15 \times 15 \times 32}{\pi \times 3 \times 3 \times 8}$

$= 100$

તેથી, દુકાનદારને મળતી કુલ રકમ = ₹ 15×100

= ₹ 1500

સ્વાધ્યાય 13.6

જ્યાં ઉલ્લેખ ન કર્યો હોય, ત્યાં $\pi = \dfrac{22}{7}$ લો.

1. નળાકાર વાસણના પાયાનો પરિઘ 132 સેમી અને ઊંચાઈ 25 સેમી છે. તેમાં કેટલાં લિટર પાણી સમાય? (1000 સેમી^{3} = 1 લિટર)
2. એક નળાકાર લાકડાના પાઇપનો અંદરનો વ્યાસ 24 સેમી અને તેનો બહારનો વ્યાસ 28 સેમી છે. પાઇપની લંબાઇ 35 સેમી છે. જો 1 સેમી^{3} લાકડાનું દળ 0.6 ગ્રામ હોય તે પાઇપનું દળ શોધો.
3. એક ઠંડું પીણું બે પ્રકારનાં પાત્રોમાં મળે છે : (i) જેની લંબાઈ 5 સેમી, પહોળાઈ 4 સેમી અને ઊંચાઈ 15 સેમી છે એવું એક લંબચોરસ પાયાવાળું પતરાનું પાત્ર. (ii) જેના વર્તુળાકાર પાયાનો વ્યાસ 7 સેમી અને ઊંચાઈ 10 સેમી એવું પ્લાસ્ટિકનું નળાકાર પાત્ર. કયા પાત્રની ક્ષમતા વધુ છે ? કેટલી ?
4. એક નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ 94.2 સેમી^{2} અને તેની ઊંચાઈ 5 સેમી હોય તો (i) તેની પાયાની ત્રિજ્યા અને (ii) તેનું ઘનફળ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)
5. 10 મીટર ઊંડા એક નળાકાર વાસણની અંદરની સપાટીને રંગવાનો ખર્ચ ₹ 2200 થાય છે. જો રંગવાનો ખર્ચ 1 મી^{2} ના ₹ 20 હોય, તો

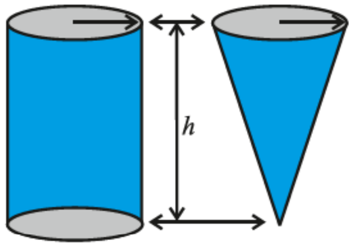
   (i) વાસણની અંદરની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

   (ii) પાયાની ત્રિજ્યા

   (iii) વાસણની ક્ષમતા શોધો.
6. 1 મી ઊંચાઈવાળા બંધ નળાકાર વાસણની ક્ષમતા 15.4 લિટર છે, તો તે બનાવવા કેટલા ચોરસ મીટર ધાતુના પતરાની જરૂર પડશે ?
7. લાકડાના નળાકારમાં નક્કર ગ્રેફાઈટનો નળાકાર ચુસ્ત રીતે બેસે તે રીતે એક પેન્સિલ બનાવી છે. પેન્સિલનો વ્યાસ 7 મીમી એને ગ્રેફાઈટનો વ્યાસ 1 મિમી છે. જો પેન્સિલની લંબાઈ 14 સેમી હોય, તો લાકડાનું અને ગ્રેફાઈટનું ઘનફળ શોધો.
8. એક હોસ્પીટલમાં દર્દીઓને 7 સેમી વ્યાસવાળા નળાકાર પાત્રમાં સુપ આપવામાં આવે છે. જો સુપ 4 સેમી ઊંચાઈ સુધી ભરવામાં આવતું હોય, તો દવાખાનામાં રોજ 250 દર્દીઓને આપવા માટે કેટલું સુપ બનાવવું પડે ?

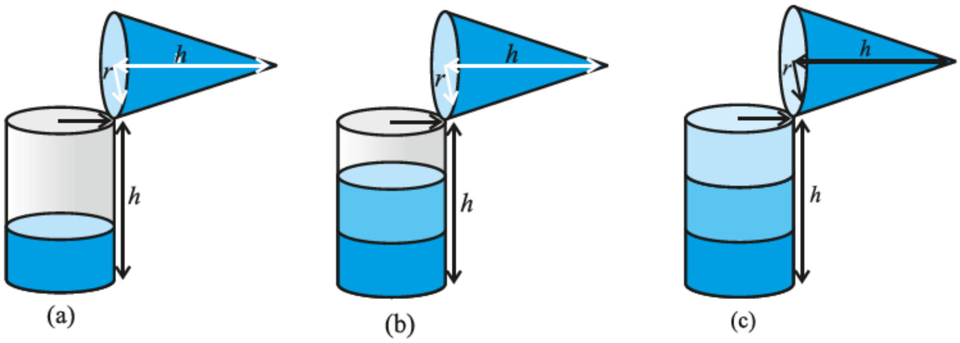
13.8 લંબવૃત્તીય શંકુનું ઘનફળ

તમે આકૃતિ 13.28 માં જોઈ શકો છો કે લંબવૃત્તીય નળાકાર અને લંબવૃત્તીય શંકુના પાયાની ત્રિજ્યા સમાન છે અને તેમની ઊંચાઈ પણ સમાન છે.



આકૃતિ 13.28

પ્રવૃત્તિ : સમાન પાયાની ત્રિજ્યા અને સમાન ઊંચાઈ ધરાવતા પોલા નળાકાર અને પોલા શંકુ બનાવવાનો પ્રયત્ન કરો. (જુઓ આકૃતિ 13.28.) આપણે આના ઉપયોગથી એક પ્રયોગ કરીશું. તેના દ્વારા આપણે લંબવૃત્તીય શંકુનું ઘનફળ શું થાય તે પ્રાયોગિક રીતે જોઈ શકીશું.



આકૃતિ 13.29

ચાલો આપણે શરૂઆત કરીએ.

આપણે પહેલા શંકુને રેતીથી છલોછલ ભરી દઈશું. ત્યાર બાદ તેને નળાકાર પાત્રમાં પૂરેપૂરો ખાલી કરીશું. આપણે જોઈશું કે તે રેતીથી નળાકાર પાત્ર થોડાક ભાગ સુધી જ ભરાશે. [જુઓ આકૃતિ 13.29(a).]

હવે, ફરી શંકુને રેતીથી છલોછલ ભરી અને નળાકારમાં ખાલી કરો. આપણે જોઈ શકીશું કે નળાકાર હજી પણ પૂરો ભરાયો નથી. [જુઓ આકૃતિ 13.29(b).]

હવે, જ્યારે શંકુને ત્રીજી વખત રેતીથી ભરી નળાકારમાં ખાલી કરતાં જોઈશું કે નળાકાર રેતીથી છલોછલ ભરાઈ જશે. [જુઓ આકૃતિ 13.29(c).]

આ પરથી આપણે તારવી શકીએ કે, પાયાની ત્રિજ્યા સમાન હોય અને ઊંચાઈ સમાન હોય તેવા નળાકાર અને શંકુ માટે, ત્રણ વખત શંકુનું ઘનફળ એ નળાકારના ઘનફળ જેટલું થાય. તેનો અર્થ એવો થાય કે, શંકુનું ઘનફળ એ નળાકારના ઘનફળના ત્રીજા ભાગ જેટલું થાય.

આમ, પાયાની ત્રિજ્યા r અને શંકુની ઊંચાઈ h વાળા

$$\boxed{\text{શંકુનું ઘનફળ} = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$$

ઉદાહરણ 15 : એક શંકુની ઊંચાઈ અને ત્રાંસી ઊંચાઈ અનુક્રમે 21 સેમી અને 28 સેમી હોય, તો તેનું ઘનફળ શોધો.

ઉકેલ : $l^2 = r^2 + h^2$ પરથી,

$$r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{28^2 - 21^2}\text{ સેમી} = 7\sqrt{7}\text{ સેમી}$$

શંકુનું ઘનફળ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7\sqrt{7} \times 7\sqrt{7} \times 21$ સેમી^{3} = 7546 સેમી^{3}

ઉદાહરણ 16 : મોનીકા પાસે 551 મી^{2} ક્ષેત્રફળવાળો કૅનવાસનો ટુકડો છે. તે ટુકડાનો ઉપયોગ 7 મી પાયાની ત્રિજ્યાવાળો શંકુ આકારનો તંબુ બનાવવા માટે કરે છે. ટાંકા લેવામાં અને કાપવામાં 1 મી^{2} જેટલું કૅનવાસ બગડે છે. તે તંબુનું ઘનફળ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, કૅનવાસ વપરાય તેનું ક્ષેત્રફળ = 551 મી^{2} અને બગાડમાં જતા કૅનવાસનું, ક્ષેત્રફળ 1 મી^{2} છે. તેથી તંબુ બનાવવા માટે મળતા કૅનવાસનું ક્ષેત્રફળ (551 – 1) મી^{2} = 550 મી^{2}.

તેથી, તંબુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = 550 મી^{2} અને જરૂરી તંબુના પાયાની ત્રિજ્યા = 7 મી

અહીં, નોંધીશું કે તંબુને ફક્ત વક્રસપાટી છે, (તંબુના પાયાના ભાગમાં કૅનવાસ નથી !)

તંબુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = 550 મી^{2}

$$\therefore \quad \pi r l = 550$$

$$\therefore \quad \frac{22}{7} \times 7 \times l = 550$$

$$\therefore \quad l = \frac{550}{22} \text{ મી} = 25 \text{ મી}$$

હવે, $l^2 = r^2 + h^2$

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} \text{ મી} = \sqrt{625 - 49} \text{ મી} = \sqrt{576} \text{ મી} = 24 \text{ મી}$$

આથી, શંકુ આકારના તંબુનું ઘનફળ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24$ મી^{3} = 1232 મી^{3}

સ્વાધ્યાય 13.7

જ્યાં ઉલ્લેખ ન કર્યો હોય, ત્યાં $\pi = \frac{22}{7}$ લો.

1. નીચેના લંબવૃત્તીય શંકુનું ઘનફળ શોધો :
   (i) ત્રિજ્યા 6 સેમી, ઊંચાઈ 7 સેમી (ii) ત્રિજ્યા 3.5 સેમી, ઊંચાઈ 12 સેમી
2. નીચેના શંકુ આકારના વાસણની ક્ષમતા લિટરમાં શોધો :
   (i) ત્રિજ્યા 7 સેમી, ત્રાંસી ઊંચાઈ 25 સેમી (ii) ઊંચાઈ 12 સેમી, ત્રાંસી ઊંચાઈ 13 સેમી
3. એક શંકુની ઊંચાઈ 15 સેમી છે. જો તેનું ઘનફળ 1570 સેમી^{3} હોય, તો તેના પાયાની ત્રિજ્યા શોધો. (π = 3.14 લો.)
4. એક લંબવૃત્તીય શંકુનું ઘનફળ 48 π સેમી^{3} છે. તેની ઊંચાઈ 9 સેમી હોય, તો તેના પાયાનો વ્યાસ શોધો.
5. એક શંકુ આકારના ખાડાના ઉપરના ભાગનો વ્યાસ 3.5 મી અને ઊંડાઈ 12 મી છે. તેની ક્ષમતા (કિલોલિટરમાં) કેટલી થાય ?

6. લંબવૃત્તીય શંકુનું ઘનફળ 9856 સેમી^{3} છે. તેના પાયાનો વ્યાસ 28 સેમી છે. તો,
   (i) શંકુની ઊંચાઈ (ii) શંકુની ત્રાંસી ઊંચાઈ અને (iii) શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

7. કાટકોણ ત્રિકોણ ABC ની બાજુનાં માપ 5 સેમી, 12 સેમી અને 13 સેમી છે. જો તેને 12 સેમી લંબાઈવાળી બાજુની આસપાસ પરિભ્રમણ કરવામાં આવે, તો તેથી બનતા શંકુનું ઘનફળ શોધો.

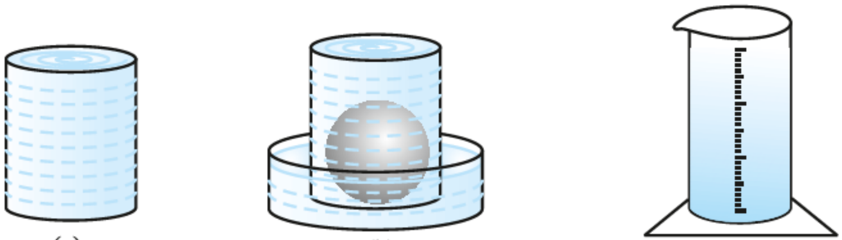
8. ઉપરનાં પ્રશ્ન 7 માં આપેલ ત્રિકોણ ABC નું 5 સેમી લંબાઈવાળી બાજુની આસપાસ પરિભ્રમણ કરવામાં આવે છે, તો આ રીતે બનતા ઘનનું ઘનફળ શોધો તથા પ્રશ્ન 7 અને 8 માં બનતા શંકુના ઘનફળનો ગુણોત્તર શોધો.

9. એક શંકુ આકારના ઘઉંના ઢગલાના પાયાનો વ્યાસ 10.5 મી અને ઊંચાઈ 3 મી છે. તેનું ઘનફળ શોધો. આ ઢગલાને વરસાદથી બચાવવા કૅનવાસથી ઢાંકવામાં આવે છે, તો આ માટે જરૂરી કૅનવાસનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

13.9 ગોળાનું ઘનફળ

હવે, આપણે ગોળાનું ઘનફળ કેવી રીતે માપવું તે જોઈએ. પહેલા બે કે ત્રણ જુદી જુદી ત્રિજ્યાવાળા ગોળા લો અને એક એવું મોટું પાત્ર લો કે જેમાં આ દરેક ગોળાઓ એકીસાથે સમાઈ જાય. હવે એક એવું મોટું જળપાત્ર લો કે જેમાં તમે ઉપરોક્ત પાત્રને મૂકી શકો. પછી, પાત્રને પૂરેપુરું પાણીથી ભરી દો. [આકૃતિ. 13.30(a).]

હવે કાળજીપૂર્વક એક ગોળાને પાણી ભરેલ પાત્રમાં મૂકો. આથી થોડું પાણી જળપાત્રમાં ઊભરાઈને આવશે. [આકૃતિ 13.30(b).] આ જળપાત્રમાં આવેલા પાણીને એક અંકિત નળાકારમાં કાળજીપૂર્વક લો અને તે પાણીનું કદ માપો, [આકૃતિ 13.30(c)]. ધારો કે પાણી ભરેલા પાત્રમાં મૂકેલ ગોળાની ત્રિજ્યા r છે. (તમે ગોળની ત્રિજ્યા તેનો વ્યાસ માપીને શોધી શકો.) ત્યાર બાદ $\frac{4}{3}\pi r^3$નું મૂલ્ય મેળવો. શું આ મૂલ્ય અંકિત નળાકારમાં રહેલા પાણીનાં કદ જેટલું છે?



(a) (b) (c)

આકૃતિ 13.30

ઉપર્યુક્ત પ્રક્રિયા બીજા કદના ગોળા માટે ફરીથી કરો. ગોળાની ત્રિજ્યા R માપો અને $\frac{4}{3}\pi R^3$ ની કિંમત શોધો. ફરી એક વખત આ કિંમત ગોળા દ્વારા વિસ્થાપિત કરેલા લગભગ પાણીના કદ (ઉભરાયેલા પાણીના કદ) જેટલી લગભગ થશે. આ શું દર્શાવે છે? આપણને ખબર છે કે ગોળાનું કદ, ગોળા દ્વારા વિસ્થાપિત પાણીના કદ જેટલું છે. આ પ્રયોગનું પુનરાવર્તન જુદી જુદી ત્રિજ્યાના ગોળા વાપરી કરતાં આ જ પરિણામ મળે છે. એટલે કે ગોળાનું કદ $\frac{4}{3}\pi$ × ત્રિજ્યાના ઘન જેટલું થાય છે. આ પરથી,

$$\text{ગોળાનું ઘનફળ} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

r ગોળાની ત્રિજ્યા છે. ભવિષ્યમાં તમે ઉપરના વર્ગોમાં આ સૂત્ર સાબિત પણ કરી શકશો. પણ આ તબક્કે આપણે તેને સ્વીકારીને ચાલીશું.

હવે અર્ધગોળો ગોળાનો અડધો ભાગ છે. તો વિચારો કે અર્ધગોળાનું ઘનફળ કેટલું થાય?

હા, તે $\frac{4}{3}\pi r^3$ નો $\frac{1}{2}$ એટલે કે $\frac{2}{3}\pi r^3$ છે.

તેથી, અર્ધગોળાનું ઘનફળ $= \mathbf{\frac{2}{3}\pi r^3}$

અહીં, r અર્ધગોળાની ત્રિજ્યા છે. હવે આપણે આ સૂત્રનો ઉપયોગ દર્શાવતાં કેટલાંક ઉદાહરણો લઈશું.

ઉદાહરણ 17 : 11.2 સેમી ત્રિજ્યાવાળા ગોળાનું ઘનફળ શોધો.

ઉકેલ : ગોળાનું ઘનફળ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 11.2 \times 11.2 \times 11.2$ સેમી^{3}

$= 5887.32$ સેમી^{3}

ઉદાહરણ 18 : ગોળાફેંકમાં વપરાતા ધાતુના ગોળાની ત્રિજ્યા 4.9 સેમી છે. જો વપરાયેલ ધાતુની ઘનતા 7.8 ગ્રામ/સેમી^{3}, હોય તો તેનું દળ શોધો.

ઉકેલ : ગોળાફેંકમાં વપરાતો ગોળો ધાતુનો નક્કર ગોળો હોવાથી, તેનું દળ એ તેના ઘનફળ અને ઘનતાનો ગુણાકાર થશે. તેથી આપણે ગોળાનું ઘનફળ શોધવું પડશે.

હવે, ગોળાનું ઘનફળ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 4.9 \times 4.9 \times 4.9$ સેમી^{3}

$= 493$ સેમી^{3} (આશરે)

વળી, 1 સેમી^{3} ધાતુની ઘનતા 7.8 ગ્રામ હોવાથી,

ગોળાનું દળ $= 7.8 \times 493$ ગ્રામ $= 3845.44$ ગ્રામ $= 3.85$ કિગ્રા (આશરે)

ઉદાહરણ 19 : એક અર્ધગોળાકાર વાસણની ત્રિજ્યા 3.5 સેમી છે, તો તેમાં સમાઈ શકતા પાણીનું ઘનફળ શોધો.

ઉકેલ : અર્ધગોળાકાર વાસણમાં સમાઈ શકતા પાણીનું ઘનફળ $= \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 3.5$ સેમી^{3} $= 89.8$ સેમી^{3}

સ્વાધ્યાય 13.8

જ્યાં ઉલ્લેખ ન કર્યો હોય, ત્યાં $\pi = \frac{22}{7}$ લો.

1. આપેલ ત્રિજ્યા પરથી ગોળાનું ઘનફળ શોધો :

   (i) 7 સેમી (ii) 0.63 મી

2. આપેલ વ્યાસવાળા નક્કર ગોળા દ્વારા વિસ્થાપિત થતા પાણીનું કદ શોધો.

(i) 28 સેમી (ii) 0.21 મી

3. એક ધાતુના ગોળાનો વ્યાસ 4.2 સેમી છે. જો તેના દ્રવ્યની ઘનતા 8.9 ગ્રામ/સેમી^{3} હોય, તો તેનું દળ શોધો.

4. જો ચંદ્રનો વ્યાસ આશરે પૃથ્વીના વ્યાસના ચોથા ભાગ જેટલો હોય, તો પૃથ્વીના ઘનફળ અને ચંદ્રના ઘનફળનો ગુણોત્તર શોધો.

5. 10.5 સેમી વ્યાસવાળા અર્ધગોળાકાર પાત્રમાં કેટલા લિટર દૂધ સમાવી શકાય?

6. એક અર્ધગોળાકાર ટાંકી 1 સેમી જાડા લોખંડના પતરામાંથી બનાવેલી છે. જો તેની અંદરની ત્રિજ્યા 1 મી હોય, તો આ ટાંકી બનાવવા વપરાયેલા લોખંડનું ઘનફળ શોધો.

7. એક ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ 154 સેમી^{2} હોય, તો તેનું ઘનફળ શોધો.

8. એક મકાનનો ઘુમ્મટ અર્ધગોળાકાર છે. તેની અંદરની બાજુએ ચૂનો લગાવવાનો ખર્ચ ₹ 4989.60 થાય છે. જો ચૂનો લગાવવાનો ખર્ચ 1 મી^{2} ના ₹ 20 હોય, તો

(i) ઘુમ્મટની અંદરની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ અને

(ii) ઘુમ્મટની અંદર રહેલી હવાનું ઘનફળ શોધો.

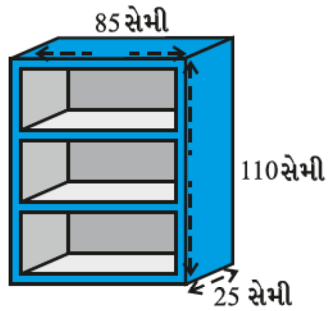
9. જેની ત્રિજ્યા r અને વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ S હોય, તેવા 27 લોખંડના ગોળાને ઓગાળી તેમાંથી જેની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ S' હોય તેવો એક લોખંડનો ગોળો બનાવવામાં આવે છે. તો

(i) નવા ગોળાની ત્રિજ્યા r' અને (ii) S અને S' ગુણોત્તર શોધો.

10. એક ગોળાકાર દવાની કેપ્સુલનો વ્યાસ 3.5 મિમી છે. તો આ કેપ્સુલને સંપૂર્ણ રીતે ભરવા કેટલી દવાની (મિમી^{3}) જરૂર પડશે ?

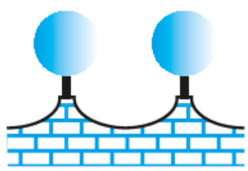
સ્વાધ્યાય 13.9 (પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય)*

1. પુસ્તક મૂકવાના લાકડાના એક કબાટના બહિર્પરિમાણો નીચે મુજબ છે: ઊંચાઈ 110 સેમી, ઊંડાઈ 25 સેમી અને પહોળાઈ 85 સેમી છે. (જુઓ આકૃતિ 13.31) આ કબાટ બનાવવા 5 સેમી જાડા પાટિયાનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. તેની બહારની સપાટી પૉલીશ કરવાની છે અને અંદરની સપાટીને રંગવાની છે. જો પૉલીશ કરવાનો ખર્ચ પ્રતિ સેમી^{2} 20 પૈસા અને રંગવાનો ખર્ચ પ્રતિ સેમી^{2} 10 પૈસા હોય, તો રંગકામ અને પૉલીશ કરવાનો ખર્ચ શોધો.



આકૃતિ 13.31

2. એક ઘરની બહાર આવેલ કોટ પર 21 સેમી વ્યાસવાળા લાકડાના ગોળાને નાના આધાર પર મૂકીને આકૃતિ 13.32. માં દર્શાવ્યા મુજબ શણગારવામાં આવે છે. એ હેતુ માટે આવા 8 ગોળાનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. ગોળાની નીચેનો નળાકાર આધાર 1.5 સેમી ત્રિજ્યા અને 7 સેમી ઊંચાઈવાળો છે. આ આધાર પર કાળો રંગ કરવાનો છે અને ગોળાને સિલ્વર રંગ કરવાનો છે. જો સિલ્વર


આકૃતિ 13.32

* આ સ્વાધ્યાય પરીક્ષાલક્ષી નથી.

રંગ કરવાનો ખર્ચ પ્રતિ સેમી^{2} 25 પૈસા અને કાળો રંગ કરવાનો ખર્ચ 5 પૈસા પ્રતિસેમી^{2} તો રંગ કરવાનો કુલ ખર્ચ શોધો.

3. એક ગોળાના વ્યાસમાં 25 %. ઘટાડો કરતાં તેની વક્રસપાટીમાં કેટલા ટકા ઘટાડો થશે?

13.10 સારાંશ

તમે આ પ્રકરણમાં નીચેના મુદ્દાઓ શીખ્યા :

1. લંબઘનનું પૃષ્ઠફળ $= 2\,(lb + bh + hl)$
2. સમઘનનું પૃષ્ઠફળ $= 6a^2$
3. નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 2\pi rh$
4. નળાકારની સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ $= 2\pi r(r + h)$
5. લંબવૃત્તીય શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= \pi rl$
6. લંબવૃત્તીય શંકુનું કુલ પૃષ્ઠફળ $= \pi rl + \pi r^2$, i.e., $\pi r\,(l + r)$
7. r ત્રિજ્યાવાળા ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 4\,\pi\, r^2$
8. અર્ધગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 2\pi r^2$
9. અર્ધગોળાની સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ $= 3\pi r^2$
10. લંબઘનનું ઘનફળ $= l \times b \times h$
11. સમઘનનું ઘનફળ $= a^3$
12. નળાકારનું ઘનફળ $= \pi r^2 h$
13. શંકુનું ઘનફળ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$
14. ગોળાનું ઘનફળ $= \frac{4}{3}\pi r^3$
15. અર્ધગોળાનું ઘનફળ $= \frac{2}{3}\pi r^3$

[અહીં, મૂળાક્ષરો l, b, h, a, r તેમના પ્રચલિત અર્થમાં વાપરવામાં આવ્યા છે. તેનું અર્થઘટન સંદર્ભ પ્રમાણે કરવું.]

પ્રકરણ 14

આંકડાશાસ્ત્ર

14.1 પ્રાસ્તાવિક

આપણને હકીકતો, આંકડાકીય માહિતી, કોષ્ટક, આલેખો વગેરે સ્વરૂપમાં રોજ પુષ્કળ માહિતી મળતી રહે છે. આ બધી માહિતી દૈનિકપત્રો, ટેલિવિઝન, સામયિકો અને સંચારના બીજાં માધ્યમો દ્વારા પૂરી પાડવામાં આવે છે. આ માહિતી ક્રિકેટની બૅટીંગ અથવા બૉલીંગની સરેરાશ, કોઈ કંપનીનો નફો, શહેરોનું તાપમાન, પંચવર્ષીય યોજનાના જુદાજુદા વિભાગોના ખર્ચા, ચૂંટણીનાં પરિણામો વગેરે સાથે સંકળાયેલી હોઈ શકે. જે આંકડાકીય કે અન્ય રીતે ચોક્કસ હેતુસર એકત્રિત કરવામાં આવે છે તે હકીકતો અથવા આંકડાઓને ***માહિતી*** *(data)* કહે છે. *data* એ લેટિન શબ્દ *datum(ડેટમ્)*નું બહુવચન છે. હા, એ વાત ચોક્કસ છે કે તમારા માટે માહિતી એ નવો શબ્દ નથી. તમે અગાઉના ધોરણમાં માહિતી અને માહિતીની ગોઠવણી વિશે શીખી ગયાં છો.

આપણી દુનિયા વધુમાં વધુ માહિતીલક્ષી બની રહી છે. આપણી જિંદગીમાં દરેક ક્ષેત્રમાં એક યા બીજી રીતે માહિતીનો ઉપયોગ થઈ રહ્યો છે. તેથી આપણા માટે એ જાણવું આવશ્યક છે કે આવી માહિતી પરથી અર્થપૂર્ણ તારણ કેવી રીતે કાઢી શકાય. આમ, માહિતીનું અર્થપૂર્ણ તારણ કાઢવાની ગણિતની શાખાને આંકડાશાસ્ત્ર કહે છે.

મૂળ લેટિન શબ્દ *(status)* નો અર્થ રાજ્ય છે. તેના પરથી અંગ્રેજી શબ્દ *Statistics* ઊતરી આવ્યો હોય એવું લાગે છે. મૂળરૂપમાં આંકડાશાસ્ત્ર એટલે રાજ્યને માટે ઉપયોગી એવા, લોકોના જીવનને સ્પર્શતાં વિવિધ પાસાઓની માહિતીઓનો સરળ સંગ્રહ. સમયાંતરે તેનું કાર્યક્ષેત્ર વિસ્તૃત થતું ગયું અને આંકડાશાસ્ત્રનો સંબંધ હવે ફક્ત માહિતીનું એકત્રીકરણ અને રજૂઆત કરવા પૂરતો જ સીમિત ન રહેતાં માહિતી પરથી અર્થઘટન અને ચિત્રોના નિષ્કર્ષ મેળવવા સુધી વિસ્તર્યો છે.

આંકડાશાસ્ત્ર એ માહિતી એકત્રિત કરવી, વ્યવસ્થિત ગોઠવવી, તેનું વિશ્લેષણ કરવું અને અર્થપૂર્ણ તારણ મેળવવા સાથે સંકળાયેલ એક વિષય છે. આંકડાશાસ્ત્ર શબ્દ જુદાજુદા સંદર્ભ માટે જુદોજુદો અર્થ ધરાવે છે. તો ચાલો આપણે નીચેનાં વાક્યો પર ધ્યાન આપીએ :

1. શું મને ''ભારતનું શૈક્ષણિક આંકડાશાસ્ત્ર''ની તાજેતરની પ્રત મળશે ?

2. મને આંકડાશાસ્ત્રનો અભ્યાસ કરવો ગમે છે, કારણ કે તે રોજિંદા જીવનમાં ઉપયોગી છે.

પહેલાં વિધાનમાં આંકડાશાસ્ત્રનો ઉપયોગ બહુવચનમાં કરેલો છે અને તે આંકડાકીય માહિતીના અર્થમાં છે. તેમાં ભારતની વિવિધ શૈક્ષણિક સંસ્થાઓના જુદાજુદા રાજ્યોના સાક્ષરતા દર વગેરે જેવી બાબતોનો સમાવેશ હોઈ શકે. બીજા વિધાનમાં આંકડાશાસ્ત્ર શબ્દનો ઉપયોગ એકવચન તરીકે છે. તેનો અર્થ જેમાં માહિતીનું એકત્રીકરણ, રજૂઆત, માહિતીનું વિશ્લેષણ કરવાની સાથેસાથે માહિતીના અર્થપૂર્ણ તારણનું ચિત્રણ કરવા ઉપયોગી થાય તેવો વિષય છે.

આ પ્રકરણમાં આપણે માહિતીને લગતાં આ બધા પાસાઓની ટૂંકમાં ચર્ચા કરીએ.

14.2 માહિતીનું એકત્રીકરણ

ચાલો આપણે નીચેની પ્રવૃત્તિ દ્વારા માહિતી એકત્રિત કરવાનો અભ્યાસ શરૂ કરીએ :

પ્રવૃત્તિ 1 : તમારા વર્ગના વિદ્યાર્થીઓને ચાર જૂથમાં વહેંચો. દરેક જૂથને નીચેનામાંથી કોઈ એક પ્રકારની માહિતી એકત્ર કરવાનું કાર્ય સોંપો :

(i) તમારા વર્ગના 20 વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈ

(ii) એક મહિનામાં દરેક દિવસે ગેરહાજર રહેતા તમારા વર્ગના વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા

(iii) તમારા સહાધ્યાયીઓના કુટુંબની સભ્ય-સંખ્યા

(iv) તમારી શાળામાં અથવા એની આસપાસના વિસ્તારમાં 15 છોડની ઊંચાઈ

ચાલો હવે આપણે વિદ્યાર્થીઓએ એકત્રિત કરેલાં પરિણામો જોઈશું. દરેક જૂથમાં તેઓએ માહિતી કેવી રીતે મેળવી ?

(i) શું તેમણે આ માહિતી દરેક વિદ્યાર્થી પાસેથી તેના ઘરની કે વ્યક્તિગત મુલાકાત લઈને મેળવી હતી ?

(ii) શું તેમણે આ માહિતી શાળાના પ્રાપ્ય દફતરી સ્રોતમાંથી મેળવી ?

પ્રથમ કિસ્સા માટે જ્યારે તપાસકર્તાએ કોઈ ચોક્કસ હેતુ ધ્યાનમાં રાખીને તેણે જાતે માહિતી મેળવી છે તે માહિતીને ***પ્રાથમિક માહિતી*** *(primary data)* કહે છે.

બીજા કિસ્સામાં પહેલાંથી એકત્રિત થયેલી માહિતીના સ્રોતમાંથી માહિતી મેળવી છે. આ રીતે મેળવેલી માહિતીને ***ગૌણ માહિતી*** *(secondary data)* કહે છે. આવી માહિતી જે બીજા દ્વારા અન્ય કોઈ વિષયના સંદર્ભમાં મેળવેલી હોય ત્યારે સ્રોતની વિશ્વસનીયતાની ખાતરી કર્યા બાદ તેનો ખૂબ જ કાળજીપૂર્વક ઉપયોગ કરવો જોઈએ.

હવે તમે સમજી ગયા હશો કે માહિતી કેવી રીતે એકત્રિત કરી શકાય છે અને પ્રાથમિક માહિતી તથા ગૌણ માહિતી વચ્ચેનો તફાવત શું છે.

સ્વાધ્યાય 14.1

1. તમે રોજિંદા જીવનમાંથી એકત્ર કરી શકો તેવી માહિતીનાં પાંચ ઉદાહરણ આપો.

2. ઉપરના પ્રશ્નની માહિતીનું પ્રાથમિક માહિતી અને ગૌણ માહિતીમાં વર્ગીકરણ કરો.

14.3 માહિતીની રજૂઆત

જેવું માહિતી એકત્રિત કરવાનું કાર્ય પૂર્ણ થાય તેવું તપાસકર્તાએ આ માહિતીની રજૂઆત જે અર્થપૂર્ણ હોય, સરળતાથી સમજી શકાય અને પહેલી નજરે તેના મુખ્ય ઉદ્દેશો જાણી શકાય એવા સ્વરૂપમાં કરવી જોઈએ.

ચાલો કેટલાંક ઉદાહરણ દ્વારા માહિતીને વિવિધ રીતે રજૂઆત કરવાનું યાદ કરીએ.

ઉદાહરણ 1 : ગણિતની એક કસોટીમાં 10 વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગુણ નીચે પ્રમાણે આપેલા છે :

55 36 95 73 60 42 25 78 75 62

આ સ્વરૂપની માહિતીને *કાચી માહિતી (raw data)* કહે છે.

આ સ્વરૂપમાં તમે માહિતીને જુઓ તો શું તમે સૌથી વધુ અને સૌથી ઓછા ગુણ શોધી શકશો ? સૌથી વધુ અને સૌથી ઓછા ગુણ શોધવામાં તમને કેટલો સમય લાગ્યો ? જો આ ગુણને ચઢતા કે ઊતરતા ક્રમમાં ગોઠવ્યા હોત તો શું ઓછો સમય ન લાગે ? તો ચાલો આપણે ગુણને ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવીએ.

25 36 42 55 60 62 73 75 78 95

હવે આપણે સ્પષ્ટ જોઈ શકીએ છીએ કે સૌથી ઓછા ગુણ 25 અને સૌથી વધુ ગુણ 95 છે.

માહિતીનાં મહત્તમ અને ન્યૂનતમ મૂલ્યોના તફાવતને માહિતીનો વિસ્તાર કહે છે. તેથી આ કિસ્સામાં માહિતીનો વિસ્તાર $95 - 25 = 70$ છે.

ખાસ કરીને જ્યારે પ્રયોગમાં અવલોકનોની સંખ્યા વધુ હોય ત્યારે તે માહિતીને ચઢતાં કે ઊતરતાં ક્રમમાં ગોઠવવામાં વધુ સમય માંગી લે છે. તે આપણે હવે પછીના ઉદાહરણમાં જોઈશું.

ઉદાહરણ 2 : એક શાળાના ધોરણ 9 ના 30 વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલ ગુણ (100 માંથી) નીચે મુજબ છે :

10	20	36	92	95	40	50	56	60	70
92	88	80	70	72	70	36	40	36	40
92	40	50	50	56	60	70	60	60	88

યાદ કરો કે ચોક્કસ ગુણ મેળવનાર વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યાને તે ગુણની આવૃત્તિ કહે છે. ઉદાહરણમાં 4 વિદ્યાર્થીઓએ 70 ગુણ મેળવ્યા છે તેથી 70 ગુણની આવૃત્તિ 4 છે. માહિતીને વધુ સરળ સમજાય તે માટે તેને આપણે આગળ દર્શાવ્યા પ્રમાણે કોષ્ટકમાં લખીશું :

કોષ્ટક 14.1

ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા (એટલે કે આવૃત્તિ)
10	1
20	1
36	3
40	4
50	3
56	2
60	4
70	4
72	1
80	1
88	2
92	3
95	1
કુલ	**30**

કોષ્ટક 14.1 ને અવર્ગીકૃત માહિતીનું ***આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક*** *(frequency distribution table)* કહે છે અથવા ફક્ત *આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક* કહે છે.

તમે કોષ્ટક તૈયાર કરવા માટે આવૃત્તિ-ચિહ્નોનો પણ ઉપયોગ કરી શકો છો. તે હવે પછીના ઉદાહરણમાં જોઈશું.

ઉદાહરણ 3 : વન મહોત્સવ દરમિયાન 100 શાળા પૈકી પ્રત્યેક શાળામાં 100 છોડ ઉગાડવામાં આવ્યા હતા. તેમાંથી એક મહિના પછી બચી ગયેલા છોડની સંખ્યાની નોંધ આ પ્રમાણે હતી.

95	67	28	32	65	65	69	33	98	96
76	42	32	38	42	40	40	69	95	92
75	83	76	83	85	62	37	65	63	42
89	65	73	81	49	52	64	76	83	92
93	68	52	79	81	83	59	82	75	82
86	90	44	62	31	36	38	42	39	83
87	56	58	23	35	76	83	85	30	68
69	83	86	43	45	39	83	75	66	83
92	75	89	66	91	27	88	89	93	42
53	69	90	55	66	49	52	83	34	36

આવી મોટી સંખ્યાની માહિતી રજૂ કરવા માટે વાંચક સરળતાથી સમજી શકે તે માટે આપણે તેને 20-29, 30-39, . . ., 90-99 (આપણી માહિતી 23 થી 98 હોવાથી). જેવાં જૂથમાં ગોઠવી શકીએ. આ જૂથોને ***વર્ગો*** *(classes)* અથવા ***વર્ગ-અંતરાલ*** *(class-intervals)* અને તેની *લંબાઈને* ***વર્ગલંબાઈ*** *(class-size)* અથવા ***વર્ગની પહોળાઈને*** *(class width)* કહે છે. અહીં આ કિસ્સામાં તે 10 છે. દરેક વર્ગની નાનામા નાની સંખ્યાને ***અધઃવર્ગસીમા*** *(lower class limit)* અને મોટામાં મોટી સંખ્યાને ***ઊર્ધ્વવર્ગસીમા***

(upper class limit) કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે વર્ગ 20-29 માં 20 અધઃવર્ગસીમા અને 29 એ ઊર્ધ્વવર્ગસીમા છે.

ઉપરાંત યાદ રાખો કે, આવૃત્તિ-ચિહ્નોનો ઉપયોગ કરીને ઉપરની માહિતીને સંક્ષિપ્ત રૂપે કોષ્ટકમાં નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકાય :

કોષ્ટક 14.2

બચી ગયેલા છોડની સંખ્યા	આવૃત્તિ ચિહ્ન	શાળાઓની સંખ્યા (આવૃત્તિ)
20 - 29	|||	3
30 - 39	𝍸 𝍸 ||||	14
40 - 49	𝍸 𝍸 ||	12
50 - 59	𝍸 |||	8
60 - 69	𝍸 𝍸 𝍸 |||	18
70 - 79	𝍸 𝍸	10
80 - 89	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||	23
90 - 99	𝍸 𝍸 ||	12
	કુલ	**100**

આ સ્વરૂપમાં માહિતીને રજૂ કરતાં માહિતી સરળ અને સંક્ષિપ્ત બને છે અને તેનાથી આપણને પહેલી નજરે તેનાં ચોક્કસ અને અગત્યનાં લક્ષણો ધ્યાનમાં આવે છે. આ પ્રકારના કોષ્ટકને **વર્ગીકૃત માહિતીનું આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક** (*grouped frequency distribution table*) કહે છે. અહીં આપણે સરળતાથી જોઈ શકીએ છીએ કે $8 + 18 + 10 + 23 + 12 = 71$ શાળામાં 50 % કે તેથી વધુ છોડ બચી ગયા હતા.

આપણે જોયું કે ઉપર્યુક્ત કોષ્ટકમાં વર્ગો પરસ્પર અનાચ્છાદિત *(non-overlapping)* છે. હવે નોંધો કે આપણે ઓછી વર્ગલંબાઈવાળા વધારે વર્ગો બનાવી શક્યા હોત અથવા વધુ વર્ગલંબાઈવાળા ઓછા વર્ગો બનાવી શક્યા હોત. ઉદાહરણ તરીકે 22-26, 27-31 વગેરે વર્ગ લઈ શકીએ. વર્ગો આચ્છાદિત(છેદતાં) ન હોવા જોઈએ એ સિવાય કોઈ સખત અને તીવ્ર નિયમ હોતો નથી.

ઉદાહરણ 4 : હવે આપણે જેમાં એક વર્ગના 38 વિદ્યાર્થીઓના વજન આપેલા હોય તેવું આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક લઈએ.

કોષ્ટક 14.3

વજન (કિગ્રામાં)	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
31 - 35	9
36 - 40	5
41 - 45	14
46 - 50	3
51 - 55	1
56 - 60	2
61 - 65	2
66 - 70	1
71 - 75	1
કુલ	**38**

હવે ધારો કે 35.5 કિગ્રા અને 40.5 કિગ્રા વજનવાળા બે નવા વિદ્યાર્થીઓ વર્ગમાં દાખલ થાય તો તેમને આપણે કયા વર્ગમાં મૂકીશું ? ન તો તેમને એવા વર્ગમાં મૂકીએ કે જેની ઊર્ધ્વસીમા 35 અથવા 40 હોય અને ન તો જે તેના પછીના હોય એવા વર્ગોમાં મૂકી શકીએ, કારણ કે બે ક્રમિક વર્ગોની ઊર્ધ્વસીમા અને અધઃસીમા વચ્ચે અવકાશ છે. આપણે આવી સ્થિતિમાં વર્ગને એવી રીતે વિભાજિત કરવા જોઈએ કે જેથી ક્રમિક બે વર્ગોની અનુક્રમે એકની ઊર્ધ્વસીમા અને પછીના વર્ગની અધઃસીમા સમાન થાય. તે માટે આપણે એક વર્ગની ઊર્ધ્વસીમા અને તેની પછીના વર્ગની અધઃસીમા વચ્ચેનું અંતર શોધવું પડે. આપણે આ અંતરનો અડધો ભાગ દરેક વર્ગની ઊર્ધ્વસીમામાં ઉમેરીએ અને અધઃસીમામાંથી બાદ કરીએ.

ઉદાહરણ તરીકે વર્ગ 31 - 35 અને 36 - 40 લઈએ.

36 - 40 ની અધઃસીમા 36

31 - 35 ની ઊર્ધ્વસીમા 35

અંતર $36 - 35 = 1$

અડધું અંતર $\frac{1}{2} = 0.5$

તેથી વર્ગ 31 - 35 થી બનતો નવો વર્ગ $(31 - 0.5)$ - $(35 + 0.5) = 30.5$ - 35.5.

તેવી રીતે વર્ગ 36 - 40 થી બનતો નવો વર્ગ $(36 - 0.5)$ - $(40 + 0.5) = 35.5$ - 40.5.

આ પ્રક્રિયામાં આગળ વધતા જઈએ તો નીચેના સતત વર્ગો મળશે :

30.5 - 35.5, 35.5 - 40.5, 40.5 - 45.5, 45.5 - 50.5, 50.5 - 55.5, 55.5 - 60.5, 60.5 - 65.5, 65.5 - 70.5, 70.5 - 75.5.

હવે આ વર્ગોમાં પેલા નવા વિદ્યાર્થીઓનાં વજનનો સમાવેશ કરવો આપણા માટે શક્ય છે. પરંતુ આવું કરવામાં બીજી એક સમસ્યા છે કે 35.5 કિગ્રા બંને વર્ગો 30.5 - 35.5 અને 35.5 - 40.5 માં આવી શકે. તમારા વિચારથી આ વજન કયા વર્ગમાં રાખવું જોઈએ ?

જો બંને વર્ગોમાં રાખવામાં આવે તો તેની બે વખત ગણતરી થાય છે. તેથી એક રૂઢિ પ્રમાણે 35.5 ને વર્ગ 35.5 - 40.5 માં સમાવેશ કરીશું,પરંતુ 30.5 - 35.5 વર્ગમાં નહિ. તેવી જ રીતે 40.5 ને 40.5 - 45.5 વર્ગમાં મૂકીશું. 35.5 - 40.5 માં નહિ.

આમ, નવા વજન 35.5 કિગ્રા અને 40.5 કિગ્રાનો અનુક્રમે 35.5 - 40.5 અને 40.5 - 45.5 માં સમાવેશ કરીશું. આ પ્રમાણે ગોઠવતાં આપણને નવું આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક મળશે, જે નીચે દર્શાવેલું છે :

કોષ્ટક 14.4

વજન (કિગ્રા માં)	**વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા**
30.5-35.5	9
35.5-40.5	6
40.5-45.5	15
45.5-50.5	3
50.5-55.5	1
55.5-60.5	2
60.5-65.5	2
65.5-70.5	1
70.5-75.5	1
કુલ	**40**

હવે આપણે પ્રવૃત્તિ 1 માં તમારા દ્વારા એકત્રિત થયેલી માહિતી તરફ જોઈએ. હવે અમે તમને કહીશું કે તમે તેને આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટકમાં દર્શાવો.

પ્રવૃત્તિ 2 : આ જ ચાર જૂથોને લઈ તમારી માહિતી આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટકમાં ગોઠવો. માહિતીનો વિસ્તાર અને માહિતીના પ્રકારને ધ્યાનમાં રાખી યોગ્ય વર્ગલંબાઈવાળા અનુકૂળ વર્ગો લો.

સ્વાધ્યાય 14.2

1. ધોરણ 8 ના 30 વિદ્યાર્થીઓના રૂધિર-જૂથ(*Blood group*) ની વિગત નીચે મુજબ છે :

A, B, O, O, AB, O, A, O, B, A, O, B, A, O, O,

A, AB, O, A, A, O, O, AB, B, A, O, B, A, B, O.

આ માહિતીને આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટકના સ્વરૂપમાં દર્શાવો. આ વિદ્યાર્થીઓના રૂધિર-જૂથમાં કયું રૂધિર-જૂથ સૌથી વધુ સામાન્ય છે અને કયું રૂધિર-જૂથ સૌથી વધુ અસામાન્ય છે ?

2. 40 ઈજનેરોનું ઘરથી નોકરીના સ્થાનનું અંતર(કિમીમાં) નીચે મુજબ છે :

5	3	10	20	25	11	13	7	12	31
19	10	12	17	18	11	32	17	16	2
7	9	7	8	3	5	12	15	18	3
12	14	2	9	6	15	15	7	6	12

ઉપર્યુક્ત માહિતીને 0-5 નો (જેમાં 5 આવેલો નથી) પહેલો વર્ગ લઈ, 5 ની વર્ગલંબાઈ લઈ એક વર્ગીકૃત આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક બનાવો. આ કોષ્ટકની રજૂઆત પરથી તમે કઈ મુખ્ય બાબતો તારવશો ?

3. 30 દિવસના એક મહિનામાં એક શહેરનો સાપેક્ષ ભેજ (% માં) નીચે પ્રમાણે આપેલ છે :

98.1	98.6	99.2	90.3	86.5	95.3	92.9	96.3	94.2	95.1
89.2	92.3	97.1	93.5	92.7	95.1	97.2	93.3	95.2	97.3
96.2	92.1	84.9	90.2	95.7	98.3	97.3	96.1	92.1	89

(i) બે વર્ગ 84 - 86, 86 - 88 વગેરે બને તે પ્રમાણે એક વર્ગીકૃત આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક બનાવો.

(ii) તમે કલ્પી શકો છો કે આ માહિતી કયા મહિનાની અથવા કઈ ઋતુની છે ?

(iii) આ માહિતીનો વિસ્તાર શું છે ?

4. 50 વિદ્યાર્થીઓની પૂર્ણાંક સેન્ટિમીટરમાં માપવામાં આવેલી ઊંચાઈ નીચે પ્રમાણે જોવા મળી :

161	150	154	165	168	161	154	162	150	151
162	164	171	165	158	154	156	172	160	170
153	159	161	170	162	165	166	168	165	164
154	152	153	156	158	162	160	161	173	166
161	159	162	167	168	159	158	153	154	159

(i) ઉપર્યુક્ત માહિતીને 160 - 165, 165 - 170 વગેરે વર્ગો લઈને વર્ગીકૃત આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક રૂપે રજૂ કરો.

(ii) ઉપરના કોષ્ટક પરથી ઊંચાઈ વિશે તમે શું તારવી શકો ?

5. કોઈ શહેરના વાતાવરણમાં *સલ્ફર ડાયૉક્સાઈડની સાંદ્રતા ppm(parts per million)*માં શોધવા માટેનો અભ્યાસ કરવામાં આવ્યો. તેની 30 દિવસમાં મળેલી માહિતી આ પ્રમાણે છે :

0.03	0.08	0.08	0.09	0.04	0.17
0.16	0.05	0.02	0.06	0.18	0.20
0.11	0.08	0.12	0.13	0.22	0.07
0.08	0.01	0.10	0.06	0.09	0.18
0.11	0.07	0.05	0.07	0.01	0.04

(i) માહિતીને 0.00 - 0.04, 0.04 - 0.08..... વગેરે વર્ગો લઈ વર્ગીકૃત આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક તૈયાર કરો.

(ii) કેટલા દિવસ સલ્ફર ડાયૉક્સાઈડની સાંદ્રતા 0.11 *ppm* કરતાં વધુ રહી હશે ?

6. ત્રણ સિક્કાઓને વારાફરતી 30 વખત ઉછાળવામાં આવતા દરેક વખત છાપ મળે તેની સંખ્યા નીચે પ્રમાણે નોંધાયેલી હતી :

0	1	2	2	1	2	3	1	3	0
1	3	1	1	2	2	0	1	2	1
3	0	0	1	1	2	3	2	2	0

ઉપર્યુક્ત માહિતી માટેનું આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક તૈયાર કરો.

7. π નું 50 દશાંશ-સ્થાન સુધી મૂલ્ય નીચે મુજબ છે :

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510

(i) દશાંશ-ચિહ્ન પછી 0 થી 9 સુધી આવતા અંકોનું આવૃત્તિ-વિતરણ બનાવો.

(ii) સૌથી વધુ વખત અને સૌથી ઓછી વખત કયો અંક આવે છે.

8. 30 બાળકોને પૂછવામાં આવ્યું કે ગયા અઠવાડિયામાં તેમણે કેટલા કલાક ટીવીના કાર્યક્રમ જોયા ? તેનાથી મળતાં પરિણામો નીચે પ્રમાણે હતાં :

1	6	2	3	5	12	5	8	4	8
10	3	4	12	2	8	15	1	17	6
3	2	8	5	9	6	8	7	14	12

(i) આ માહિતીનું 5 વર્ગલંબાઈ લઈને અને એક વર્ગ 5 - 10 લઈને વર્ગીકૃત આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક તૈયાર કરો.

(ii) કેટલાં બાળકો અઠવાડિયામાં 15 કલાક કે તેથી વધુ કલાક ટેલિવિઝન જોતા હતા ?

9. એક કંપની એક વિશિષ્ટ પ્રકારની કાર-બેટરી બનાવે છે. 40 બૅટરીના આયુષ્યની વર્ષમાં માહિતી નીચે મુજબ છેઃ

2.6	3.0	3.7	3.2	2.2	4.1	3.5	4.5
3.5	2.3	3.2	3.4	3.8	3.2	4.6	3.7
2.5	4.4	3.4	3.3	2.9	3.0	4.3	2.8
3.5	3.2	3.9	3.2	3.2	3.1	3.7	3.4
4.6	3.8	3.2	2.6	3.5	4.2	2.9	3.6

આ માહિતીનું 0.5 વર્ગલંબાઈ લઈ અને 2 - 2.5 વર્ગથી શરૂઆત કરીને એક વર્ગીકૃત આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક બનાવો.

14.4 માહિતીની આલેખાત્મક રજૂઆત

માહિતીને કોષ્ટક દ્વારા દર્શાવવાની ચર્ચા આપણે કરી લીધી છે. ચાલો આપણે માહિતીની બીજી રીતે રજૂઆત એટલે કે ***આલેખાત્મક રજૂઆત*** *(graphical representation)* તરફ ધ્યાન આપીએ. તે સાચું જ કહેવાયું છે કે ''હજાર શબ્દો કરતાં એક ચિત્ર વધુ શ્રેષ્ઠ છે'' સામાન્ય રીતે વ્યક્તિગત માહિતીની તુલના આલેખ દ્વારા વધુ સારી રીતે થઈ શકે છે. વાસ્તવિક માહિતી કરતાં આ રજૂઆત સમજવામાં વધુ સરળ છે. આ વિભાગમાં આપણે નીચે દર્શાવેલ આલેખાત્મક રજૂઆતોનો અભ્યાસ કરીશું.

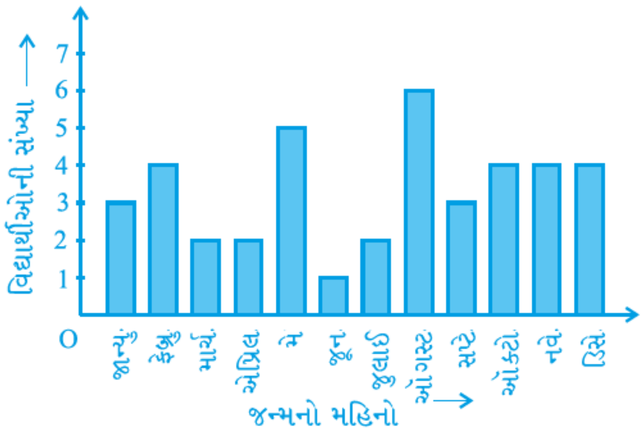
(A) ***લંબાલેખ*** *(Bar Graphs)*

(B) ***સમાન પહોળાઈ અને અસમાન પહોળાઈના સ્તંભાલેખ*** *(histograms of uniform width and of varying widths)*

(C) ***આવૃત્તિ બહુકોણો*** *(frequency polygons)*

(A) લંબાલેખ : અગાઉના ધોરણમાં તમે લંબાલેખ વિશે શીખી ગયા છો અને તેની ચિત્રાત્મક રજૂઆત પણ કરી છે. અહીં, આપણે વધારે ઔપચારિક અભિગમથી તેની ચર્ચા કરીશું. યાદ કરો કે જેમાં સામાન્ય રીતે સમાન પહોળાઈવાળા લંબચોરસ દ્વારા જુદાજુદા ચલો દર્શાવી તેને એક અક્ષ પર (ધારો કે x-અક્ષ) સમાન અંતરે દોરવામાં આવે છે એવી માહિતીની ચિત્રાત્મક રજૂઆત એ લંબાલેખ છે. બીજા અક્ષ (ધારો કે y-અક્ષ) પર ચલનું મૂલ્ય દર્શાવવામાં આવે છે. લંબચોરસની ઊંચાઈ તેના ચલની કિંમત પર આધારિત છે.

ઉદાહરણ 5 : ધોરણ 9 ના એક ચોક્કસ વિભાગના 40 વિદ્યાર્થીઓને તેમના જન્મનો મહિનો જણાવવાનું કહેવામાં આવ્યું અને તેથી મળેલી માહિતીને આધારે નીચેનો આલેખ તૈયાર કરવામાં આવ્યો હતો :



આકૃતિ 14.1

ઉપરના લંબાલેખને ધ્યાનથી જોઈને નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(i) નવેમ્બર મહિનામાં કેટલા વિદ્યાર્થીઓ જન્મ્યા હતા ?

(ii) કયા મહિનામાં સૌથી વધુ વિદ્યાર્થીઓ જન્મ્યા હતા ?

ઉકેલ : નોંધો કે 'જન્મનો મહિનો' એક ચલ છે અને 'વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા' એ ચલનું મૂલ્ય છે.

(i) નવેમ્બર મહિનામાં 4 વિદ્યાર્થીઓનો જન્મ થયો હતો.

(ii) ઑગષ્ટ મહિનામાં સૌથી વધુ વિદ્યાર્થીઓનો જન્મ થયો હતો.

ચાલો હવે નીચે દર્શાવેલ ઉદાહરણ માટે લંબાલેખ કેવી રીતે દોરી શકાય તે જોઈએ.

ઉદાહરણ 6 : ₹ 20,000 માસિક આવક ધરાવતા એક કુટુંબે જુદાજુદા શીર્ષક હેઠળ થતાં માસિક ખર્ચનું નીચે પ્રમાણે આયોજન કર્યું હતું.

કોષ્ટક 14.5

સૂચિ(બજેટ-હેડ)	ખર્ચ (હજાર રૂપિયામાં)
કરિયાણું	4
ભાડું	5
બાળકોનું શિક્ષણ	5
દવાઓ	2
બળતણ	2
મનોરંજન	1
પ્રકીર્ણ	1

ઉપર્યુક્ત માહિતીના આધારે લંબાલેખ દોરો.

ઉકેલ : આપણે આ માહિતીના આધારે નીચે આપેલ સોપાન પ્રમાણે લંબાલેખ દોરીશું. આપણે નોંધીએ કે બીજી હરોળમાં એકમ 'હજાર રૂપિયામાં' છે, એટલે કે કરિયાણા સામે '4' અંક છે. તેનો અર્થ ₹ 4000 થશે.

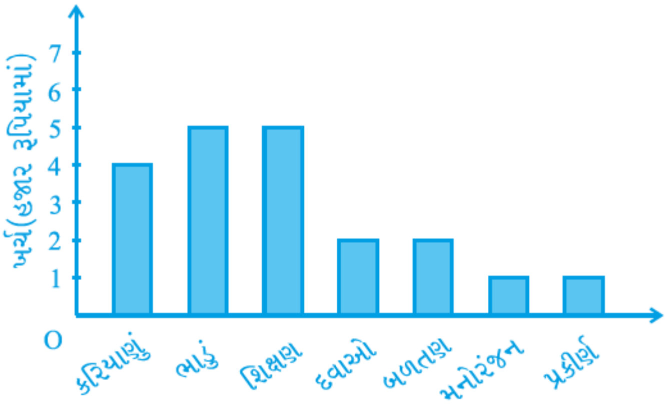
1. અહીં લંબચોરસની પહોળાઈનું કોઈ મહત્ત્વ નથી. તેથી કોઈ પણ માપ પસંદ કરીને સમક્ષિતિજ અક્ષ પર ચલ 'સૂચિ' લઈશું. પરંતુ ચોકસાઈ રાખી દરેક લંબચોરસની પહોળાઈ સરખી રાખીશું અને બે લંબચોરસ વચ્ચેનું અંતર પણ સમાન રાખીશું. એક સૂચિને એક એકમ તરીકે લો.

2. ખર્ચ શિરોલંબ અક્ષ પર નિર્દેશિત કરીએ છીએ. હવે વધુમાં વધુ ખર્ચ ₹ 5000 હોવાથી આપણે 1 એકમ = ₹ 1000 માપ લઈ શકીએ.

3. પહેલા ચલ કરિયાણાને દર્શાવવા 1 એકમની પહોળાઈ અને 4 એકમની ઊંચાઈવાળો લંબચોરસ બનાવીશું.

4. આ પ્રમાણે બે ક્રમિક લંબચોરસ વચ્ચે 1 એકમનું અંતર છોડીને બીજા અન્ય ચલને દર્શાવીશું.

લંબાલેખ આકૃતિ 14.2 માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 14.2

અહીં તમે પહેલી નજરે માહિતીને સાપેક્ષ લક્ષણો સરળતાથી જોઈ શકો છો. ઉદાહરણ તરીકે શૈક્ષણિક ખર્ચ એ દવાઓના ખર્ચના બમણાં કરતા વધારે છે. તેથી કેટલીક બાબતોમાં કોષ્ટક સ્વરૂપ કરતાં આ રીતે માહિતીને ઉત્તમ રીતે રજૂ કરી શકાય છે.

પ્રવૃત્તિ 3 : પ્રવૃત્તિ 1 નાં આ જ ચાર જૂથો દ્વારા મળેલી માહિતીને યોગ્ય લંબાલેખ દ્વારા રજૂઆત કરો.

હવે ચાલો જોઈએ કે સતત વર્ગોના વર્ગીકૃત આવૃત્તિ-વિતરણની આલેખાત્મક રજૂઆત કેવી રીતે કરી શકાય તે જોઈએ.

(B) સ્તંભાલેખ

આ આલેખ એ લંબાલેખની આલેખાત્મક રજૂઆતનું જ સ્વરૂપ છે. પરંતુ તે સતત વર્ગો માટે વપરાય છે.

ઉદાહરણ તરીકે આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક 14.6 લઈએ. તેમાં એક વર્ગના 36 વિદ્યાર્થીઓનું વજન આપેલું છે.

કોષ્ટક 14.6

વજન (કિગ્રામાં)	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
30.5 - 35.5	9
35.5 - 40.5	6
40.5 - 45.5	15
45.5 - 50.5	3
50.5 - 55.5	1
55.5 - 60.5	2
કુલ	36

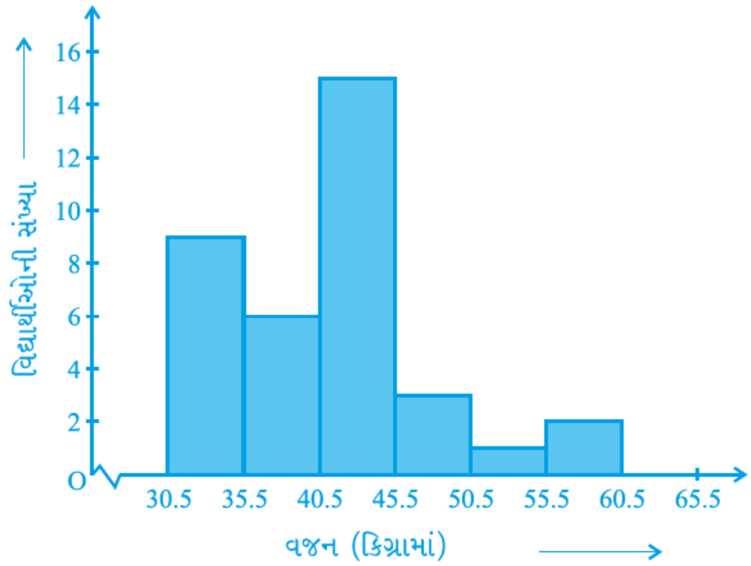
ચાલો આપણે ઉપર્યુક્ત માહિતીની આલેખાત્મક રજૂઆત નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે કરીએ :

(i) આપણે સમક્ષિતિજ અક્ષ પર યોગ્ય માપ લઈને વજનને દર્શાવીશું. આપણે 1 સેમી = 5 કિગ્રા પસંદ કરી શકીએ. પરંતુ પહેલો વર્ગ શૂન્યને બદલે 30.5 થી શરૂ થતો હોવાથી અક્ષ પર કાપ *(kink)* નું ચિહ્ન બનાવીને દર્શાવીશું.

(ii) વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યાને (આવૃત્તિ)શિરોલંબ અક્ષ પર યોગ્ય માપ દ્વારા દર્શાવીશું. સૌથી મોટી આવૃત્તિ 15 હોવાથી 15 નો સમાવેશ થઈ શકે તેવી રીતે તેને અનુરૂપ હોય તેવું માપ લઈશું.

(iii) હવે આપણે વર્ગલંબાઈ જેટલી પહોળાઈ અને વર્ગની સામે આપેલી આવૃત્તિને અનુરૂપ ઊંચાઈવાળો લંબચોરસ અથવા લંબચોરસ સ્તંભ દોરીશું. ઉદાહરણ તરીકે વર્ગ 30.5 - 35.5 ના લંબચોરસની પહોળાઈ 1 સેમી અને ઊંચાઈ 9 સેમી થશે.

(iv) આ પ્રમાણે આપણને આકૃતિ 14.3 માં બતાવ્યા પ્રમાણેનો આલેખ મળશે.



આકૃતિ 14.3

જુઓ કે ક્રમિક લંબચોરસ વચ્ચે કોઈ અંતર નથી. તેથી પરિણામી આલેખ એક ઘન આકૃતિ જેવો દેખાય છે. આ આલેખને ***સ્તંભાલેખ*** *(histogram)* કહે છે. તેમાં સતત વર્ગવાળા વર્ગીકૃત આવૃત્તિ-વિતરણની એક આલેખાત્મક રજૂઆત છે. ઊપરાંત જે લંબાલેખમાં ન હતી તે લંબચોરસની પહોળાઈ પણ આ આલેખની પ્રસ્તુતિમાં મહત્વપૂર્ણ ભાગ ભજવે છે.

અહીં, ખરેખર તો ઉભા કરેલા લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ તેને સંગત આવૃત્તિઓના સમપ્રમાણમાં હોય છે. જો કે બધા લંબચોરસની પહોળાઈ સમાન છે, પરંતુ ઊંચાઈ આવૃત્તિના સપ્રમાણમાં છે. આ કારણથી આપણે લંબાઈઓ ઉપર (iii) માં બતાવ્યા પ્રમાણે લીધી છે.

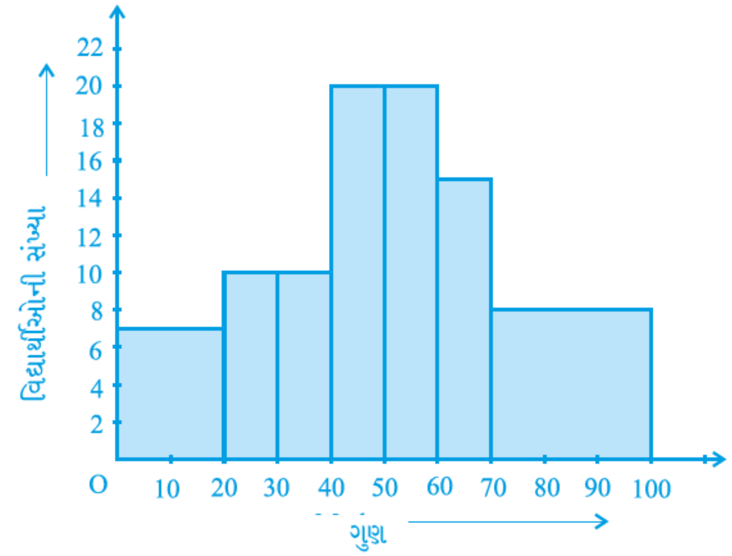
હવે ઉપરના કિસ્સા કરતા જુદી પરિસ્થિતિ ધ્યાનમાં લઈએ.

ઉદાહરણ7 : એક શિક્ષિકા ગણિતની 100 ગુણની પરીક્ષા લઈને બે વિભાગના વિદ્યાર્થીઓના દેખાવનું વિશ્લેષણ કરવા માગે છે. તેમનું કાર્ય જોઈને તેને જણાય છે કે ફક્ત થોડા જ વિદ્યાર્થીઓના ગુણ 20 થી ઓછા છે અને થોડા વિદ્યાર્થીઓના ગુણ 70 કે તેથી વધુ છે. તેથી તેમણે વિદ્યાર્થીઓને 0 - 20, 20 - 30, . . ., 60 - 70, 70 - 100 જેવા જુદીજુદી વર્ગલંબાઈવાળા વર્ગોમાં વર્ગીકૃત કરવાનો નિર્ણય લેતાં, પૃષ્ઠ 223 પર બતાવ્યા પ્રમાણેનું કોષ્ટક મળશે :

કોષ્ટક 14.7

ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
0 - 20	7
20 - 30	10
30 - 40	10
40 - 50	20
50 - 60	20
60 - 70	15
70 - થી વધુ	8
કુલ	90

આકૃતિ 14.4 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે એક વિદ્યાર્થી દ્વારા આ કોષ્ટકનો સ્તંભાલેખ તૈયાર કરવામાં આવ્યો હતો.



આકૃતિ 14.4

આલેખાત્મક રજૂઆતને બરાબર ચકાસો. શું તમે વિચારી શકો છો કે માહિતીનું આ સાચું નિર્દેશન છે? ના, આ આલેખ આપણને ગેરમાર્ગે દોરે છે. અગાઉ જણાવ્યા પ્રમાણે સ્તંભાલેખમાં લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ આવૃત્તિના સમપ્રમાણમાં હોય છે. અગાઉના આલેખમાં આ પ્રશ્ન ઉપસ્થિત થતો ન હતો, કારણ કે બધા જ લંબચોરસની પહોળાઈ સમાન હતી. પરંતુ અહીં લંબચોરસની પહોળાઈ બદલાય છે, આથી ઉપર જે સ્તંભાલેખ છે તે સાચું ચિત્ર રજુ કરતો નથી. ઉદાહરણ તરીકે, વર્ગ 60 - 70 કરતાં વર્ગ 70 - 100 ની આવૃત્તિ વધુ હોવી જોઈએ, પરંતુ તે હકીકતમાં નથી.

તેથી લંબચોરસની લંબાઈમાં થોડું પરિવર્તન કરવાની જરૂર પડશે, જેથી કરીને ફરીને ક્ષેત્રફળ એ આવૃત્તિને સપ્રમાણ થાય.

આપણે નીચે પ્રમાણેનાં સોપાન અનુસરીએ :

1. સૌથી નાની વર્ગલંબાઈવાળો વર્ગ લો. ઉપર્યુક્ત ઉદાહરણમાં સૌથી નાની વર્ગલંબાઈ 10 છે.
2. લંબચોરસની લંબાઈ એવી રીતે બદલો કે જેથી દરેક લંબચોરસની વર્ગલંબાઈ 10 ને સપ્રમાણ થાય.

ઉદાહરણ તરીકે જ્યારે વર્ગલંબાઈ 20 હોય ત્યારે લંબચોરસની લંબાઈ 7 છે, તો વર્ગલંબાઈ 10 હોય, તો લંબચોરસની લંબાઈ $\frac{7}{20} \times 10 = 3.5$ થાય.

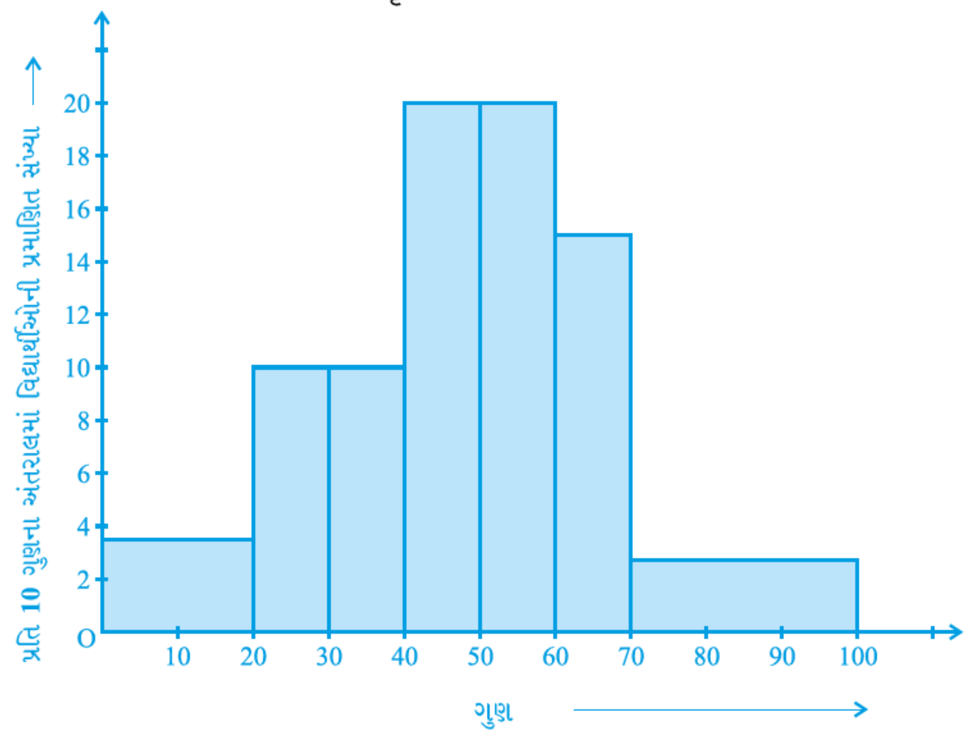
આ પ્રમાણે આગળ પ્રક્રિયા કરતાં આપણને નીચે પ્રમાણે કોષ્ટક 14.8 મળશે :

કોષ્ટક 14.8

ગુણ	આવૃત્તિ	વર્ગલંબાઈ	લંબચોરસની લંબાઈ
0 - 20	7	20	$\frac{7}{20} \times 10 = 3.5$
20 - 30	10	10	$\frac{10}{10} \times 10 = 10$
30 - 40	10	10	$\frac{10}{10} \times 10 = 10$
40 - 50	20	10	$\frac{20}{10} \times 10 = 20$
50 - 60	20	10	$\frac{20}{10} \times 10 = 20$
60 - 70	15	10	$\frac{15}{10} \times 10 = 15$
70 - 100	8	30	$\frac{8}{30} \times 10 = 2.67$

આપણે આ દરેક વર્ગમાં વર્ગલંબાઈની ગણતરી 10 ગુણ પ્રમાણે કરેલી છે. તેથી આ લંબાઈઓને ''10 ગુણની વર્ગલંબાઈને અનુરૂપ વિદ્યાર્થીઓની સપ્રમાણ આવૃત્તિ'' (*proportional frequency*) કહીશું.

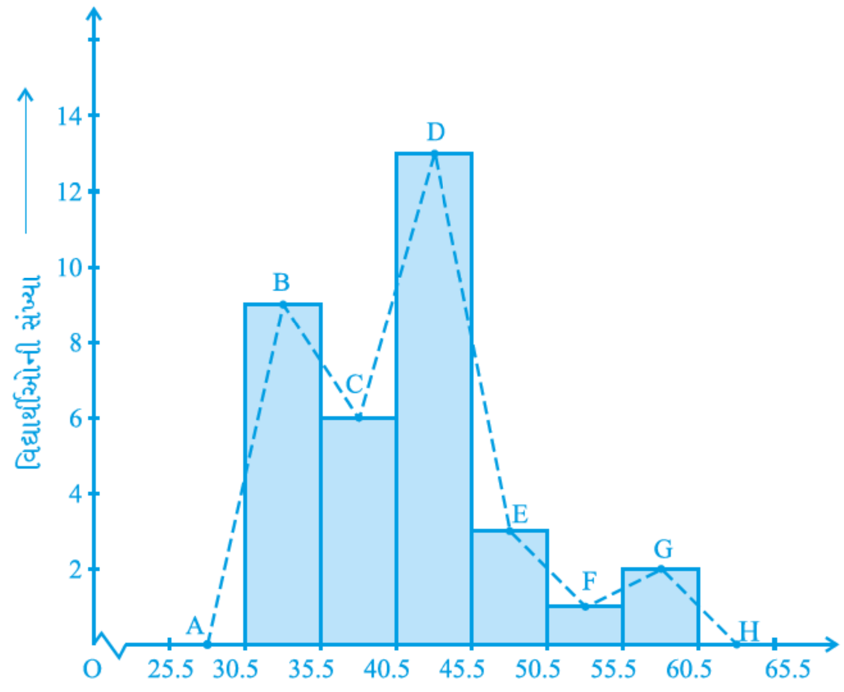
તેથી વિવિધ વર્ગલંબાઈવાળો સાચો સ્તંભાલેખ આકૃતિ 14.5 માં આપેલ છે.



આકૃતિ 14.5

(C) આવૃત્તિ બહુકોણ

સંખ્યાત્મક માહિતી અને તેની આવૃત્તિને રજૂ કરવાની હજુ પણ એક અન્ય પદ્ધતિ છે. તે પદ્ધતિ આવૃત્તિ બહુકોણ છે. તેનો અર્થ સમજવા માટે ચાલો આપણે આકૃતિ 14.3 માં દર્શાવેલ સ્તંભાલેખને ધ્યાનમાં લઈએ. આ સ્તંભાલેખમાં પરસ્પર જોડાયેલા લંબચોરસની ઉપરની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને રેખાખંડ વડે જોડી દઈએ. તેને આપણે અનુક્રમે B, C, D, E, F અને G કહીએ. જ્યારે રેખાખંડોને આપણે જોડીએ ત્યારે આકૃતિ BCDEFG (જુઓ આકૃતિ 14.6.) મળે છે. આ આવૃત્તિ બહુકોણ પૂર્ણ કરવા માટે આપણે 30.5 - 35.5 નો પહેલાના સૈદ્ધાંતિક વર્ગ અને 55.5 - 60.5 ના પછીના સૈદ્ધાંતિક વર્ગની આવૃત્તિ શૂન્ય માની લઈએ અને તેમના મધ્યબિંદુને અનુક્રમે A અને H લઈએ. આકૃતિ 14.3 માં બતાવ્યા મુજબ આવૃત્તિને સંગત આવૃત્તિ બહુકોણ ABCDEFGH મળશે. તે આપણે આકૃતિ 14.6 માં બતાવ્યું છે.



આકૃતિ 14.6

જો કે સૌથી નાના વર્ગ પહેલાં અને સૌથી મોટા વર્ગ પછી કોઈ વર્ગ નથી. પરંતુ શૂન્ય આવૃત્તિવાળા બંને વર્ગને ઉમેરવાથી મળતા આવૃત્તિ બહુકોણનું ક્ષેત્રફળ એ સ્તંભાલેખના ક્ષેત્રફળ જેટલું જ હોય છે. તમે તે બતાવી શકશો કે આવું કેમ બને ?

(**સૂચન :** એકરૂપ ત્રિકોણોની શરતોનો ઉપયોગ કરો.)

હવે એક પ્રશ્ન ઊભો થાય છે કે જ્યારે પ્રથમ વર્ગ પહેલાં કોઈ વર્ગ ન હોય તો આવૃત્તિ બહુકોણ કેવી રીતે પૂર્ણ કરીશું ? તે સમજવા માટે એક ઉદાહરણને જોઈએ.

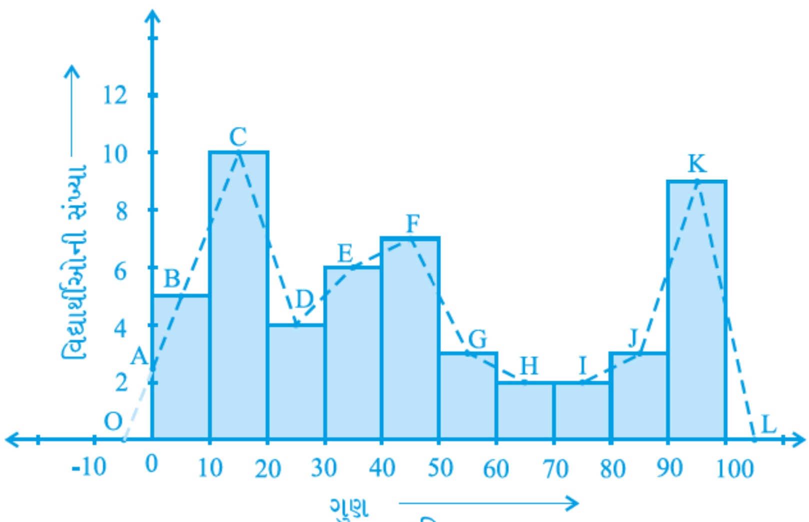
ઉદાહરણ 8 : કોઈ એક વર્ગના 51 વિદ્યાર્થીઓના 100 ગુણની કસોટીમાં મેળવેલા ગુણ આગળ પ્રમાણે કોષ્ટક 14.9 માં આપ્યા છે :

કોષ્ટક 14.9

ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
0 - 10	5
10 - 20	10
20 - 30	4
30 - 40	6
40 - 50	7
50 - 60	3
60 - 70	2
70 - 80	2
80 - 90	3
90 - 100	9
કુલ	**51**

ઉપર્યુક્ત આવૃત્તિ-વિતરણના કોષ્ટકને અનુરૂપ આવૃત્તિ બહુકોણ દોરો.

ઉકેલ : સૌપ્રથમ આ માહિતીનો ઉપયોગ કરી સ્તંભાલેખ દોરીએ અને લંબચોરસના ઉપરની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને અનુક્રમે B, C, D, E, F, G, H, I, J, K વડે દર્શાવીએ. અહીં પહેલો વર્ગ 0-10 છે. તેની આગળનો વર્ગ મેળવવા માટે સમક્ષિતિજ અક્ષને ઋણ દિશામાં લંબાવીને અને કાલ્પનિક વર્ગ (–10) - 0 નું મધ્યબિંદુ શોધો. પ્રથમ અંત્યબિંદુ એટલે કે B ને સમક્ષિતિજ અક્ષની ઋણ દિશામાં શૂન્ય આવૃત્તિવાળા વર્ગના મધ્યબિંદુ સાથે જોડવામાં આવે છે. તે શિરોલંબ અક્ષને જે બિંદુમાં છેદે તેને A વડે દર્શાવવામાં આવે છે. આ માહિતીના અંતિમ વર્ગની પછીના વર્ગનું મધ્યબિંદુ L માનીએ. આમ, આકૃતિ 4.7 માં દર્શાવ્યા મુજબ OABCDEFGHIJKL એ આવૃત્તિ બહુકોણ છે. તે આકૃતિ 14.7 માં દર્શાવાયો છે.



આકૃતિ 14.7

આવૃત્તિ બહુકોણને સ્તંભાલેખ દોર્યા સિવાય પણ સ્વતંત્ર રીતે દોરી શકાય છે. આ માટે માહિતીના દરેક વર્ગનાં મધ્યબિંદુઓની જરૂર

પડે છે. આ વર્ગોનાં મધ્યબિંદુઓને વર્ગની ***મધ્યકિંમત*** *(class-marks)* કહે છે.

વર્ગની મધ્યકિંમત શોધવા માટે વર્ગની અધઃસીમા અને ઊર્ધ્વસીમાનો સરવાળો કરી 2 વડે ભાગવામાં આવે છે.

$$\text{વર્ગની મધ્યકિંમત} = \frac{\text{ઊર્ધ્વસીમા} + \text{અધઃસીમા}}{2}$$

ચાલો એક ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 9 : એક શહેરમાં જીવનનિર્વાહ-અંક (*cost of living index*) નો અભ્યાસ કરવા માટેનાં સાપ્તાહિક અવલોકનો નીચે કોષ્ટકમાં આપેલાં છે :

કોષ્ટક 14.10

જીવન નિર્વાહ અંક	સાપ્તાહિક સંખ્યા
140 - 150	5
150 - 160	10
160 - 170	20
170 - 180	9
180 - 190	6
190 - 200	2
કુલ	52

ઉપર્યુક્ત માહિતી માટે આવૃત્તિ બહુકોણ (સ્તંભાલેખ દોર્યા વગર) તૈયાર કરો.

ઉકેલ : સ્તંભાલેખ દોર્યા સિવાય આપણે આવૃત્તિ બહુકોણ દોરવા માટે ઉપર્યુક્ત વર્ગો 140 - 150, 150 - 160,.... ની મધ્યકિંમતો શોધીએ.

વર્ગ 140 - 150 માટે ઊર્ધ્વસીમા = 150 અને અધઃસીમા = 140

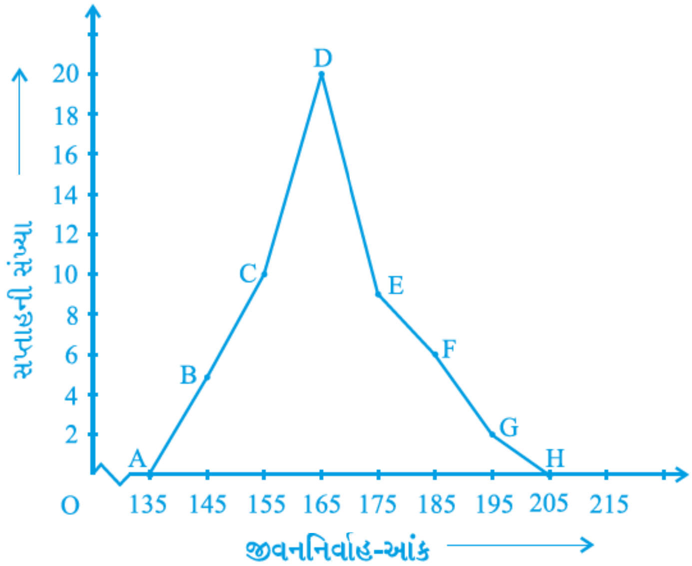
$$\text{વર્ગ મધ્યકિંમત} = \frac{150 + 140}{2} = \frac{290}{2} = 145.$$

આ રીતે આપણે બીજા વર્ગોની મધ્યકિંમતો શોધીએ. આમ નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે નવું કોષ્ટક મળશે :

કોષ્ટક 14.11

વર્ગ	મધ્યકિંમત	આવૃત્તિ
140 - 150	145	5
150 - 160	155	10
160 - 170	165	20
170 - 180	175	9
180 - 190	185	6
190 - 200	195	2
કુલ		52

હવે આપણે મધ્યકિંમતોને સમક્ષિતિજ અક્ષ પર અને આવૃત્તિઓને શિરોલંબ અક્ષ પર મૂકીએ અને પછી તે બિંદુઓ B(145, 5), C(155, 10), D(165, 20), E(175, 9), F(185, 6) અને G(195, 2) ને આલેખી તેમને રેખાખંડથી જોડીએ. વર્ગ 130 - 140 (જે સૌથી નાના વર્ગ 140 - 150 ની બરાબર આગળનો વર્ગ) ના મધ્યબિંદુને સંગત શૂન્ય આવૃત્તિ એટલે કે A(135, 0) અને G(195, 2) ના તરત પછી આવતાં વર્ગ માટે બિંદુ H (205, 0) લેવાનું આપણે ભૂલીશું નહિ. તેના પરિણામે આવૃત્તિ બહુકોણ ABCDEFGH મળશે. (જુઓ આકૃતિ 14.8.)



આકૃતિ 14.8

જ્યારે માહિતી સતત અને ખૂબ જ મોટી હોય ત્યારે આવૃત્તિ બહુકોણનો ઉપયોગ થાય છે. એક જ લાક્ષણિકતા ધરાવતી બે જુદીજુદી માહિતીના સમૂહની સરખામણી કરવા માટે આ ખૂબ જ ઉપયોગી છે. ઉદાહરણ તરીકે એક જ વર્ગના બે જુદાજુદા વિભાગોના પ્રદર્શનની તુલના કરવા માટે આ આલેખ વધુ ઉપયોગી છે.

સ્વાધ્યાય 14.3

1. કોઈ એક સંસ્થા દ્વારા 15 થી 44 (વર્ષોમાં) વચ્ચેની વયવાળી સ્ત્રીની માંદગી અને મૃત્યુનાં કારણો શોધવા માટે કરવામાં આવેલ વિશ્વવ્યાપી સર્વેક્ષણના નીચે પ્રમાણેના આંકડા(% માં) મળ્યા હતા :

અ.નં.	કારણો	સ્ત્રી મૃત્યુદર (%)
1.	પ્રજનન સ્વાસ્થ્ય સ્થિતિ	31.8
2.	જ્ઞાનતંતુ સંગત મનોવિકાર	25.4
3.	ઈજાઓ	12.4
4.	હૃદય અને રક્તવાહિકા તંત્રની સ્થિતિ	4.3
5.	શ્વસનતંત્રની સ્થિતિ	4.1
6.	અન્ય કારણો	22.0

(i) ઉપર આપેલી માહિતીની આલેખાત્મક રજૂઆત કરો.

(ii) વિશ્વમાં સ્ત્રીઓની માંદગી અને મૃત્યુ માટે કયું પરિબળ સૌથી વધુ કારણભૂત છે ?

(iii) તમારા શિક્ષકની મદદથી ઉપર (ii) માં દર્શાવ્યા સિવાયના અન્ય બે મુખ્ય પરિબળો શોધવાનો પ્રયત્ન કરો.

2. ભારતીય સમાજના વિવિધ વિભાગોમાં હજાર છોકરાઓ દીઠ છોકરીઓની સંખ્યાઓની (લગભગ 10 ના ગુણિતની નજીક) માહિતી નીચે પ્રમાણે છે :

વિભાગ	હજાર છોકરાઓ દીઠ છોકરીઓની સંખ્યા
અનુસૂચિત જાતિ (SC)	940
અનુસૂચિત જનજાતિ (ST)	970
બિન અનુસૂચિત જાતિ/અનુસૂચિત જનજાતિ	920
પછાત જિલ્લાઓ	950
બિન પછાત જિલ્લાઓ	920
ગ્રામ્ય	930
શહેર	910

(i) ઉપર્યુક્ત માહિતીને આધારે લંબાલેખ દોરો.

(ii) આલેખ પરથી કયા તારણ કાઢી શકાય તેની વર્ગમાં ચર્ચા કરો

3. એક રાજ્યની વિધાનસભાની ચૂંટણીમાં જુદાજુદા રાજકીય પક્ષોએ જીતેલી બેઠકો માટે મતદાનનું પરિણામ નીચે પ્રમાણે છે :

રાજકીય પક્ષો	A	B	C	D	E	F
જીતેલી બેઠકો	75	55	37	29	10	37

(i) મતદાનનાં પરિણામોને દર્શાવતો એક લંબાલેખ દોરો.

(ii) કયો રાજકીય પક્ષ સૌથી વધુ બેઠકો જીત્યો ?

4. એક છોડનાં 40 પાંદડાંની લંબાઈ મિલિમીટરમાં આપવામાં આવી છે અને તેનાથી મળતી માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવી છે:

લંબાઈ (મિમી માં)	પાંદડાંની સંખ્યા
118 - 126	3
127 - 135	5
136 - 144	9
145 - 153	12
154 - 162	5
163 - 171	4
172 - 180	2

(i) આપેલી માહિતીનું નિરૂપણ કરતો એક સ્તંભાલેખ દોરો. [**સૂચન:** સૌપ્રથમ વર્ગોને સતત બનાવો.]

(ii) શું અન્ય રીતે આ માહિતીની આલેખાત્મક રજૂઆત થઈ શકે ?

(iii) 153 મિલિમીટર લંબાઈના પાંદડાની સંખ્યા સૌથી વધુ છે. શું આ તારણ સાચું છે ? કેમ ?

5. નીચેના કોષ્ટકમાં 400 નિયોન બલ્બનું આયુષ્ય આપેલું છે :

આયુષ્ય (કલાકમાં)	બલ્બની સંખ્યા
300 - 400	14
400 - 500	56
500 - 600	60
600 - 700	86
700 - 800	74
800 - 900	62
900 - 1000	48

(i) આપેલી માહિતીને સ્તંભાલેખની મદદથી દર્શાવો.

(ii) કેટલા બલ્બનું આયુષ્ય 700 કલાકથી વધુ છે ?

6. નીચેના કોષ્ટકમાં વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગુણ અનુસાર તેમને બે વિભાગમાં વહેંચવામાં આવ્યા છે :

વિભાગ A		વિભાગ B	
ગુણ	આવૃત્તિ	ગુણ	આવૃત્તિ
0 - 10	3	0 - 10	5
10 - 20	9	10 - 20	19
20 - 30	17	20 - 30	15
30 - 40	12	30 - 40	10
40 - 50	9	40 - 50	1

બંને વિભાગોના વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગુણ એક જ આલેખમાં જુદાજુદા આવૃત્તિ બહુકોણ દ્વારા દર્શાવો. બંને આવૃત્તિ બહુકોણનો અભ્યાસ કરી બંને વિભાગના વિદ્યાર્થીના દેખાવની તુલના કરો.

7. એક ક્રિકેટ મૅચમાં બે ટીમો A અને B દ્વારા પ્રથમ 60 બૉલમાં કરેલા રનની માહિતી નીચે નોંધવામાં આવી છે :

બૉલની સંખ્યા	ટીમ A	ટીમ B
1 - 6	2	5
7 - 12	1	6
13 - 18	8	2
19 - 24	9	10
25 - 30	4	5
31 - 36	5	6
37 - 42	6	3
43 - 48	10	4
49 - 54	6	8
55 - 60	2	10

એક જ આલેખપત્ર પર બંને ટીમોની માહિતીને આવૃત્તિ બહુકોણની મદદથી દર્શાવો.

[**સૂચન :** સૌપ્રથમ વર્ગોને સતત બનાવો.]

8. એક બગીચામાં રમતાં જુદા-જુદા વય-જૂથનાં બાળકોની સંખ્યાનું યાદચ્છિક સર્વેક્ષણ કરવાથી નીચે પ્રમાણેની માહિતી પ્રાપ્ત થઈ.

ઉંમર (વર્ષમાં)	બાળકોની સંખ્યા
1-2	5
2-3	3
3-5	6
5-7	12
7-10	9
10-15	10
15-17	4

ઉપર્યુક્ત માહિતીને દર્શાવતો એક સ્તંભાલેખ દોરો.

9. એક સ્થાનિક ટેલિફોન ડિરેક્ટરીમાંથી યાદચ્છિક રીતે 100 અટક પસંદ કરવામાં આવી. તેમાંથી અંગ્રેજી મૂળાક્ષરોની સંખ્યાનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે પ્રમાણે પ્રાપ્ત થયું.

મૂળાક્ષરોની સંખ્યા	અટકની સંખ્યા
1 -4	6
4 -6	30
6 -8	44
8 - 12	16
12 -20	4

(i) આપેલી માહિતીનું નિરૂપણ કરતો સ્તંભાલેખ દોરો.

(ii) જે વર્ગમાં સૌથી વધુ સંખ્યામાં અટક છે તે વર્ગ શોધીને લખો.

14.5 મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનાં માપ *(Measures of Central Tendency)*

અત્યાર સુધીમાં આપણે આ પ્રકરણમાં આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક, લંબાલેખ, સ્તંભાલેખ અને આવૃત્તિ બહુકોણની મદદથી માહિતીને વિવિધ સ્વરૂપે રજૂ કરી છે. હવે એ પ્રશ્ન થાય કે શું માહિતીને અર્થપૂર્ણ બનાવવા માટે આપણે હંમેશાં બધી જ માહિતીનો અભ્યાસ કરવાની જરૂરિયાત પડે છે અથવા આ માહિતીનું ચોક્કસ પ્રતિનિધિત્વ કરે તેવી કેટલીક વિશેષતા શોધી શકીએ. મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનાં માપ (*measures of central tendency*) અથવા સરેરાશની મદદથી આ શક્ય છે.

જ્યારે બે વિદ્યાર્થીઓ મેરી અને હરિને તેમની ઉત્તરવહી આપવામાં આવી. ત્યારની પરિસ્થિતિને ધ્યાનમાં લઈએ. કસોટીમાં

દસ-દસ ગુણના પાંચ પ્રશ્નો હતા. તેમણે મેળવેલા ગુણ નીચે પ્રમાણે હતા :

પ્રશ્નનો ક્રમ	1	2	3	4	5
મેરીના ગુણ	10	8	9	8	7
હરિના પ્રાપ્તાંક	4	7	10	10	10

મેળવેલી કસોટીની ઉત્તરવહીમાં બંનેના સરેરાશ ગુણ આ પ્રમાણે હતા.

$$\text{મેરીના સરેરાશ ગુણ} = \frac{42}{5} = 8.4$$

$$\text{હરિના સરેરાશ ગુણ} = \frac{41}{5} = 8.2$$

હરિના સરેરાશ ગુણ કરતાં મેરીના સરેરાશ ગુણ વધારે હોવાથી મેરીએ દાવો કર્યો કે હરિ કરતા તેનો દેખાવ સારો છે. પરંતુ હરિ તેનાથી સહમત ન થયો. તેણે બંનેના ગુણ ચઢતાં ક્રમમાં નીચે પ્રમાણે ગોઠવ્યા અને તેનાથી મધ્યના ગુણ શોધ્યા તે નીચે પ્રમાણે છે :

મેરીના સરેરાશ ગુણ	7	8	8	9	10
હરિના સરેરાશ ગુણ	4	7	10	10	10

હરિનું કહેવું છે કે તેના બરાબર મધ્યના ગુણ 10 હતા. તે મેરીના મધ્યના ગુણ **8** કરતાં વધારે છે. તેથી કસોટીમાં તેનો દેખાવ વધુ સારો ગણાવો જોઈએ.

પરંતુ મેરી તેમાં સહમત ન હતી. મેરીને મનાવવા હરિએ બીજી યુક્તિ અપનાવી. તેણે કહ્યું કે મેરીના ગુણ સાથે સરખાવતાં તેણે 10 ગુણ વધુ વખત (ત્રણ વખત) મેળવ્યા છે. જ્યારે મેરીએ 10 ગુણ એક જ વાર મેળવ્યા છે. તેથી તેનું પ્રદર્શન વધુ સારું ગણાય છે.

હવે હરિ અને મેરીના આ વિવાદને ઉકેલવા તેમના દ્વારા વપરાયેલા ત્રણે ય માપની પદ્ધતિ જોઈએ.

પ્રથમ કિસ્સામાં મેરીએ જે સરાસરી ગુણ મેળવ્યા તેને ***મધ્યક*** *(mean)* કહેવાય છે. હરિએ પોતાની દલીલમાં ઉપયોગ કર્યો અને મધ્યના ગુણ શોધ્યા, તે ***મધ્યસ્થ*** *(median)* છે અને પોતાની બીજી દલીલમાં હરિએ વધુ વખત મેળવેલા જે ગુણની વાત કહી છે તે ***બહુલક*** *(mode)* છે.

હવે આપણે પહેલા મધ્યક વિશે વિસ્તારથી ચર્ચા કરીએ.

બધાં જ અવલોકનોની કિંમતના સરવાળાને અવલોકનોની કુલ સંખ્યા વડે ભાગતાં જે કિંમત મળે તેને અવલોકનોનો ***મધ્યક*** *(mean)* અથવા **સરેરાશ** કહે છે અને તેને સંકેતમાં $\overline{x}$ વડે દર્શાવાય છે અને તે 'x બાર' એમ વંચાય છે.

ચાલો આપણે એક ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ 10 : 5 વ્યક્તિઓને પૂછવામાં આવ્યું કે તેમના સમાજમાં સામાજિક કાર્ય કરવા માટે એક અઠવાડિયામાં કેટલો સમય તેમણે ફાળવ્યો હતો. તેમણે કહ્યું અનુક્રમે 10, 7, 13, 20 અને 15 કલાક. તો એક અઠવાડિયામાં તેમના દ્વારા સામાજિક કાર્યમાં ફાળવેલા સમયનો મધ્યક શોધો.

ઉકેલ : આપણે અગાઉના ધોરણમાં અભ્યાસ કરી ગયા કે,

$$\text{મધ્યક} = \frac{\text{બધાં અવલોકનોનો સરવાળો}}{\text{અવલોકનોની કુલ સંખ્યા}}$$

મધ્યક શોધવા માટેની પદ્ધતિ સરળ કરવા માટે ચાલો આપણે એક ચલ x_i લઈએ. અહીં, i એ અવલોકનનો ક્રમ છે. અહીં $i = 1$ થી 5 માંથી કોઈ પણ એક એટલે કે આપણું પહેલું અવલોકન x_1 બીજું અવલોકન x_2 અને તે રીતે પાંચમું અવલોકન x_5 થશે.

ઉપરાંત $x_1 = 10$ નો અર્થ એ થાય છે કે પહેલા અવલોકનનું મૂલ્ય 10 છે અને તેને x_1 વડે દર્શાવવામાં આવે છે. તેવી જ રીતે $x_2 = 7$, $x_3 = 13$, $x_4 = 20$ અને $x_5 = 15$ દર્શાવેલ છે.

$$\text{મધ્યક } \overline{x} = \frac{\text{બધાં અવલોકનોનો સરવાળો}}{\text{અવલોકનોની કુલ સંખ્યા}}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$$

$$= \frac{10 + 7 + 13 + 20 + 15}{5} = \frac{65}{5} = 13$$

આથી 5 વ્યક્તિઓ દ્વારા સામાજિક કાર્ય કરવા માટે એક અઠવાડિયામાં ફાળવેલ સમયનો મધ્યક 13 કલાકનો હતો.

હવે 30 વ્યક્તિઓ દ્વારા સામાજિક કાર્યમાં ફાળવેલ સમયનો મધ્યક શોધવો છે તો આપણે $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{30}$ લખવું પડે. આ તો કઠિન કાર્ય છે. તેથી તે સરવાળાને સંક્ષિપ્તમાં દર્શાવવા ગ્રીક સંકેત Σ (સરવાળાનો સંકેત સીગ્મા) નો ઉપયોગ કરીએ છીએ. તેથી $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{30}$ને બદલે આપણે $\sum_{i=1}^{30} x_i$ લખીએ છીએ, જ્યાં i ની કિંમત 1 થી 30 સુધી વિસ્તરી છે, તેવો x_i નો સરવાળો છે એમ વાંચવામાં આવે છે.

તેથી, $$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{30} x_i}{30}$$

આ પ્રમાણે n અવલોકનો માટે $$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

ઉદાહરણ 11 : એક શાળાના ધોરણ 9 ના 30 વિદ્યાર્થીઓએ ઉદાહરણ 2 માં આપેલા ગુણ પ્રમાણે મેળવેલા ગુણનો મધ્યક શોધો.

ઉકેલ : $$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{30}}{30}$$

$$\sum_{i=1}^{30} x_i = 10 + 20 + 36 + 92 + 95 + 40 + 50 + 56 + 60 + 70 + 92 + 88$$

$$80 + 70 + 72 + 70 + 36 + 40 + 36 + 40 + 92 + 40 + 50 + 50$$

$$56 + 60 + 70 + 60 + 60 + 88 = 1779$$

$$\overline{x} = \frac{1779}{30} = 59.3$$

શું આ પ્રક્રિયા વધુ સમય નથી માંગી લેતી ? શું આ પ્રક્રિયાને સહેલી બનાવી શકાય ? નોંધો કે આપણી પાસે માહિતીનું આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક છે. (જુઓ કોષ્ટક 14.1.)

આ કોષ્ટક દર્શાવે છે કે 1 વિદ્યાર્થીએ 10 ગુણ પ્રાપ્ત કર્યા હતા. 1 વિદ્યાર્થીએ 20 ગુણ પ્રાપ્ત કર્યા હતા. 3 વિદ્યાર્થીઓએ 36 ગુણ પ્રાપ્ત કર્યા હતા. 4 વિદ્યાર્થીઓએ 40 ગુણ પ્રાપ્ત કર્યા હતા. 3 વિદ્યાર્થીઓએ 50 ગુણ પ્રાપ્ત કર્યા હતા. 2 વિદ્યાર્થીઓએ 56 ગુણ પ્રાપ્ત કર્યા હતા. 4 વિદ્યાર્થીઓએ 60 ગુણ પ્રાપ્ત કર્યા હતા. 4 વિદ્યાર્થીઓએ 70 ગુણ પ્રાપ્ત કર્યા હતા. 1 વિદ્યાર્થીએ 72 ગુણ પ્રાપ્ત કર્યા હતા. 1 વિદ્યાર્થીએ 80 ગુણ પ્રાપ્ત કર્યા હતા. 2 વિદ્યાર્થીઓએ 88 ગુણ પ્રાપ્ત કર્યા હતા. 3 વિદ્યાર્થીઓએ 92 ગુણ પ્રાપ્ત કર્યા હતા. 1 વિદ્યાર્થીએ 95 ગુણ પ્રાપ્ત કર્યા હતા.

આથી મેળવેલા કુલ ગુણ $= (1 \times 10) + (1 \times 20) + (3 \times 36) + (4 \times 40) + (3 \times 50) + (2 \times 56)$
$+ (4 \times 60) + (4 \times 70) + (1 \times 72) + (1 \times 80) + (2 \times 88) + (3 \times 92)$
$+ (1 \times 95)$

$= f_1x_1 + \ldots + f_{13}x_{13}$, અહીં f_i એ કોષ્ટક 14.1 માં અવલોકનોની આવૃત્તિ છે.

ટૂંકમાં તેને $\sum_{i=1}^{13} f_i x_i$ રીતે લખી શકાય છે.

તેથી મેળવેલા કુલ ગુણ $= \sum_{i=1}^{13} f_i x_i$

$= 10 + 20 + 108 + 160 + 150 + 112 + 240 + 280 + 72 + 80 + 176 + 276 + 95$

$= 1779$

અવલોકનોની કુલ સંખ્યા $= \sum_{i=1}^{13} f_i$

$= f_1 + f_2 + \ldots + f_{13}$

$= 1 + 1 + 3 + 4 + 3 + 2 + 4 + 4 + 1 + 1 + 2 + 3 + 1$

$= 30$

તેથી, મધ્યક $\bar{x} = \dfrac{\text{બધાં અવલોકનોનો સરવાળો}}{\text{અવલોકનોની કુલ સંખ્યા}}$

$$= \left(\frac{\sum_{i=1}^{13} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{13} f_i} \right)$$

$$= \frac{1779}{30} = 59.3$$

આ પ્રક્રિયા નીચે બતાવેલા કોષ્ટકની રીતે દર્શાવી શકાય છે. તે કોષ્ટક 14.1 નું સુધારેલું સ્વરૂપ છે.

કોષ્ટક 14.12

ગુણ (x_i)	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા (f_i)	$f_i x_i$
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160
50	3	150
56	2	112
60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	95
	$\sum_{i=1}^{13} f_i = 30$	$\sum_{i=1}^{13} f_i x_i = 1779$

આમ અવર્ગીકૃત આવૃત્તિ-વિતરણમાં તમે મધ્યક શોધવા માટે નીચે આપેલા સૂત્રનો ઉપયોગ કરી શકો :

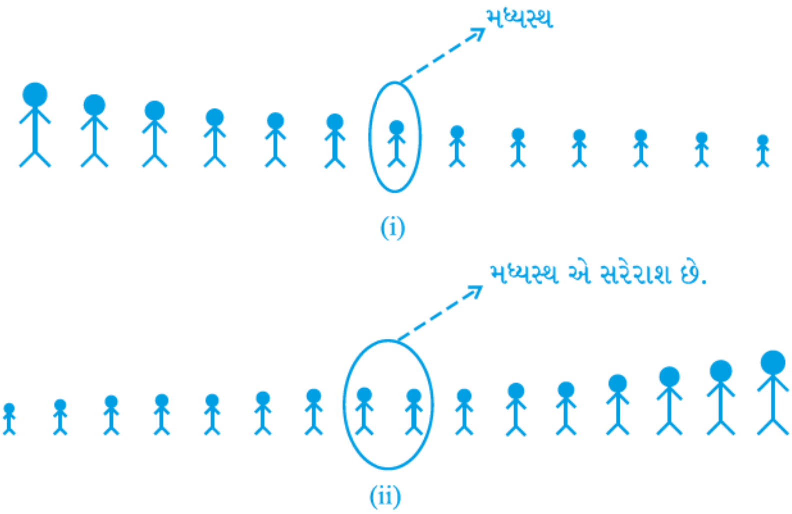
$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

ચાલો હવે આપણે હરિ અને મેરીની વચ્ચે થયેલી દલીલ પર પાછા ફરીએ અને બીજી સ્થિતિ પર વિચાર કરીએ. તેમાં હરિએ મધ્યનું મૂલ્ય વધુ મેળવી તેનો શ્રેષ્ઠ દેખાવ બતાવવાનો પ્રયત્ન કર્યો હતો. અગાઉ કહેવામાં આવ્યું છે કે મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનના આ માપને ***મધ્યસ્થ*** કહેવામાં આવે છે.

જે આપેલ અવલોકનોનું બરાબર બે સમાન ભાગોમાં વિભાજન કરે તેવા અવલોકનનું મૂલ્ય મધ્યસ્થ છે. તેથી જ્યારે માહિતીને ચઢતા કે ઊતરતાં ક્રમમાં લખવામાં આવે ત્યારે અવર્ગીકૃત માહિતીના મધ્યસ્થની ગણતરી નીચે પ્રમાણે કરી શકાય છે :

(i) જ્યારે અવલોકનોની સંખ્યા (n) અયુગ્મ હોય છે ત્યારે મધ્યસ્થ એ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$માં અવલોકનનું મૂલ્ય છે. ઉદાહરણ તરીકે, જો $n = 13$ હોય, તો મધ્યસ્થ મૂલ્ય $\left(\frac{13+1}{2}\right)$થાય એટલે કે, 7 મું અવલોકન મધ્યસ્થ થશે. [જુઓ આકૃતિ 14.9 (i).]

(ii) જ્યારે અવલોકનોની સંખ્યા (n) યુગ્મ હોય છે ત્યારે મધ્યસ્થ એ $\left(\frac{n}{2}\right)$ માં અને $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ માં અવલોકનોનાં મૂલ્યની સરેરાશ છે. ઉદાહરણ તરીકે, જો $n = 16$ હોય, તો મધ્યસ્થ $\left(\frac{16}{2}\right)$ માં અને $\left(\frac{16}{2}+1\right)$ માં અવલોકનોના મૂલ્યની સરેરાશ થાય છે. એટલે કે 8 માં અને 9 માં અવલોકનનાં મૂલ્યની સરેરાશ એ મધ્યસ્થ થશે.[જુઓ આકૃતિ 14.9 (ii).]



આકૃતિ 14.9

ચાલો હવે આપણે કેટલાંક ઉદાહરણની મદદથી તેને સમજીએ.

ઉદાહરણ 12 : એક વર્ગના 9 વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈ (સેમીમાં) આ પ્રમાણે છે :

155 160 145 149 150 147 152 144 148

આ માહિતીનો મધ્યસ્થ શોધો.

ઉકેલ : સૌપ્રથમ આપણે માહિતીને ચઢતા ક્રમમાં આ પ્રમાણે ગોઠવીએ :

144 145 147 148 149 150 152 155 160

વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા 9 છે એટલે કે અયુગ્મ સંખ્યા છે. તેથી ઊંચાઈનો મધ્યસ્થ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ મું અવલોકન

$= \left(\frac{9+1}{2}\right)$ મું અવલોકન

$= 5$ મું અવલોકન

$= 149$ સેમી

તેથી ઊંચાઈનો મધ્યસ્થ 149 સેમી છે.

ઉદાહરણ 13 : કબડ્ડીની એક ટીમ દ્વારા મૅચની શૃંખલામાં મળેલા અંક આ પ્રમાણે છે :

17, 2, 7, 27, 15, 5, 14, 8, 10, 24, 48, 10, 8, 7, 18, 28

આ ટીમ દ્વારા મેળવેલા અંકોનો મધ્યસ્થ શોધો.

ઉકેલ : ટીમ દ્વારા મેળવેલા અંકોને ચઢતાં ક્રમમાં ગોઠવવાથી આ પ્રમાણે મળશે :

2, 5, 7, 7, 8, 8, 10, 10, 14, 15, 17, 18, 24, 27, 28, 48

અહીં અવલોકનોની સંખ્યા 16 છે. તેથી બે મધ્યમ પદ છે. તે $\frac{16}{2}$ મું પદ અને $\left(\frac{16}{2}+1\right)$ મું પદ એટલે કે, 8 મું પદ અને 9 મું પદ છે.

હવે 8 માં પદ અને 9 માં પદની સરેરાશ જ મધ્યસ્થ થશે.

$$\text{મધ્યસ્થ} = \frac{10 + 14}{2} = 12$$

આમ કબડ્ડીની ટીમ દ્વારા મેળવેલા અંકોનો મધ્યસ્થ 12 થશે.

હવે ફરીથી હરિ અને મેરીની વચ્ચેના વણઉકલ્યા પ્રશ્ન પર પાછા જઈએ. સરાસરી મેળવવા હરિએ લીધેલું ત્રીજું મૂલ્ય ***બહુલક*** *(mode)* હતું.

મહત્તમ વખત પુનરાવર્તિત થતાં અવલોકનોનું મૂલ્ય એ બહુલક છે એટલે કે સૌથી વધુ આવૃત્તિ ધરાવતાં અવલોકનોને બહુલક કહે છે.

તૈયાર વસ્ત્રોના ઉદ્યોગ અને પગરખા ઉદ્યોગ આ મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનના માપનો ખૂબ જ ઉપયોગ કરે છે. બહુલક વિશેના જ્ઞાનની મદદથી ઉદ્યોગો નિર્ણય લઈ શકે છે કે કયાં માપનું ઉત્પાદન વધુ સંખ્યામાં કરવું જોઈએ.

તો ચાલો આપણે બહુલકને એક ઉદાહરણ દ્વારા સમજીએ.

ઉદાહરણ14 : 20 વિદ્યાર્થીઓએ 10 માંથી મેળવેલા ગુણ નીચે પ્રમાણે છે. તો બહુલક શોધો :

4, 6, 5, 9, 3, 2, 7, 7, 6, 5, 4, 9, 10, 10, 3, 4, 7, 6, 9, 9

ઉકેલ : આપણે માહિતીને નીચે પ્રમાણે ગોઠવીએ :

2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 9, 9, 9, 9, 10, 10

અહીં 9 સૌથી વધુ વખત એટલે કે 4 વખત પુનરાવર્તન પામે છે તેથી બહુલક 9 છે.

ઉદાહરણ 15 : એક કારખાનાનાં એક એકમમાં 1 સુપરવાઈઝર અને 4 મજૂરો એમ 5 વ્યક્તિ કામ કરે છે. દરેક મજૂરને માસિક પગાર ₹ 5000, સુપરવાઈઝરનો માસિક પગાર ₹ 15,000 મળે છે, તો કારખાનાના આ એકમના પગારનો મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલક શોધો.

ઉકેલ : $\text{મધ્યક} = \frac{5000 + 5000 + 5000 + 5000 + 15000}{5} = \frac{35000}{5} = 7000$

તેથી પગારનો મધ્યક ₹ 7000 પ્રતિમાસ થશે.

મધ્યસ્થ શોધવા માટે પગારને આપણ ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવતા :

5000, 5000, 5000, 5000, 15000

કારખાનાના એકમમાં કામ કરતા સભ્યો 5 છે,

$$\text{મધ્યસ્થ} = \left(\frac{5+1}{2}\right) \text{મું અવલોકન}$$

$$= \frac{6}{2} \text{ મું અવલોકન}$$

$$= 3 \text{ જું અવલોકન}$$

$$= ₹\ 5000 \text{ પ્રતિમાસ}$$

તેથી પગારનો મધ્યસ્થ ₹ 5000 પ્રતિમાસ થાય. પગારનો બહુલક શોધવા એટલે કે બહુલકીય પગાર શોધવા આપણે જોઈએ છીએ કે આપેલી માહિતી 5000, 5000, 5000, 5000, 15000 માં સૌથી વધુ વખત 5000 પુનરાવર્તન થાય છે. તેથી બહુલકીય પગાર ₹ 5000 પ્રતિમાસ છે.

હવે ઉપર્યુક્ત ઉદાહરણમાં માહિતીના શોધેલા મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનાં ત્રણ મૂલ્યોની તુલના કરો. તો તમે જોઈ શકો છો કે મધ્યક ₹ 7000 એ પગારનો કોઈ યોગ્ય અંદાજ દર્શાવતો નથી. જ્યારે મધ્યસ્થ અને બહુલક ₹ 5000 એ માહિતીનું વધુ અસરકારક રીતે નિરૂપણ કરે છે.

માહિતીના સૌથી મોટા તથા નાના અવલોકનની અસર મધ્યક પર ખૂબ જ પ્રબળ હોય છે. તેથી જો માહિતીમાં કેટલાંક અવલોકનો વચ્ચેનું અંતર વધારે હોય (જેમ કે 1,7,8,9,9) તો આ સ્થિતિમાં માહિતીનો મધ્યક તે સારી રજૂઆત નથી. જ્યારે સૌથી મોટા તથા નાના અવલોકનની મધ્યસ્થ અને બહુલક પર અસર થતી નથી. તેથી આ પરિસ્થિતિમાં તે માહિતીની મધ્યવર્તી સ્થિતીનો વધુ સારો અંદાજ આપી શકે છે.

ચાલો ફરીથી હરિ અને મેરીનાં ઉદાહરણો લઈએ અને મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનાં માપની તુલના કરીએ.

મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનાં માપ	હરિ	મેરી
મધ્યક	8.2	8.4
મધ્યસ્થ	10	8
બહુલક	10	8

આ સરખામણી દર્શાવે છે કે, મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનાં આ ત્રણ માપ દ્વારા કયો વિદ્યાર્થી વધુ સારો છે તે દર્શાવવા માટે પૂરતા નથી. તારણ કાઢવા માટે આપણે કેટલીક વધુ જાણકારી મેળવવી જરૂરી છે. તેનો અભ્યાસ તમે ઉપલા ધોરણમાં કરશો.

સ્વાધ્યાય 14.4

1. એક ટીમે એક શ્રેણીની 10 મૅચમાં કરેલા ગોલની સંખ્યા નીચે મુજબ છે :

2, 3, 4, 5, 0, 1, 3, 3, 4, 3

તો ગોલનો મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલક શોધો.

2. ગણિતની કસોટીમાં 15 વિદ્યાર્થીઓએ 100 માંથી મેળવેલા ગુણ નીચે પ્રમાણે નોંધાયેલા છે :

41, 39, 48, 52, 46, 62, 54, 40, 96, 52, 98, 40, 42, 52, 60

આ માહિતીનો મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલક શોધો.

3. નીચેનાં અવલોકનો ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવેલા છે. જો માહિતીનો મધ્યસ્થ 63 હોય, તો x નું મૂલ્ય શોધો.

$$29, \quad 32, \quad 48, \quad 50, \quad x, \quad x+2, \quad 72, \quad 78, \quad 84, \quad 95$$

4. માહિતી 14, 25, 14, 28, 18, 17, 18, 14, 23, 22, 14, 18 નો બહુલક શોધો.

5. નીચેના કોષ્ટકમાંથી એક ફેક્ટરીમાં કામ કરતા 60 કર્મીઓના પગારનો મધ્યક શોધો.

પગાર (₹ માં)	કર્મીઓની સંખ્યા
3000	16
4000	12
5000	10
6000	8
7000	6
8000	4
9000	3
10000	1
કુલ	**60**

6. નીચે આપેલી માહિતી આધારિત એક ઉદાહરણ આપો :

   (i) મધ્યક જ મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનું યોગ્ય માપ છે.

   (ii) મધ્યક એ મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનું યોગ્ય માપ નથી. પરંતુ મધ્યસ્થ જ એક યોગ્ય માપ છે.

14.6 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દા શીખ્યા :

1. જો કોઈ ચોક્કસ હેતુ માટે હકીકતો અથવા આંકડાઓ એકત્ર કરવામાં આવે તો તેને માહિતી કહે છે.

2. આંકડાશાસ્ત્ર એ માહિતીની રજૂઆત, વિશ્લેષણ અને તેના અર્થઘટન સાથે સંકળાયેલા અભ્યાસનું ક્ષેત્ર છે.

3. માહિતીની લંબાલેખ, સ્તંભાલેખ કે આવૃત્તિ બહુકોણના સ્વરૂપમાં આલેખાત્મક રજૂઆત કેવી રીતે થાય.

4. અવર્ગીકૃત માહિતી માટે મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનાં ત્રણ માપ છે :

   (i) મધ્યક : બધાં જ અવલોકનોની કિંમતના સરવાળાને અવલોકનોની કુલ સંખ્યા વડે ભાગતાં મળે તે સંખ્યાને $\bar{x}$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

અવર્ગીકૃત માહિતી માટે $$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}.$$

(ii) મધ્યસ્થ : તે બરાબર મધ્યમાં આવતાં અવલોકનનું મૂલ્ય છે.

જો n અયુગ્મ સંખ્યા હોય, તો મધ્યસ્થ = $\left(\frac{n+1}{2}\right)$માં અવલોકનનું મૂલ્ય.

જો n યુગ્મ સંખ્યા હોય તો મધ્યસ્થ = $\left(\frac{n}{2}\right)$ માં અને $\left(\frac{n}{2}+1\right)$માં અવલોકનોની કિંમતની સરેરાશ

(iii) બહુલક : સૌથી વધુ વખત પુનરાવર્તન પામતું અવલોકન માહિતીનો બહુલક છે.

પ્રકરણ 15

સંભાવના

It is remarkable that a science, which began with the consideration of games of chance, should be elevated to the rank of the most important subject of human knowledge.—***Pierre Simon Laplace***

15.1 પ્રાસ્તાવિક

આપણે રોજબરોજના જીવનમાં નીચેનાં જેવાં વાક્યોનો ઉપયોગ કરીએ છીએ :

(1) આજે વરસાદ આવવાની સંભાવના છે.

(2) તે પરીક્ષામાં પાસ થશે તેની મને શંકા છે.

(3) વાર્ષિક પરીક્ષામાં કવિતા પ્રથમ આવે તેવી પ્રબળ સંભાવના છે.

(4) ડીઝલના ભાવ વધે તેવી શક્યતા વધારે છે.

(5) આજની મૅચમાં ભારત ટૉસ જીતે તેવી શક્યતા 50-50 છે.

ઉપરનાં વાક્યોમાં ઉપયોગમાં લેવાયેલા શબ્દો સંભાવના, શંકા, શક્યતા વગેરે અચોક્કસતાનાં પરિમાણ દર્શાવે છે. ઉદાહરણ તરીકે (1) માં 'વરસાદ આવવાની સંભાવના' નો અર્થ આજે વરસાદ આવે પણ ખરો અને વરસાદ ન પણ આવે. આ વરસાદ આવવાનું પૂર્વાનુમાન એ આપણા ભૂતકાળના અનુભવોમાં આવી પરિસ્થિતિમાં વરસાદ પડ્યો હતો, તેને ધ્યાનમાં લઈને કરવામાં આવેલ છે. તેવાં જ અનુમાન (2) થી (5) માં દર્શાવેલા છે.

શક્યતાઓની અચોક્કસતાનું માપ ઘણીબધી સ્થિતિમાં માપી શકાય છે.

રમતના સિદ્ધાંતોમાંથી શરૂ થયેલું સંભાવનાશાસ્ત્ર, ભૌતિકવિજ્ઞાન, વિનયન, જીવવિજ્ઞાન, તબીબીવિજ્ઞાન, હવામાનની આગાહી કરનાર ખાતા વગેરે શાખાઓમાં વિસ્તરેલું છે અને દરેક શાખામાં ખૂબ જ ઉપયોગી છે.

15.2 સંભાવના - એક પ્રાયોગિક અભિગમ

અગાઉના ધોરણમાં આપણે સિક્કો ઉછાળવાની રમત, પાસો ફેંકવાની રમત વગેરેમાં શક્યતા(સંભાવના)ની કલ્પના તો કરી જ છે અને તેનાં પરિણામો જોયાં છે. હવે આપણે પ્રયોગમાં કોઈ ચોક્કસ પરિણામની શક્યતા કેટલી છે તે શીખીશું.

Blaise Pascal
(1623–1662)
આકૃતિ 15.1

The concept of probability was developed in a very strange manner. In 1654, a gambler Chevalier de Mere, approached the well-known 17th century French philosopher and mathematician Blaise Pascal regarding certain dice problems. Pascal became interested in these problems, studied them and discussed them with another French mathematician, Pierre de Fermat. Both Pascal and Fermat solved the problems independently. This work was the beginning of Probability Theory.

Pierre de Fermat
(1601–1665)
આકૃતિ 15.2

The first book on the subject was written by the Italian mathematician, J.Cardan (1501–1576). The title of the book was 'Book on Games of Chance' (Liber de Ludo Aleae), published in 1663. Notable contributions were also made by mathematicians J. Bernoulli (1654–1705), P. Laplace (1749–1827), A.A. Markov (1856–1922) and A.N. Kolmogorov (1903-1987).

પ્રવૃત્તિ 1 : (i) કોઈ એક સિક્કો લો. તેને દસ વખત ઉછાળો અને તેની ઉપર ***છાપ** (head)* અને ***કાંટો** (tail)* કેટલી વખત આવે છે તે નોંધો. નીચેના કોષ્ટકમાં અવલોકનો નોંધો :

કોષ્ટક 15.1

સિક્કો ઉછાળવાના કુલ પ્રયત્નો	સિક્કાની ઉપરની બાજુ છાપ (H) આવે તે પ્રયત્નોની સંખ્યા	સિક્કાની ઉપરની બાજુ કાંટો (T) આવે તે પ્રયત્નોની સંખ્યા
10	—	—

ઉપરનાં અવલોકનો પરથી નીચે આપેલ સૂત્ર પ્રમાણે ગણતરી કરો :

$$\frac{\text{સિક્કાની ઉપરની બાજુ છાપ આવે તે સંખ્યા}}{\text{સિક્કાને ઉછાળવાના કુલ પ્રયત્નોની સંખ્યા}}$$

અને
$$\frac{\text{સિક્કાની ઉપરની બાજુ કાંટો આવે તે સંખ્યા}}{\text{સિક્કાને ઉછાળવાના કુલ પ્રયત્નોની સંખ્યા}}$$

(ii) હવે સિક્કો વીસ વખત ઉછાળો અને ઉપરની રીતે જ અવલોકનોની નોંધ કરો અને ફરીથી ઉપરના અવલોકનોના સમૂહ માટે ગુણોત્તરની કિંમતો શોધો.

(iii) આ જ રીતે સિક્કાને વધુ વખત ઉછાળવાના પ્રયોગનું પુનરાવર્તન કરો. સિક્કાની ઉપરની બાજુ આવતી છાપ અને કાંટાની સંખ્યા નોંધો અને તેમના આનુષંગિક ગુણોત્તર શોધો.

તમે નોંધશો કે જેમ સિક્કો ઉછાળવાના પ્રયત્નો વધુ તેમ ગુણોત્તરની કિંમત 0.5 ની નજીક અને નજીક આવતી જશે. સિક્કાને વધુ વખત ઉછાળવાના પ્રયોગોની નોંધ કરતાં જાવ. નીચેની પ્રવૃત્તિ પણ જૂથમાં કરી શકાય તેવી છે.

પ્રવૃત્તિ 2 : વર્ગમાં 2 અથવા 3 વિદ્યાર્થીઓના જૂથ પાડો. દરેક જૂથમાં એક વિદ્યાર્થી 15 વખત સિક્કો ઉછાળે છે. જૂથના બીજા વિદ્યાર્થી સિક્કા પર છાપ કે કાંટો આવે તે અવલોકનો નોંધશે. [યાદ રાખો કે દરેક જૂથમાં સિક્કો સમતોલ હોવો જોઈએ. દરેક જૂથમાં એક જ સિક્કો ઉછાળવામાં આવે છે તેમ માનો.]

હવે પાટિયા પર કોષ્ટક 15.2 તૈયાર કરો. પહેલું જૂથ-1 તેમનાં અવલોકનો લખશે અને ગુણોત્તરની કિંમત શોધી કાઢશે. પછી જૂથ-2 તેમનાં અવલોકનો લખશે. તેઓ જૂથ-1 અને જૂથ-2 નો સંયુક્ત ગુણોત્તર શોધશે. આ જ રીતે પુનરાવર્તન થતું રહેશે. [આપણે આ ગુણોત્તરને ***સંચયી*** ગુણોત્તર *(cumulative fractions)* કહીશું.] આપણે નોંધીએ કે પ્રથમ ત્રણ હાર એ આ જૂથે આપેલ અવલોકનોના આધારે છે.

કોષ્ટક 15.2

જૂથ (1)	છાપની સંખ્યા (2)	કાંટાની સંખ્યા (3)	$\dfrac{\text{છાપની સંચયી સંખ્યા}}{\text{સિક્કો ઉછાળવાની કુલ સંખ્યા}}$ (4)	$\dfrac{\text{કાંટાની સંચયી સંખ્યા}}{\text{સિક્કો ઉછાળવાની કુલ સંખ્યા}}$ (5)
1	3	12	$\frac{3}{15}$	$\frac{12}{15}$
2	7	8	$\frac{7+3}{15+15}=\frac{10}{30}$	$\frac{8+12}{15+15}=\frac{20}{30}$
3	7	8	$\frac{7+10}{15+30}=\frac{17}{45}$	$\frac{8+20}{15+30}=\frac{28}{45}$
4	⋮	⋮	⋮	⋮

આ કોષ્ટકમાં આપણે શું જોયું ? આપણે શોધી કાઢ્યું કે જેમજેમ સિક્કો ઉછાળવાના પ્રયત્નોની સંખ્યા વધે છે તેમ તેમ સ્તંભ (4) અને સ્તંભ (5) માં આવેલ ગુણોત્તર 0.5 ની નજીક અને વધુ નજીક આવે છે.

પ્રવૃત્તિ 3 : (i) એક પાસો 20 વખત ફેંકો અને અંક 1, 2, 3, 4, 5, 6 કેટલી વખત ઉપર દેખાય છે તે નોંધો. આ અવલોકનો કોષ્ટક 15.3 માં દર્શાવો :

કોષ્ટક 15.3

પાસો ફેંકવાની સંખ્યા	પાસા પર મળતા અંકોની સંખ્યા					
	1	2	3	4	5	6
20						

નીચેના ગુણોત્તરની કિંમત શોધો :

* એક સમતોલ પાસાને છ બાજુઓ હોય અને દરેક બાજુ પર 1 થી 6 અંક લખેલા હોય. એક બાજુ પર એક જ અંક હોય. કેટલાંક પાસામાં નંબરના બદલે ટપકાં કરેલાં હોય છે.

$$\frac{\text{પાસા પર અંક 1 આવવાની સંખ્યા}}{\text{પાસો ફેંકવાના પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા}}$$

$$\frac{\text{પાસા પર અંક 2 આવવાની સંખ્યા}}{\text{પાસો ફેંકવાના પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\text{પાસા પર અંક 6 આવવાની સંખ્યા}}{\text{પાસો ફેંકવાના પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા}}$$

(ii) હવે સમતોલ પાસો 40 વખત ફેંકો અને અવલોકન નોંધો અને ઉપર પ્રમાણે ગુણોત્તર શોધો.

ઉપરની પ્રવૃત્તિમાં જેમ પાસો ફેંકવાની સંખ્યા વધશે તેમ આપણે દરેક ગુણોત્તરની કિંમત શોધીશું, તો તે $\frac{1}{6}$ ની નજીક અને નજીક આવતી જશે.

આ ચકાસવા માટે આપણે વર્ગમાં એક પ્રવૃત્તિ-2 જેવી જૂથ-પ્રવૃત્તિ કરીશું. વર્ગના વિદ્યાર્થીઓને નાનાં નાનાં જૂથમાં વહેંચો. દરેક જૂથમાં એક વિદ્યાર્થી 10 વખત પાસો ઉછાળશે. અવલોકનો નોંધશે અને સંચયી ગુણોત્તરની ગણતરી થશે.

આપણે અંક 1 માટે ગુણોત્તરની કિંમત કોષ્ટક 15.4 માં નોંધીશું. આ કોષ્ટક બીજા પૂર્ણાંકો માટે પણ વિસ્તારી શકાય અથવા બીજા અંકો માટે આ જ પ્રકારના કોષ્ટક બનાવી શકાય.

કોષ્ટક 15.4

જૂથ (1)	પાસો ફેંકવાના પ્રયત્નોની સંખ્યા (2)	$\frac{\text{પાસા પર 1 આવે તે સંચયી સંખ્યા}}{\text{પાસા ફેંકવાના પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા}}$ (3)
1	—	—
2	—	—
3	—	—
4	—	—

દરેક જૂથમાં ઉપયોગમાં લેવાતો પાસો એ સમાન કદ અને દેખાવનો હોય તે જરૂરી છે. તેથી આપણે કહી શકીએ કે દરેક જૂથમાં ફેંકાયેલો પાસો એ એકનો એક જ છે.

આ કોષ્ટકમાં આપણે શું જોયું ?

જેમ પાસો ફેંકવાની સંખ્યા વધુ ને વધુ, તેમ સ્તંભ (3) માંનો ગુણોત્તર $\frac{1}{6}$ ની નજીક અને નજીક જશે.

પ્રવૃત્તિ 4 : (i) બે સિક્કાઓ એક સાથે દસ વખત ઉછાળો અને નીચે આપેલ કોષ્ટકના સ્વરૂપમાં અવલોકનોની નોંધ કરો :

કોષ્ટક 15.5

બે સિક્કાઓ ઉછાળવાની સંખ્યા	સિક્કા પર છાપ ન આવવાની સંખ્યા	સિક્કા પર એક છાપ આવવાની સંખ્યા	સિક્કા પર બે છાપ આવવાની સંખ્યા
10	—	—	—

નીચેના ગુણોત્તરો લખો :

$$A = \frac{\text{સિક્કા પર છાપ ન આવવાની સંખ્યા}}{\text{બે સિક્કા ઉછાળવાના પ્રયત્નોની સંખ્યા}}$$

$$B = \frac{\text{સિક્કા પર એક છાપ આવવાની સંખ્યા}}{\text{બે સિક્કા ઉછાળવાના પ્રયત્નોની સંખ્યા}}$$

$$C = \frac{\text{સિક્કા પર બે છાપ આવવાની સંખ્યા}}{\text{બે સિક્કા ઉછાળવાના પ્રયત્નોની સંખ્યા}}$$

આ ગુણોત્તરની કિંમતો શોધો.

જો સિક્કા ઉછાળવાની સંખ્યા (પ્રવૃત્તિ 2 પ્રમાણે) તમે વધારતાં જશો તો, જેમ સિક્કો ઉછાળવાની સંખ્યા વધે છે તેમ તમે A, B અને C ની કિંમતો અનુક્રમે 0.25, 0.5, 0.25 ની વધુ ને વધુ નજીક જતાં જશો.

પ્રવૃત્તિ 1 માં, સિક્કાને ઉછાળવાના દરેક પ્રયોગને ***પ્રયત્ન** (trial)* કહે છે. તે જ પ્રમાણે પ્રવૃત્તિ 3 માં પાસા ઉછાળવાના દરેક પ્રયોગને પ્રયત્ન કહે છે અને પ્રવૃત્તિ 4 માં બે સિક્કાને ઉછાળવા તે પણ પ્રયત્ન છે.

આમ, જેમાં એક કે તેથી વધુ પરિણામ મળી શકે એવી દરેક ક્રિયા પ્રયત્ન છે. તેવી પ્રવૃત્તિ 1 માં શક્ય પરિણામો છાપ અને કાંટો હતા, જ્યારે પ્રવૃત્તિ 3 માં શક્ય પરિણામો 1, 2, 3, 4, 5 અને 6 હતાં.

પ્રવૃત્તિ 1 માં સિક્કાને ઉછાળતાં છાપ આવવી એ ઘટનામાં છાપ એ પરિણામ છે. તે જ પ્રમાણે કાંટો મેળવવાની ઘટનામાં કાંટો એ પરિણામ છે. પ્રવૃત્તિ 2 માં કોઈ એક ચોક્કસ અંક મેળવવો જેમકે 1. તે ઘટનામાં અંક 1 એ પરિણામ છે.

આપણા પ્રયોગમાં યુગ્મ સંખ્યા મેળવવાની ઘટનામાં પાસાને ઉછાળતાં મળતાં પરિણામો 2, 4 અને 6 છે.

તેથી પ્રયોગ માટેની ***ઘટના*** *(event)* એ પ્રયોગનાં કેટલાંક પરિણામોનું એકત્રીકરણ છે. ધોરણ 10 માં તમે ઘટનાની વધુ સારી વિસ્તૃત વ્યાખ્યા સમજશો.

હવે તમે પ્રવૃત્તિ 4 માં ઘટના કઈ છે તે કહી શકશો ?

ઉપરની આ પૂર્વ ભૂમિકા સાથે આપણે જોઈએ કે સંભાવના શું છે ? અહીં આપણે પ્રયત્નોનાં પરિણામ સીધા જોઈ શકીએ છીએ.

આપણે *પ્રાયોગિક અથવા આનુભાવિક* સંભાવના શોધીશું.

ધારો કે કુલ પ્રયત્નો n છે. ઘટના E ઉદ્ભવે તેની પ્રાયોગિક સંભાવના P(E) વડે દર્શાવાય છે અને તે આ મુજબ છે :

$$P(E) = \frac{\text{ઘટના ઉદ્ભવે તે ઘટના માટેના પ્રયત્નોની સંખ્યા}}{\text{પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા}}$$

આ પ્રકરણમાં આપણે પ્રાયોગિક સંભાવનાને બદલે સરળતા ખાતર ફક્ત ***સંભાવના*** *(probability)* જ લખીશું.

આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ચાલો પ્રવૃત્તિ 2 માં પાછા જઈને શરૂઆત કરીએ. કોષ્ટક 15.2 ના ચોથા સ્તંભમાં તમે ગણતરી દ્વારા કયો અપૂર્ણાંક શોધ્યો ? એ બીજુ કાંઈ નહિ પણ છાપ મેળવવાની પ્રાયોગિક સંભાવના છે. નોંધી રાખો કે પ્રયોગમાં કરવામાં આવતા કુલ પ્રયત્નો અને છાપ આવે તે પરિણામો પર સંભાવનાનું મૂલ્ય બદલાતું રહે છે. તે જ પ્રમાણે કાંટો મેળવવાની સંભાવનામાં કોષ્ટક 15.2 ના સ્તંભ (5) માં $\frac{12}{15}$ થી શરૂ થાય અને તે $\frac{2}{3}$, પછી $\frac{28}{45}$, અને આ રીતે આગળ વધશે.

આમ, પ્રાયોગિક સંભાવના એ તમે કરેલા પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા અને તમને તેના તે પ્રયત્નોમાં જે પરિણામ જોઈએ તેની સંખ્યા પર આધારિત છે.

પ્રવૃત્તિ 5 : આગળ વધતાં પહેલાં પ્રવૃત્તિ 3 કરતી વખતે તમે જે કોષ્ટક બનાવ્યું હતું તેની સામે નજર કરો. કેટલીક ચોક્કસ વખત પાસાને ઉછાળતાં પાસા પર અંક 3 મેળવવાની સંભાવના શોધો. જેમ તમે પ્રયત્નોની સંખ્યા વધારો છો તેમ તે સંભાવના કઈ રીતે બદલાય છે તે પણ જુઓ.

આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 1 : એક સિક્કાને 1000 વખત ઉછાળતાં નીચેની આવૃત્તિઓ મળે છે :

છાપ : 455, કાંટો : 545

દરેક ઘટના માટે સંભાવનાની ગણતરી કરો.

ઉકેલ : અહીં સિક્કો 1000 વખત ઉછાળવામાં આવે છે માટે પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા 1000 થાય. સિક્કા પર છાપ મળે અને સિક્કા પર કાંટો મળે તે ઘટનાઓને અનુક્રમે E અને F કહીશું. ઘટના E ઉદ્ભવવાની સંખ્યા એટલે કે સિક્કા પર છાપ આવવાની સંખ્યા 455 છે.

$$\therefore \text{ E ની સંભાવના } = \frac{\text{સિક્કા પર છાપ આવવાની સંખ્યા}}{\text{પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા}}$$

$$\therefore \ P(E) = \frac{455}{1000} = 0.455$$

એ જ રીતે, સિક્કા પર કાંટો આવે તે ઘટનાની સંભાવના $= \dfrac{\text{સિક્કા પર કાંટો આવવાની સંખ્યા}}{\text{પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા}}$

$$\therefore \ P(F) = \frac{545}{1000} = 0.545$$

નોંધીએ કે ઉપરના દાખલામાં $P(E) + P(F) = 0.455 + 0.545 = 1$, અહીં દરેક પ્રયત્નનાં શક્ય પરિણામો E અને F જ છે.

ઉદાહરણ 2 : બે સિક્કાઓ 500 વખત ઉછાળવામાં આવે છે અને આપણને

બે વાર છાપ : 105 વખત મળે છે.

એક વાર છાપ : 275 વખત મળે છે.

એક પણ વાર છાપ ન મળે : 120 વખત બને છે.

આ દરેક ઘટનાની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : આપણે બે વખત છાપ મળે, એક વખત છાપ મળે અને એક પણ વખત છાપ ન મળે તે ઘટનાઓને અનુક્રમે E_1, E_2 અને E_3 વડે દર્શાવીએ. આમ,

$$P(E_1) = \frac{105}{500} = 0.21$$

$$P(E_2) = \frac{275}{500} = 0.55$$

$$P(E_3) = \frac{120}{500} = 0.24$$

અહીં નોંધીએ કે $P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = 1$.

વળી, પ્રયત્નનાં શક્ય પરિણામો E_1, E_2 અને E_3 જ છે.

ઉદાહરણ 3 : એક પાસો 1000 વખત ફેંકવામાં આવે છે. પાસા પર 1, 2, 3, 4, 5 અને 6 ની આવૃત્તિઓ કોષ્ટક 15.6 માં દર્શાવેલ છે :

કોષ્ટક 15.6

પરિણામ	1	2	3	4	5	6
આવૃત્તિ	179	150	157	149	175	190

દરેક પરિણામ આવવાની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે E_i એ પરિણામ i આવવાની ઘટના છે, જ્યાં $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

$$\text{પરિણામ } i \text{ મેળવવાની સંભાવના} = P(E_i) = \frac{i \text{ ની આવૃત્તિ}}{\text{પાસો ફેંકવાની કુલ સંખ્યા}}$$

$$\therefore P(E_1) = \frac{179}{1000} = 0.179$$

તે જ રીતે $P(E_2) = \frac{150}{1000} = 0.15$, $P(E_3) = \frac{157}{1000} = 0.157$,

$P(E_4) = \frac{149}{1000} = 0.149$, $P(E_5) = \frac{175}{1000} = 0.175$

અને $P(E_6) = \frac{190}{1000} = 0.19$.

નોંધીએ કે $P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) + P(E_5) + P(E_6) = 1$

એ પણ નોંધો કે :

(i) પ્રત્યેક ઘટનાની સંભાવના 0 અને 1 ની વચ્ચે આવેલી હોય છે.

(ii) બધી જ સંભાવનાઓનો સરવાળો 1 થાય છે.

(iii) ફક્ત $E_1, E_2, \ldots, E_6$ એ પ્રયત્નનાં શક્ય તેટલાં પરિણામ છે.

ઉદાહરણ 4 : ટેલિફોન ડિરેક્ટરીના એક પાના પર 200 ટેલિફોન નંબર હતા. તે નંબરમાં એકમના સ્થાનના અંકના આવૃત્તિ-વિતરણ (દાખલા તરીકે ટેલિફોન નંબર 25828573 નો એકમનો અંક 3 છે) માટેનું કોષ્ટક 15.7 આપેલ છે.

કોષ્ટક 15.7

એકમનો અંક	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
આવૃત્તિ	22	26	22	22	20	10	14	28	16	20

પાના પર જોયા સિવાય, કોઈ એક નંબર પસંદ કરવામાં આવે છે. એકમના સ્થાન પરનો અંક 6 હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ :

$$\text{એકમના સ્થાને અંક 6 હોય તે ઘટનાની સંભાવના} = \frac{\text{6 આવવાની આવૃત્તિ}}{\text{પસંદ કરેલ કુલ ટેલિફોન નંબરની સંખ્યા}}$$

$$= \frac{14}{200} = 0.07$$

તેવી જ રીતે તમે એકમના સ્થાને બીજા અંકો આવે તેની પ્રાયોગિક સંભાવના શોધી શકો.

ઉદાહરણ 5 : હવામાન ખાતાની કચેરી બતાવે છે કે છેલ્લા સળંગ 250 દિવસના તેમના હવામાનની આગાહી પૈકી 175 દિવસ તે સાચી પડી.

(i) તો આપેલ કોઈ એક દિવસે હવામાનની આગાહી સાચી પડી હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

(ii) આપેલ કોઈ એક દિવસે હવામાનની આગાહી સાચી ન પડી હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : હવામાનની આગાહી કરી હોય તે માટેના દિવસોની સંખ્યા = 250

(i) P(હવામાનની આગાહી સાચી પડી હોય તે દિવસોની સંખ્યા)

$$= \frac{\text{હવામાનની આગાહી સાચી પડી હોય તેવા દિવસોની કુલ સંખ્યા}}{\text{હવામાનની આગાહી કરેલ કુલ દિવસોની સંખ્યા}}$$

$$= \frac{175}{250} = 0.7$$

(ii) હવામાનની આગાહી સાચી પડી ન હોય તે દિવસોની સંખ્યા = 250 – 175 = 75

તેથી, P(હવામાનની આગાહી સાચી પડી ન હોય તે દિવસ) = $\frac{75}{250}$ = 0.3

નોંધો કે :

P(આગાહી સાચી પડી હોય) + P(આગાહી સાચી ન પડી હોય) = 0.7 + 0.3 = 1

ઉદાહરણ 6 : ટાયર બનાવતી એક કંપનીએ પોતાનું ટાયર બદલાવવાનું થાય તે પહેલાં કેટલું અંતર કાપે છે તેની નોંધ કરી છે. નીચેનું કોષ્ટક 1000 ટાયર વિશે પરિણામ દર્શાવે છે.

કોષ્ટક 15.8

અંતર (કિમીમાં) કરતાં ઓછું	4000 થી ઓછું	4000 થી 9000	9001 થી 14000	14000 થી વધુ
આવૃત્તિ	20	210	325	445

જો તમે આ કંપનીનું ટાયર ખરીદો તો :

(i) 4000 કિમી અંતર કાપતા પહેલાં ટાયર બદલવાની જરૂર પડી હોય તેની સંભાવના શોધો.

(ii) ટાયરે 9000 કિમીથી વધુ અંતર કાપ્યું હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

(iii) ટાયર બદલવાની જરૂર 4000 કિમી અને 14,000 કિમી અંતર કાપ્યાની વચ્ચે પડી હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : (i) પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા = 1000.

4000 કિમી અંતર કાપતાં પહેલાં ટાયર બદલવું પડે તેવા પ્રયત્નોની સંખ્યા = 20.

તેથી, P(4000 કિમી અંતર કાપ્યા પહેલાં ટાયર બદલવું પડે) = $\frac{20}{1000}$ = 0.02

(ii) 9000 કિમી અંતર કાપ્યા પછી ટાયર બદલવું પડે તેની આવૃત્તિ = 325 + 445 = 770

આથી, P(9000 કિમીથી વધુ અંતર ટાયરે કાપ્યું હોય) = $\frac{770}{1000}$ = 0.77

(iii) કાપેલ અંતર 4000 કિમી અને 14,000 કિમીની વચ્ચે હોય ત્યારે ટાયર બદલવું પડે તેની આવૃત્તિ = 210 + 325 = 535.

તેથી, P(4000 કિમીથી 14,000 કિમીની વચ્ચે ટાયર બદલવું પડે) = $\frac{535}{1000}$ = 0.535

ઉદાહરણ 7 : માસિક એકમ કસોટીમાં વિદ્યાર્થીએ મેળવેલ ગુણ ટકામાં નીચે મુજબ છે :

કોષ્ટક 15.9

એકમ કસોટી	I	II	III	IV	V
મેળવેલ ગુણ ટકામાં	69	71	73	68	74

આ માહિતી પરથી વિદ્યાર્થીએ એકમ કસોટીમાં 70 ટકાથી વધુ ટકા મેળવ્યા હોય તેની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : અહીં વિદ્યાર્થીએ આપેલી એકમ કસોટીની કુલ સંખ્યા = 5

વિદ્યાર્થીએ 70 ટકાથી વધુ ટકા એકમ કસોટીમાં મેળવ્યા હોય તે કસોટીની સંખ્યા = 3.

તેથી, P(70 ટકાથી વધુ ગુણ મેળવ્યા હોય) = $\frac{3}{5}$ = 0.6

ઉદાહરણ 8 : કોઈ એક શહેરમાં કોઈ વીમા કંપનીએ યાદચ્છિક રીતે 2000 ડ્રાઈવરની પસંદગી કરી. તેમની ઉંમર અને તેમણે કરેલ અકસ્માત વચ્ચેનો સંબંધ શોધ્યો. તે માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે :

કોષ્ટક 15.10

ડ્રાઈવરની ઉંમર (વર્ષમાં)	એક વર્ષમાં કરેલ અકસ્માત				
	0	**1**	**2**	**3**	**3 થી વધુ**
18 - 29	440	160	110	61	35
30 - 50	505	125	60	22	18
50 થી વધુ	360	45	35	15	9

શહેરમાં યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ કોઈ એક ડ્રાઈવર માટે નીચેની ઘટનાઓની સંભાવના શોધો :

(i) ઉંમર 18-29 વર્ષ હોય અને 1 વર્ષમાં બરાબર 3 અકસ્માત કર્યા હોય.

(ii) ઉંમર 30-50 વર્ષ હોય અને 1 વર્ષમાં 1 કે તેથી વધુ અકસ્માત કર્યા હોય.

(iii) 1 વર્ષમાં એક પણ અકસ્માત ન કર્યા હોય.

ઉકેલ : ડ્રાઈવરની કુલ સંખ્યા = 2000.

(i) ઉંમર 18-29 વર્ષ હોય અને 1 વર્ષમાં બરાબર 3 અકસ્માત કર્યા હોય તેવા ડ્રાઈવરોની સંખ્યા = 61.

તેથી, P (18-29 વર્ષની ઉંમર હોય અને 3 અકસ્માત કર્યા હોય તેવા ડ્રાઈવર) = $\frac{61}{2000}$

$= 0.0305 \approx 0.031$

(ii) ડ્રાઈવરની ઉંમર 30-50 વર્ષ હોય અને 1 વર્ષમાં 1 કે તેથી વધુ અકસ્માત કર્યા હોય તેવા ડ્રાઈવરોની સંખ્યા

$= 125 + 60 + 22 + 18 = 225$

માટે, P(30-50 વર્ષની ઉંમર અને 1 કે તેથી વધુ અકસ્માત કર્યા હોય તેવા ડ્રાઈવર)

$= \frac{225}{2000} = 0.1125 \approx 0.113$

(iii) 1 વર્ષમાં એક પણ અકસ્માત ન કર્યા હોય તેવા ડ્રાઈવરોની સંખ્યા $= 440 + 505 + 360$

$= 1305$

તેથી, P(અકસ્માત ન કર્યા હોય તેવા ડ્રાઈવર) = $\frac{1305}{2000}$ = 0.653

ઉદાહરણ 9 : (કોષ્ટક 14.3, ઉદાહરણ 4, પ્રકરણ 14), આવૃત્તિ-વિતરણનું કોષ્ટક ધ્યાનમાં લો. તે 38 વિદ્યાર્થીઓનું વજન દર્શાવે છે.

(i) વિદ્યાર્થીનું વજન વર્ગ 46-50 કિગ્રામાં હોય તેની સંભાવના શોધો.

(ii) આ માહિતીના સંદર્ભમાં એવી બે ઘટનાઓ દર્શાવો કે એકમાં સંભાવના 0 આવે અને બીજી ઘટનામાં સંભાવના 1 આવે.

ઉકેલ : (i) વિદ્યાર્થીઓની કુલ સંખ્યા = 38 અને વિદ્યાર્થીનું વજન વર્ગ 46 - 50 કિગ્રામાં હોય તેવા વિદ્યાર્થીની સંખ્યા = 3.

તેથી, P(46 - 50 કિગ્રામાં વજન ધરાવતા વિદ્યાર્થીઓ) = $\frac{3}{38} = 0.079$

(ii) દાખલા તરીકે એવી ઘટના લો જેમાં વિદ્યાર્થીનું વજન 30 કિગ્રા હોય. આપણા ઉદાહરણમાં કોઈ પણ વિદ્યાર્થીનું વજન 30 કિગ્રા નથી. તેથી આ ઘટનાની સંભાવના 0 છે. તે જ પ્રમાણે વિદ્યાર્થીનું વજન 30 કિગ્રાથી વધુ હોય તેની સંભાવના = $\frac{38}{38} = 1$.

ઉદાહરણ 10 : બિયારણની 5 થેલી પૈકી દરેકમાંથી 50 બીજ પસંદ કરવામાં આવ્યા અને તેને અંકુરણ માટે ઉચિત પરિસ્થિતિમાં મૂકવામાં આવ્યા. 20 દિવસ પછી દરેકમાંથી અંકુરિત થયેલાં બીજની ગણતરી કરવામાં આવી અને તે નીચે પ્રમાણે છે :

કોષ્ટક 15.11

થેલી	1	2	3	4	5
અંકુરિત થયેલ બીજની સંખ્યા	40	48	42	39	41

નીચેનામાંથી બીજની અંકુરિત થવાની સંભાવના શોધો :

(i) થેલીમાંનાં 40 થી વધુ બીજ

(ii) થેલીમાંનાં 49 બીજ

(iii) થેલીમાંનાં 35 થી વધુ બીજ

ઉકેલ : થેલીની કુલ સંખ્યા = 5.

(i) 50 માંથી 40 થી વધુ બીજ અંકુરિત થયાં હોય તેવી થેલીની સંખ્યા = 3.

P(થેલીમાં 40 થી વધુ બીજ અંકુરિત થયાં હોય) = $\frac{3}{5} = 0.6$

(ii) 49 બીજ અંકુરિત થયાં હોય તેવી થેલીની સંખ્યા = 0.

P(થેલીમાં 49 બીજ અંકુરિત થયાં હોય) = $\frac{0}{5} = 0$.

(iii) થેલીમાં 35 થી વધુ બીજ અંકુરિત થયાં હોય તેવી થેલીની સંખ્યા = 5.

તેથી, જરૂરી સંભાવના = $\frac{5}{5} = 1$.

નોંધ : ઉપરનાં બધાં જ ઉદાહરણોમાં તમે નોંધ્યું હશે કે સંભાવનાનું મૂલ્ય હંમેશાં 0 થી 1 વચ્ચેનો અપૂર્ણાંક હોય છે. (0 અને 1 સહિત)

સ્વાધ્યાય 15.1

1. ક્રિકેટમાં, એક સ્ત્રી ખેલાડીએ 30 બૉલમાંથી 6 વાર દડાને ક્ષેત્રરેખા(boundary)ની બહાર મોકલ્યો. તેણે દડાને ક્ષેત્રરેખાની બહાર ન મોકલ્યો હોય તેની સંભાવના શોધો.

2. બે બાળકો ધરાવતાં 1500 કુટુંબો યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવ્યા અને નીચેની માહિતી પ્રાપ્ત થઈ :

કુટુંબમાં છોકરીઓની સંખ્યા	2	1	0
કુટુંબની સંખ્યા	475	814	211

યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ કુટુંબમાં

(i) 2 છોકરીઓ હોય. (ii) 1 છોકરી હોય. (iii) એક પણ છોકરી ન હોય.

તેની સંભાવનાની ગણતરી કરો.

આ બધી સંભાવનાઓનો સરવાળો 1 થાય છે તે પણ ચકાસો.

3. ઉદાહરણ 5, વિભાગ 14.4, પ્રકરણ 14 નો વિચાર કરો. વર્ગનો વિદ્યાર્થી ઑગષ્ટ માસમાં જન્મ્યો હોય તેની સંભાવના શોધો.

4. ત્રણ સિક્કાઓને એક સાથે 200 વખત ઉછાળતાં મળતાં પરિણામોની આવૃત્તિઓ નીચે પ્રમાણે છે :

પરિણામ	**3 છાપ**	**2 છાપ**	**1 છાપ**	**છાપ ન આવે**
આવૃત્તિ	23	72	77	28

જો ત્રણ સિક્કાને એક સાથે ઉછાળતાં બે વાર છાપ આવે તેની સંભાવનાની ગણતરી કરો.

5. કોઈ એક સંસ્થાએ યાદચ્છિક રીતે 2400 કુટુંબોને પસંદ કર્યાં અને તેમની આવક તેમજ તેમની પાસેનાં વાહનોની સંખ્યા જાણવા માટેનું સર્વેક્ષણ કર્યું. તેમાંથી પ્રાપ્ત માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે :

માસિક આવક	**કુટુંબ દીઠ વાહન**			
(₹ માં)	**0**	**1**	**2**	**2 થી વધુ**
7000 થી ઓછી	10	160	25	0
7000 – 10000	0	305	27	2
10000 – 13000	1	535	29	1
13000 – 16000	2	469	59	25
16000 થી વધુ	1	579	82	88

ધારો કે એક કુટુંબ પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ કરેલ કુટુંબ માટે નીચે આપેલી માહિતી પરથી સંભાવના શોધો :

(i) માસિક આવક ₹ 10000 – 13000 હોય અને તેમની પાસે ફક્ત 2 વાહન હોય.

(ii) માસિક આવક ₹ 16000 થી વધુ હોય અને તેમની પાસે ફક્ત 1 જ વાહન હોય.

(iii) માસિક આવક ₹ 7000 થી ઓછી હોય અને તેમની પાસે એક પણ વાહન ન હોય.

(iv) માસિક આવક ₹ 13000 – 16000 હોય અને તેમની પાસે 2 થી વધુ વાહન હોય.

(v) એક કરતાં વધુ વાહન ન હોય.

6. કોષ્ટક 14.7, પ્રકરણ 14 ધ્યાનમાં લો.

(i) કોઈ વિદ્યાર્થીએ ગણિતની કસોટીમાં 20 ટકાથી ઓછા ગુણ મેળવ્યા હોય તેની સંભાવના શોધો.

(ii) કોઈ વિદ્યાર્થીએ 60 કે તેથી વધુ ગુણ મેળવ્યા હોય તેની સંભાવના શોધો.

7. આંકડાશાસ્ત્ર વિષય પ્રત્યેનો વિદ્યાર્થીઓનો અભિગમ જાણવા માટે 200 વિદ્યાર્થીઓનું સર્વેક્ષણ કરવામાં આવ્યું. તેની માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલી છે :

અભિગમ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
ગમે	135
ન ગમે	65

યાદચ્છિક રીતે કોઈ એક વિદ્યાર્થીને પસંદ કરતાં મળતી નીચેની ઘટનાની સંભાવના શોધો.

(i) આંકડાશાસ્ત્ર ગમે (ii) આંકડાશાસ્ત્ર ન ગમે

8. સ્વાધ્યાય 14.2 પ્રશ્ન નં. 2 નો વિચાર કરો. કોઈએ એક સ્ત્રી ઈજનેરને યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરતાં મળતી નીચેની ઘટનાની સંભાવના શોધો.

(i) તેના કાર્યક્ષેત્રથી 7 કિમીથી ઓછા અંતરે રહેતા હોય.

(ii) તેના કાર્યક્ષેત્રથી 7 કિમીથી વધુ અંતરે રહેતા હોય.

(iii) તેના કાર્યક્ષેત્રથી $\frac{1}{2}$ કિમીથી ઓછા અંતરે રહેતા હોય.

9. **પ્રવૃત્તિ :** તમારી શાળાના દરવાજા આગળ ઊભા રહો અને ચોક્કસ સમય-મર્યાદામાં દ્વિચક્રી વાહનો, ત્રિચક્રી વાહનો અને ચાર પૈડાવાળાં કેટલાં વાહનો પસાર થાય છે તેની આવૃત્તિ નોંધો. કુલ વાહનની સંખ્યામાંથી પસાર થતું વાહન દ્વિચક્રી વાહન હોય તેની સંભાવના શોધો.

10. **પ્રવૃત્તિ :** તમારા વર્ગમાં રહેલા વિદ્યાર્થીઓને 3 અંકવાળી એક સંખ્યા લખવાનું કહો. યાદચ્છિક રીતે કોઈ એક વિદ્યાર્થી પસંદ કરો. પસંદ કરેલ વિદ્યાર્થી દ્વારા લખાયેલ સંખ્યા એ 3 થી વિભાજ્ય હોય તેની સંભાવના શોધો. યાદ રાખો કે જો આપેલી સંખ્યાના અંકોનો સરવાળાને 3 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય તો આપેલ સંખ્યા એ 3 વડે વિભાજ્ય છે.

11. ઘઉંના લોટની થેલી પર 5 કિગ્રા વજન લખેલ હોય તેવી 11 થેલી પસંદ કરી. તેમાં ખરેખર કેટલો લોટ છે તે વજન(કિગ્રામાં) નીચે પ્રમાણે આપેલ છે :

4.97 5.05 5.08 5.03 5.00 5.06 5.08 4.98 5.04 5.07 5.00

આમાંની કોઈ એક થેલી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરતાં તેમાં લોટનું વજન 5 કિગ્રાથી વધુ હોય તેની સંભાવના શોધો.

12. સ્વાધ્યાય 14.2 માં પ્રશ્ન નં. 5 નો વિચાર કરો. કોઈ એક શહેરમાં હવામાં સલ્ફર ડાયૉક્સાઈડની સાંદ્રતા શોધવા માટેનો પ્રયોગ કરવામાં આવ્યો. તે દસ લાખના ભાગમાં (*ppm*) 30 દિવસની માહિતીનું આવૃત્તિ-વિતરણ તમારે તૈયાર કરવાનું હતું. આ કોષ્ટકનો ઉપયોગ કરીને 0.12 - 0.16 વર્ગ માટે સલ્ફર ડાયૉક્સાઈડની સાંદ્રતાની સંભાવનાની ગણતરી કરો.

13. સ્વાધ્યાય 14.2 ના દાખલા 1 નો વિચાર કરો. એક વર્ગના 30 વિદ્યાર્થીઓના રૂધિર જૂથ માટેનું આવૃત્તિ-વિતરણ તમારે તૈયાર કરવાનું હતું. તો આ વિદ્યાર્થીઓમાંથી કોઈ એક વિદ્યાર્થીનું રૂધિર જૂથ AB હોય તેની સંભાવનાની ગણતરી કરો.

15.3 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓ શીખ્યા :

1. પ્રયોગના જરૂરી પરિણામોના સમૂહને તે પ્રયોગની ઘટના કહે છે.

2. ઘટનાથી પ્રાપ્ત થાય તેની (પ્રાયોગિક) સંભાવના P(E) આ રીતે વ્યાખ્યાયિત થાય છે.

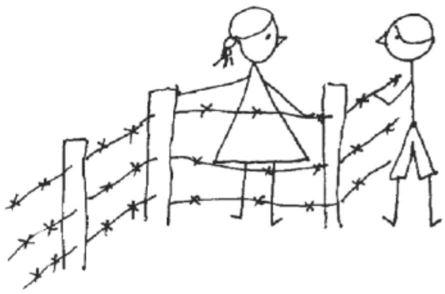
$$P(E) = \frac{\text{E ઉદ્ભવવા માટેના પ્રયત્નોની સંખ્યા}}{\text{પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા}}$$

3. કોઈ પણ ઘટનાની સંભાવના 0 અને 1 ની વચ્ચે જ હોય છે. (0 અને 1 સહિત)

પરિશિષ્ટ 1

ગણિતમાં સાબિતીઓ

A1.1 પ્રાસ્તાવિક



ધારો કે તમારા પરિવાર પાસે જમીનનો એક પ્લોટ છે. પરંતુ તેની કોઈપણ બાજુએ કોઈ વાડ બનાવેલી નથી. એક દિવસ તમારા પડોશીએ તેની જમીનની ચારેય બાજુ વાડ બનાવવાનો નિર્ણય લીધો. જ્યારે પડોશીએ વાડ બનાવી લીધી ત્યારે તમને ખ્યાલ આવ્યો કે વાડની અંદર તમારી જમીનનો કેટલોક ભાગ ચાલ્યો ગયો છે. તમે તમારા પડોશી પાસે કેવી રીતે સાબિત કરશો કે તેણે તમારી જમીનના કેટલાક ભાગ પર કબજો કરવાનો પ્રયત્ન કર્યો છે ? આ બાબતે તમારું પહેલું કામ સીમાના વિવાદને હલ કરવા માટે ગામના વડીલોની મદદ લેવાનું છે. પરંતુ માની લો આ બાબતમાં વડીલોના મત જુદા જુદા છે. કેટલાક વડીલો તમારા પડોશીની વાતને સાચી માને છે અને કેટલાક વડીલો તમારી વાતને સાચી માને છે. ત્યારે આવી પરિસ્થિતિમાં તમે શું કરશો ? આ બાબતે તમારી પાસે માત્ર એક જ વિકલ્પ રહે છે કે તમારી જમીનના પ્લોટની હદ પર તમારો દાવો રાખવા માટે તમે એવો રસ્તો શોધી કાઢો કે જે બધાને સ્વીકાર્ય હોય. ઉદાહરણ તરીકે તમારા દાવાને સાચો સાબિત કરવા માટે અને તમારા પડોશીના દાવાને ખોટો સાબિત કરવા માટે જરૂર લાગે તો તમે અદાલતમાં સરકાર દ્વારા માન્ય તમારા ગામના સર્વેક્ષણના નકશાનો ઉપયોગ કરી શકો.

ચાલો હવે આપણે વધુ એક પરિસ્થિતિ માટે વિચાર કરીએ. ધારો કે તમારી માતાએ ઑગષ્ટ 2005 નું ઘરનું વીજળીનું બિલ ભરી દીધેલ છે. પરંતુ સપ્ટેમ્બર 2005 ના બિલમાં એ દર્શાવેલ છે કે ઑગષ્ટનું વીજળી બિલ ભરવામાં આવેલ નથી. વીજળી

વિભાગ દ્વારા કરવામાં આવેલ આ દાવાને તમે કઈ રીતે ખોટો સાબિત કરશો ? તેના માટે તમારે ભરેલા બીલની પહોંચ રજૂ કરવી પડશે. તે એ સાબિત કરી દેશે કે ઑગષ્ટ મહિનાનું બિલ ભરાઈ ગયેલ છે.

આપણા રોજિંદા જીવનમાં આપણું વિધાન કે દાવો સત્ય છે કે અસત્ય તે સાબિત કરવાની જરૂર પડે છે એવું બને છે. જોકે કેટલાંક વિધાનો આપણે સાબિત કરવાની ચિંતા કર્યા વગર પણ સ્વીકારીએ છીએ. પરંતુ ગણિતમાં આપણે માત્ર ગાણિતિક તર્ક અનુસાર સત્ય કે અસત્ય પુરવાર કરેલાં વિધાનોને જ સ્વીકારીએ છીએ(કેટલીક પૂર્વધારણાઓ સિવાય).

વાસ્તવમાં ગણિતમાં સાબિતીઓનું અસ્તિત્વ હજારો વર્ષોથી રહેલ છે અને તે ગણિતની કોઈ પણ શાખામાં કેન્દ્રસ્થાને હોય છે. એવું માનવામાં આવે છે કે પહેલી જાણીતી સાબિતી ગ્રીસના એક તત્ત્વચિંતક અને ગણિતશાસ્ત્રી *Thales* દ્વારા આપવામાં આવેલ હતી. આમ તો મેસોપોટામિયા, ઈજિપ્ત, ચીન અને ભારત જેવી અનેક પ્રાચીન સંસ્કૃતિઓમાં ગણિત કેન્દ્રસ્થાને હતું. જે પ્રકારે આજે આપણે સાબિતીઓનો ઉપયોગ કરીએ છીએ તે રીતે તેમણે એ સાબિતીનો ઉપયોગ કરેલ હોય એ બાબતનું કોઈ સ્પષ્ટ પ્રમાણ મળતું નથી.

આ પ્રકરણમાં આપણે જોઈશું કે વિધાન શું છે, ગણિતમાં કેવી રીતે તર્ક કરવામાં આવે છે અને એક ગાણિતિક સાબિતીમાં કયા કયા પુરાવા સમાવિષ્ટ છે.

A1.2 ગાણિતિક રીતે સ્વીકાર્ય વિધાનો

આ વિભાગમાં આપણે ગાણિતિક રીતે સ્વીકાર્ય વિધાનના અર્થની વ્યાખ્યા કરવાનો પ્રયત્ન કરીશું. વિધાન એ એક એવું વાક્ય છે કે જે આદેશાત્મક અથવા ઉદ્ગાર વાક્ય નથી. નિશંકપણે વિધાન એ પ્રશ્ન નથી. ઉદાહરણ તરીકે ''તમારા વાળનો રંગ કયો છે ?'' આ એક વિધાન નથી. આ એક પ્રશ્ન છે. ''મહેરબાની કરીને જાઓ અને મારા માટે થોડું પાણી લઈ આવો'' આ એક આદેશ અથવા વિનંતી છે, પરંતુ વિધાન નથી. ''કેટલો અદ્ભુત સૂર્યાસ્ત છે!'' આ એક ઉદ્ગારવાચક નિર્દેશ છે, આ વિધાન નથી. છતાં ''તમારા વાળનો રંગ કાળો છે:'' આ એક વિધાન છે.

સામાન્ય રીતે વિધાન નીચે આપેલા પ્રકારોમાંથી એક હોઈ શકે છે :

- હંમેશાં સત્ય
- હંમેશાં અસત્ય
- અસ્પષ્ટ

અહીં ''અસ્પષ્ટ'' શબ્દની સમજ આપવી જરૂરી છે. બે સ્થિતિઓને લીધે વિધાન અસ્પષ્ટ બને છે. પહેલી સ્થિતિ એ છે કે ''આપણે એ નિર્ણય ન લઈ શકીએ કે વિધાન હંમેશાં સત્ય છે કે અસત્ય છે.'' ઉદાહરણ તરીકે ''કાલે ગુરુવાર છે'' અસ્પષ્ટ છે, કારણ કે એવો સંદર્ભ નથી આપ્યો કે જેના આધારે એ નિર્ણય લઈ શકીએ કે વિધાન સત્ય છે કે અસત્ય.

અસ્પષ્ટતા બીજી સ્થિતિ ત્યારે ઊભી થાય છે જ્યારે વિધાન વ્યક્તિલક્ષી હોય છે. એટલે કે કેટલીક વ્યક્તિઓ માટે તે સત્ય હોય અને અન્ય વ્યક્તિ માટે અસત્ય હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે ''કૂતરાઓ બુદ્ધિમાન હોય છે'' અસ્પષ્ટ વિધાન છે. કારણ કે કેટલાક લોકો તેને સત્ય માને છે અને કેટલાક તેને અસત્ય માને છે.

ઉદાહરણ 1 : નક્કી કરો કે આગળ આપેલાં વિધાનોમાંથી કયાં કયાં વિધાન હંમેશાં સત્ય છે, હંમેશાં અસત્ય છે અથવા અસ્પષ્ટ છે. તમારા જવાબોનું કારણ સાથે સમર્થન કરો.

(i) એક અઠવાડિયામાં આઠ દિવસ હોય છે.

(ii) અહીં વરસાદ થઈ રહ્યો છે.

(iii) સૂર્યાસ્ત પશ્ચિમ દિશામાં થાય છે.

(iv) ગૌરી એક દયાળુ છોકરી છે.

(v) બે અયુગ્મ પૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર યુગ્મ થાય છે.

(vi) બે યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર યુગ્મ થાય છે.

ઉકેલ :

(i) વિધાન હંમેશાં અસત્ય છે, કારણ કે એક અઠવાડિયામાં સાત દિવસ હોય છે.

(ii) આ વિધાન અસ્પષ્ટ છે, કારણ કે તે સ્પષ્ટ નથી કે 'અહીં' ક્યાં છે.

(iii) આ વિધાન હંમેશાં સત્ય છે. આપણે ક્યાંય પણ રહીએ, સૂર્યાસ્ત પશ્ચિમમાં જ થાય છે.

(iv) વિધાન અસ્પષ્ટ છે, કારણ કે વ્યક્તિલક્ષી છે. કેટલાક લોકો માટે ગૌરી દયાળુ હોઈ શકે અને અન્ય માટે નહિ.

(v) વિધાન હંમેશા અસત્ય છે. બે અયુગ્મ પૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર હંમેશાં અયુગ્મ હોય છે.

(vi) આ વિધાન હંમેશાં સત્ય છે.

આમ છતાં આ વિધાન સત્ય છે તેને સમર્થન આપવા માટે આપણે કંઈક વધુ કરવાની જરૂરિયાત છે. તેને વિકલ્પ A1.4 માં સાબિત કરવામાં આવશે.

પહેલાં કહ્યું છે તે પ્રમાણે આપણે દૈનિક જીવનમાં વિધાનની સત્યાર્થતા પ્રત્યે વધુ કાળજી લેતાં રહેતા નથી. ઉદાહરણ તરીકે ધારો કે તમારી મિત્ર તમને એ કહે છે કે કેરલના મનંતાવડીમાં જુલાઈ મહિનામાં દરરોજ વરસાદ થાય છે. પૂર્ણ વિશ્વાસ સાથે તમે તેના આ વિધાનને સત્ય માની લેશો. અલબત તે શક્ય છે કે જુલાઈના મહિનામાં એક કે બે દિવસ વરસાદ ન પણ થયો હોય અને જો તમે વકીલ ન હો તો, તમે તેની સાથે દલીલ કરશો નહિ !

એક અન્ય ઉદાહરણરૂપે જેને આપણે વારંવાર એકબીજા સાથે પ્રયોગમાં લેતા હોઈએ એવાં કેટલાંક વિધાનો લો, જેમકે ''આજે બહુ ગરમી છે.'' આપણે એવાં વિધાનોને સરળતાથી સ્વીકારી લઈએ છીએ, કારણ કે આપણે સંદર્ભ જાણીએ છીએ. અલબત આ વિધાન અસ્પષ્ટ છે : ''આજે બહુ ગરમી છે''નો અર્થ જુદા જુદા લોકો માટે જુદો જુદો હોઈ શકે છે. કારણ કે કુમાઉના વ્યક્તિ માટે જે મોસમ ગરમ હશે એ ચેન્નઈના વ્યક્તિ માટે ગરમ ન પણ હોઈ શકે.

પરંતુ ગાણિતિક વિધાન અસ્પષ્ટ ન હોઈ શકે. જે વિધાન કાં તો સત્ય હોય અથવા અસત્ય હોય તે વિધાન જ ગણિતમાં સ્વીકાર્ય અથવા માન્ય છે. જે વિધાન હંમેશા સત્ય હોય તેને આપણે સત્ય વિધાન કહીશું, નહીં તો તેને અસત્ય વિધાન કહીશું.

ઉદાહરણ તરીકે $5 + 2 = 7$ હંમેશાં સત્ય છે. આથી '$5 + 2 = 7$' એક સત્ય વિધાન છે. $5 + 3 = 7$ અસત્ય વિધાન છે.

ઉદાહરણ 2 : નિશ્ચિત કરો કે નીચે આપેલ વિધાન સત્ય છે કે અસત્ય :

(i) ત્રિકોણના ત્રણ ખૂણાઓનો સરવાળો $180°$ હોય છે.

(ii) 1 થી મોટી પ્રત્યેક અયુગ્મ સંખ્યા અવિભાજ્ય હોય છે.

(iii) કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $4x + x = 5x$ હોય છે.

(iv) પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $2x > x$ થાય.

(v) પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $x^2 \geq x$ થાય.

(vi) જો એક ચતુષ્કોણની તમામ બાજુઓ સમાન હોય, તો તે એક ચોરસ હોય છે.

ઉકેલ :

(i) આ વિધાન સત્ય છે. તમે તે પ્રકરણ 6 માં સાબિત કરી દીધું છે.

(ii) આ વિધાન અસત્ય છે. ઉદાહરણ તરીકે 9 એ અવિભાજ્ય સંખ્યા નથી.

(iii) આ વિધાન સત્ય છે.

(iv) આ વિધાન અસત્ય છે. ઉદાહરણ તરીકે $2 \times (-1) = -2$ અને -2 એ -1 થી મોટી સંખ્યા નથી.

(v) આ વિધાન અસત્ય છે ઉદાહરણ તરીકે $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, અને $\frac{1}{4}$ એ $\frac{1}{2}$ થી મોટી સંખ્યા નથી.

(vi) આ વિધાન અસત્ય છે. કારણ કે સમબાજુ ચતુષ્કોણની બાજુઓ સમાન હોય છે. પરંતુ એ જરૂરી નથી કે તે એક ચોરસ હોય.

એક વાત તરફ તમે ચોક્કસ ધ્યાન આપ્યું હશે કે ગણિત અનુસાર વિધાન સત્ય નથી તે સ્થાપિત કરવા માટે આપણે એવું એક ઉદાહરણ અથવા એવી પરિસ્થિતિ બતાવવી પડે જ્યાં તે સત્ય ન બને. આથી (ii) માં કારણ કે 9 એ અવિભાજ્ય સંખ્યા નથી, એ એક એવું ઉદાહરણ છે કે વિધાન ''1 થી મોટી પ્રત્યેક અયુગ્મ સંખ્યા અવિભાજ્ય હોય છે.'' તે સત્ય નથી. આ પ્રકારના જે વિધાનને અનુકૂળ ન હોય તેવા ઉદાહરણને પ્રતિઉદાહરણ કહે છે. આપણે વિભાગ A1.5 માં પ્રતિઉદાહરણો પર વિગતથી ચર્ચા કરીશું.

એ વિગત તરફ પણ તમે ચોક્કસ ધ્યાન આપ્યું હશે કે જો કે વિધાન (iv), (v) અને (vi) અસત્ય છે. છતાં પણ તેના પર કેટલીક શરત લગાવીને તેને સત્ય બનાવી શકાય છે.

ઉદાહરણ 3 : નીચે આપેલ વિધાનોને ઉચિત શરતો સાથે એવી રીતે ફરી લખો કે જેથી તે સત્ય વિધાન બને.

(i) પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $2x > x$ થાય.

(ii) પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $x^2 \geq x$ થાય.

(iii) જો તમે કોઈ એક સંખ્યાને તે જ સંખ્યા વડે ભાગો તો તમને હંમેશાં 1 મળે.

(iv) વર્તુળના એક બિંદુ પર તેની જીવાએ આંતરેલ ખૂણો $90°$ નો હોય છે.

(v) જો એક ચતુષ્કોણની તમામ બાજુઓ સમાન હોય તો તે ચોરસ હોય છે.

ઉકેલ :

(i) જો $x > 0$ હોય તો $2x > x$ થાય.

(ii) જો $x \leq 0$ હોય અથવા $x \geq 1$ હોય તો $x^2 \geq x$ થાય.

(iii) જો શૂન્યેતર સંખ્યાને તે જ સંખ્યા વડે ભાગીએ તો આપણને હંમેશાં 1 મળે.

(iv) વર્તુળના એક બિંદુ પર તેના વ્યાસ દ્વારા આંતરાયેલ ખૂણો $90°$ નો હોય છે.

(v) જો એક ચતુષ્કોણની તમામ બાજુઓ અને તમામ ખૂણાઓ સમાન હોય તો તે એક ચોરસ થાય.

સ્વાધ્યાય A1.1

1. નીચે આપેલાં વિધાન હંમેશાં સત્ય છે, હંમેશાં અસત્ય છે કે અસ્પષ્ટ છે તે નક્કી કરો.. કારણ સાથે જવાબ જણાવો.

   (i) એક વર્ષમાં 13 મહિના હોય છે.

   (ii) દિવાળી શુક્રવારના દિવસે આવે છે.

   (iii) મગાદીમાં તાપમાન $26°$ C છે.

   (iv) પૃથ્વીને એક ચંદ્ર છે.

   (v) કૂતરાઓ ઉડી શકે છે.

   (vi) ફેબ્રુઆરીમાં માત્ર 28 દિવસ હોય છે.

2. નીચે આપેલાં વિધાન સત્ય છે કે અસત્ય, તે કારણ સાથે જણાવો.

   (i) ચતુષ્કોણના ખૂણાઓનો સરવાળો $350°$ હોય છે.

   (ii) કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $x^2 \geq 0$ છે.

   (iii) સમબાજુ ચતુષ્કોણ એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય છે.

   (iv) બે યુગ્મ સંખ્યાઓનો સરવાળો યુગ્મ થાય છે.

   (v) બે અયુગ્મ સંખ્યાઓનો સરવાળો અયુગ્મ થાય છે.

3. ઉચિત શરતો લગાવીને નીચેનાં વિધાનોને એવી રીતે લખો કે વિધાન સત્ય બની જાય.

   (i) તમામ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ અયુગ્મ હોય છે.

   (ii) એક વાસ્તવિક સંખ્યાના બે ગણા હંમેશાં એક યુગ્મ સંખ્યા હોય છે.

   (iii) કોઈ પણ x માટે $3x + 1 > 4$ થાય.

   (iv) કોઈ પણ x માટે $x^3 \geq 0$ થાય.

   (v) પ્રત્યેક ત્રિકોણમાં મધ્યગા કોણદ્વિભાજક પણ હોય છે.

A1.3 આનુમાનિક તર્ક

એક સ્પષ્ટ વિધાનની યથાર્થતા સ્થાપિત કરવામાં મુખ્ય તર્કસંગત સાધન આનુમાનિક તર્ક છે.

આવો આનુમાનિક તર્કને સમજવા માટે આપણે એક કોયડાને ઉકેલવાથી શરૂઆત કરીએ.

ધારો કે તમને ચાર કાર્ડ આપવામાં આવ્યા છે. પ્રત્યેક કાર્ડની એક બાજુમાં એક મૂળાક્ષર છાપેલ છે અને બીજી બાજું પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.

A	V	6	5

ધારો કે તમને કહેવામાં આવે છે કે કાર્ડ નીચે આપેલા નિયમનું પાલન કરે છે.

''જો કાર્ડની એક બાજુ યુગ્મ સંખ્યા હોય તો બીજી બાજુ એક સ્વર હોય છે.''

નિયમની સત્યતાની ચકાસણી કરવા માટે ઓછામાં ઓછા કેટલા કાર્ડને ઉલટાવવાની જરૂરિયાત પડશે ?

હા, એ વિકલ્પ તો તમારી પાસે છે જ કે તમે દરેક કાર્ડને ઉલટાવી શકો છો અને ચકાસણી કરી શકો છો. પરંતુ શું તમે **ઓછામાં ઓછી સંખ્યામાં** કાર્ડને ઉલટાવીને આપેલ વિધાનની ચકાસણી કરી શકશો ?

ધ્યાનાકર્ષક મુદો છે કે જે કાર્ડની એક બાજુ યુગ્મ સંખ્યા છે હોય, તો તેની બીજી બાજુ એક સ્વર છે. આ વિધાનમાં એ કહ્યું નથી કે જે કાર્ડની એક બાજુ સ્વર છે, તેની બીજી બાજુ એક યુગ્મ સંખ્યા હોય જ. એવું બની પણ શકે અથવા ન પણ બની શકે. નિયમમાં એ પણ કહેલ નથી કે જે કાર્ડની એક બાજુ અયુગ્મ સંખ્યા હોય, તો તેની બીજી બાજુ વ્યંજન જ હોવો જોઈએ. એવું બની પણ શકે અથવા ન પણ બની શકે.

આથી શું આપણે 'A' એ ઉલટાવવાની જરૂરિયાત છે ? ના ! બીજી બાજુ યુગ્મ સંખ્યા હોય કે અયુગ્મ સંખ્યા ત્યારે પણ નિયમ લાગુ પડે છે.

'5' ના સંબંધમાં તમે શું કરશો ? અહીં પણ આપણે કાર્ડ ઉલટાવવાની જરૂર નથી. કારણ કે નિયમ બીજી બાજુ સ્વર હોય કે વ્યંજન ત્યારે પણ લાગું પડે છે.

પરંતુ V અને 6 વાળા કાર્ડને ઉલટાવવાની જરૂરિયાત છે. જો V ની બીજી બાજુએ એક યુગ્મ સંખ્યા હોય તો નિયમ ભંગ થઈ જાય છે. તે જ પ્રકારે જો 6 ની બીજી બાજુ વ્યંજન હોય તો પણ નિયમ ભંગ થઈ જાય છે.

આ કોયડાને ઉકેલવા માટે આપણે જે પ્રકારે તર્કનો ઉપયોગ કર્યો છે. તેને આનુમાનિક તર્ક કહેવાય છે. આને ''આનુમાનિક'' એટલા માટે કહેવાય છે, કારણ કે તર્કનો ઉપયોગ કરીને પહેલાં તારવેલ અથવા સ્થાપિત કરેલા વિધાન પરથી આપણે એક પરિણામ અથવા વિધાન પ્રાપ્ત કરી શકીએ છીએ. ઉદાહરણ માટે ઉપરના કોયડામાં અનુમાન કરેલા તર્કની હારમાળા પરથી આપણે એ મેળવ્યું કે માત્ર, V અને 6 ને જ ઉલટાવવાની જરૂર છે.

આનુમાનિક તર્કની સહાયતાથી આપણે એ તારણ પણ કાઢી શકીએ કે અમુક ચોક્કસ વિધાન સત્ય છે, કારણ કે જેને સત્ય માનવામાં આવ્યું છે એવા એક ખૂબ જ વ્યાપક વિધાનનો તે એક વિશિષ્ટ કિસ્સો છે. ઉદાહરણ તરીકે જ્યારે એકવાર આપણે એ સાબિત કરી લઈએ કે અયુગ્મ સંખ્યાઓનો ગુણાકાર હંમેશાં અયુગ્મ જ થાય છે. ત્યારે આપણે તરત જ એ તારણ કાઢી શકીએ કે 70001×134563 અયુગ્મ થશે. કારણ કે 70001 અને 134563 બંને સંખ્યાઓ જ અયુગ્મ છે.

સદીઓથી આનુમાનિક તર્ક માનવચિંતનનું એક અંગ રહ્યું છે અને તેનો પ્રયોગ આપણા દૈનિક જીવનમાં થતો રહે છે. ઉદાહરણ તરીકે માની લો કે આ વિધાન ''જ્યારે આગળના દિવસનું મહત્તમ તાપમાન $28°$ C થી વધુ હોય માત્ર ત્યારે જ સોલારિસ ફૂલ ખીલે છે'' અને ''15 સપ્ટેમ્બર, 2005 ના દિવસે કાલ્પનિક ખીણમાં સોલારિસ ખીલ્યું હતું'' ત્યારે આનુમાનિક તર્કનો પ્રયોગ કરીને આપણે એ તારણ કાઢી શકીએ કે કાલ્પનિક ખીણમાં 14 સપ્ટેમ્બર 2005 ના રોજ મહત્તમ તાપમાન $28°$ C થી વધુ હતું.

આપણી કમનસીબી એ છે કે, આપણે દૈનિક જીવનમાં હંમેશાં સત્ય તર્કનો ઉપયોગ કરતાં નથી! હંમેશાં આપણે પહેલાં અસત્ય તર્કના આધારે અનેક તારણ કાઢી લઈએ છીએ. ઉદાહરણ તરીકે જો તમારા મિત્ર એક દિવસ તમને જોઈને હસે નહિ તો તમે એ તારણ કાઢી લો છો કે તે તમારાથી નારાજ છે. અલબત આ પણ બની શકે કે ''જો તેના માથામાં ખૂબ દુખાવો હોય તો તે તમને જોઈને હસ્યા ન હોય'' તમે રોજબરોજ જે તારણ કાઢો છો તે તારણ માન્ય તર્ક પર આધારિત છે કે ખામીયુક્ત તર્ક પર તે શા માટે ચકાસતા નથી ?

સ્વાધ્યાય A1.2

1. આનુમાનિક તર્ક પરથી નીચે આપેલા પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(i) મનુષ્ય સસ્તન છે. તમામ સસ્તન પૃષ્ઠવંશી હોય છે. આ બે વિધાનોના આધારે તમે મનુષ્યના સંબંધમાં શું તારણ કાઢી શકો છો ?

(ii) એન્થની એક વાળ કાપનાર છે. દિનેશે તેના વાળ કપાવ્યા છે. શું તમે એ તારણ કાઢી શકો કે એન્થનીએ દિનેશના વાળ કાપ્યા છે ?

(iii) મંગળવાસીને લાલ જીભ છે. ગુલગ એક મંગળવાસી છે. આ બે વિધાનોના આધારે તમે ગુલગના વિશે તારણ કાઢી શકો ?

(iv) જો કોઈ દિવસ ચાર કલાકથી વધુ સમય સુધી વરસાદ થાય, તો બીજા દિવસે ગટરોની સફાઈ કરવી પડે છે. આજે છ કલાક સુધી વરસાદ થયો છે. કાલે ગટરની સ્થિતિ શું હશે ? આ વિશે તમે શું તારણ કાઢી શકો છો ?

(v) બાજુના કાર્ટૂનમાં આપેલ ગાયે કરેલા તર્કમાં શું વિરોધાભાસ છે ?

2. તમને ફરીથી ચાર કાર્ડ આપેલ છે. દરેક કાર્ડની એક બાજુ એક સંખ્યા અને બીજી બાજુ અક્ષર છાપેલ છે. નીચે આપેલા નિયમ લાગુ પડે છે કે નહિ તેની ચકાસણી કરવા માટે કયાં બે કાર્ડ એવાં છે જેને ઉલટાવવાની જરૂરિયાત છે ?

''જો કાર્ડની એક બાજુ એક વ્યંજન છે તો તેની બીજી બાજુ એક અયુગ્મ સંખ્યા છે.''

B	3	U	8

A1.4 પ્રમેય, અનુમાન અને પૂર્વધારણા

અત્યાર સુધી આપણે કેટલાંક વિધાનોની ચર્ચા કરી છે અને જોયું છે કે, આ વિધાનોની માન્યતાની-ચકાસણી કેવી રીતે કરવામાં આવે છે.

આ વિભાગમાં જે ત્રણ જુદા-જુદા પ્રકારનાં વિધાનોથી ગણિતનું નિર્માણ થયું છે એ પ્રમેય, અનુમાન અને પૂર્વધારણા અને તેમની વચ્ચેનો તફાવત સમજવા વિશે તમે અભ્યાસ કરશો.

તમે પહેલાં પણ અનેક પ્રમેયો શીખી ગયા છો. આ પ્રમેય શું છે ? જેની સત્યાર્થતા (સાબિત) પુરવાર કરી દેવામાં આવી છે એવાં ગાણિતિક વિધાનોને પ્રમેય કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે આગળ આપેલ વિધાન પ્રમેય છે તે તમે વિભાગ A1.5 માં જોશો.

પ્રમેય A1.1 : *ત્રિકોણના અંતઃકોણોનો સરવાળો 180° હોય છે.*

પ્રમેય A1.2 : *બે યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર યુગ્મ હોય છે.*

પ્રમેય A1.3 : *કોઈ પણ ત્રણ ક્રમિક યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર 16 વડે વિભાજ્ય હોય છે.*

આપણે ગાણિતિક સમજ અને અનુભવ એટલે કે ગાણિતિક અંતઃસ્ફુરણાના આધારે સત્ય માનીએ છીએ એવું વિધાન ગાણિતિક અટકળ કહેવાય છે. ગાણિતિક અટકળ સત્ય પણ હોય કે અસત્ય પણ હોય, જો આપણે તેને સાબિત કરી શકીએ તો તે એક પ્રમેય બની જાય છે. ગણિતજ્ઞો ભાત નિહાળી તે પરથી ચતુર ગાણિતિક કલ્પના કરી ગાણિતિક અટકળ કરે છે. ચાલો આપણે કેટલાંક સ્વરૂપ લઈએ અને જોઈએ કે આપણે તેમનો કેવી રીતે બુદ્ધિપૂર્વક ઉપયોગ કરી શકીએ છીએ.

ઉદાહરણ 4 : કોઈ પણ ત્રણ ક્રમિક સંખ્યાઓ લો અને તેને ઉમેરો, જેમકે,

$2 + 4 + 6 = 12$, $4 + 6 + 8 = 18$, $6 + 8 + 10 = 24$, $8 + 10 + 12 = 30$, $20 + 22 + 24 = 66$.

શું તમે આ સરવાળાઓનાં પરિણામોથી કોઈ સ્વરૂપનું અનુમાન લગાવી શકો છો ? તેના વિશે તમે શું અનુમાન લગાવી શકો છો ?

ઉકેલ : એક અનુમાન આ હોઈ શકે છે.

(i) ત્રણ ક્રમિક યુગ્મ સંખ્યાઓનો સરવાળો યુગ્મ હોય છે.

અન્ય અનુમાન એ પણ હોઈ શકે છે :

(ii) ત્રણ ક્રમિક યુગ્મ સંખ્યાઓનો સરવાળો 6 થી વિભાજ્ય હોય છે.

ઉદાહરણ 5 : સંખ્યાઓનું નીચે પ્રમાણે સ્વરૂપ લો. તેને પાસ્કલ ત્રિકોણ કહેવામાં આવે છે.

હરોળ												સંખ્યાઓનો સરવાળો
1						1						1
2					1		1					2
3				1		2		1				4
4			1		3		3		1			8
5		1		4		6		4		1		16
6	1		5		10		10		5		1	32
7			:						:			:
8			:						:			:

7 મી અને 8 મી હરોળની સંખ્યાઓના સરવાળા માટે તમે શું અનુમાન આપી શકો છો ? હરોળ 21 ની સંખ્યાઓ માટે તમે શું કહેશો ? શું તમે આ તરાહ જોઈ ? હરોળ n ની સંખ્યાઓના સરવાળાના સૂત્ર માટે અનુમાન કરો.

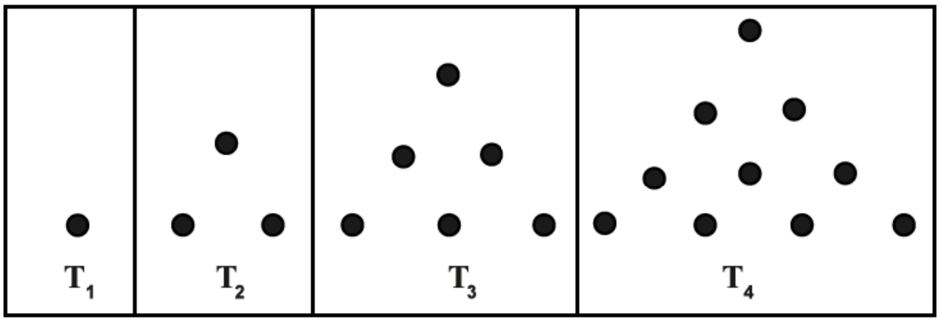
ઉકેલ : 7 મી હરોળની સંખ્યાઓનો સરવાળો $= 2 \times 32 = 64 = 2^6$ છે.

8 મી હરોળની સંખ્યાઓનો સરવાળો $= 2 \times 64 = 128 = 2^7$ છે.

21 મી હરોળની સંખ્યાઓનો સરવાળો $= 2^{20}$ છે.

હરોળ n ની સંખ્યાઓનો સરવાળો $= 2^{n-1}$ છે.

ઉદાહરણ 6 : નીચે જણાવેલ ત્રિકોણીય સંખ્યાઓ T_n લો :

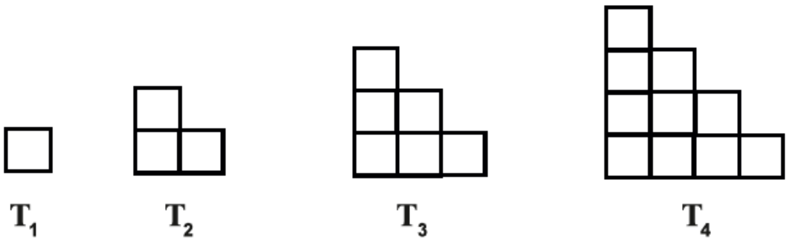


આકૃતિ A1.1

અહીં ટપકાંઓની એવી રીતે ગોઠવણી કરેલ છે કે જેનાથી એક ત્રિકોણ બને છે. અહીં $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$ વગેરે. શું તમે અનુમાન લગાવી શકો કે T_5 શું છે ? T_6 વિશે તમે શું કહી શકો ? T_n ના વિશે તમે શું કહી શકો છો ?

T_n નું એક અનુમાન આપો.

જો તમે તેને નીચે દર્શાવેલ રીત વડે ફરી દોરો તો તમને મદદ (સરળતા) મળી શકે છે :



આકૃતિ A1.2

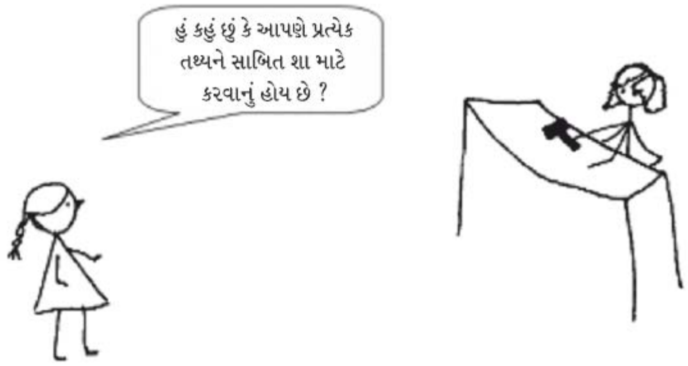
ઉકેલ : $T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = \frac{5 \times 6}{2}$

$$T_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 = \frac{6 \times 7}{2}$$

$$T_n = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

ગાણિતિક અટકળ માટે એક અનુકૂળ ઉદાહરણ હજી પણ મુક્ત છે. (એટલે કે હજી સુધી સાબિત કરવામાં આવ્યું નથી કે તે સત્ય છે કે અસત્ય) આ ગાણિતિક અટકળ ગણિતશાસ્ત્રી ***Christian Goldbach*** (1690 – 1764)ના નામે રાખવામાં આવી છે. ***Goldbach***ની અટકળનું વિધાન એ છે કે "4 થી મોટા પ્રત્યેક યુગ્મ પૂર્ણાંકને બે અયુગ્મ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના સરવાળાના રૂપમાં વ્યક્ત કરી શકાય છે." જો તમે આ સાબિત કરી શકશો કે આ પરિણામ સત્ય છે કે અસત્ય તો તમે પ્રસિદ્ધ થઈ જશો.

એ જોઈને તમને ચોક્કસ આશ્ચર્ય થયું હશે કે શું ગણિતમાં તમારી સામે જે કંઈ પણ આવે છે તેને સાબિત કરવું જરૂરી છે અને જો નહિ તો શા માટે નહિ ?



વાસ્તવિકતા તો એ છે કે ગણિતના દરેક ક્ષેત્ર કેટલાંક વિધાનો પર આધારિત હોય છે. તેમને આપણે સત્ય માની લઈએ છીએ અને તેમને સાબિત કરતા નથી. જેને આપણે સાબિતી વગર સત્ય માની લઈએ છીએ તે ''સ્વયં સત્ય છે''. આ વિધાનોને ''સ્વયં સિદ્ધ સત્ય'' કહે છે. પ્રકરણ-5 માં તમે યુક્લિડના સ્વંય સિદ્ધ સત્ય અને પૂર્વધારણાઓનો અભ્યાસ કરી ગયા છો.(આજકાલ સ્વયં સિદ્ધ સત્યો અને પૂર્વધારણાઓ વચ્ચે કોઈ ભેદ રાખવામાં આવતો નથી.) ઉદાહરણ તરીકે યુક્લિડની પહેલી પૂર્વધારણા છે :

કોઈ એક બિંદુથી અન્ય કોઈ બિંદુ સુધી એક સીધી રેખા દોરી શકાય છે અને

તેની ત્રીજી પૂર્વધારણા છે : કોઈ કેન્દ્ર અને કોઈપણ ત્રિજ્યા લઈને એક વર્તુળ દોરી શકાય છે.

આ વિધાનો સંપૂર્ણ સત્ય જોવા મળે છે અને યુક્લિડે તેમને સાચાં માની લીધાં હતાં. શા માટે ?

તેમણે તેને સત્ય એટલા માટે માની લીધાં કે આપણે દરેક હકીકતને સાબિત કરી શકતા નથી અને આપણે ક્યાંક ને ક્યાંકથી શરૂઆત તો કરવી જ પડે છે. તેના માટે આપણે જેને સત્ય માની લઈએ એવાં કેટલાંક વિધાનોની જરૂરિયાત હોય છે અને ફરી આ સ્વયં સિદ્ધ સત્યો પર આધારિત રહીને આપણે આપણા જ્ઞાનનું નિર્માણ કરી શકીએ છીએ.

તમને એ જાણીને આશ્ચર્ય થઈ શકે છે કે તો પછી આપણે આ બધાં વિધાનોનો સ્વીકાર કેમ નથી કરી લેતાં. તેનાં અનેક કારણ છે. ઘણી વાર આપણી અંતઃસ્ફુરણા ખોટી સાબિત થઈ શકે છે; ચિત્ર કે નમૂનાનું માળખું આપણને દગો દઈ શકે છે અને ફરી આપણી સામે માત્ર એક જ વિકલ્પ બચે છે કે આપેલ હકીકતોને સત્ય સાબિત કરીએ.

ઉદાહરણ તરીકે આપણામાંથી અનેક વ્યક્તિ એ વિશ્વાસ કરે છે કે જો એક સંખ્યાને અન્ય સંખ્યાથી ગુણીએ તો પ્રાપ્ત પરિણામ બંને સંખ્યાઓથી મોટું હશે. પરંતુ આપણે એ જાણીએ છીએ કે એ હંમેશાં સત્ય નથી હોતું.

ઉદાહરણ તરીકે $5 \times 0.2 = 1$ છે. આ પરિણામ 5 થી નાનું છે.

હવે તમે નીચે આપેલ આકૃતિ A1.3 જુઓ. કયો રેખાખંડ વધુ લાંબો છે.

AB કે CD ?

ઉદાહરણ A1.3

AB ની લંબાઈ ટૂંકી દેખાવા છતાં પણ બંનેની લંબાઈ સમાન છે.

તમને નવાઈ લાગશે સ્વયંસિદ્ધ સત્યો આપણી અંતઃસ્ફુરણાના આધારે પસંદ કરાયા છે અને તે સ્વયં પુરાવા રૂપ દૃષ્ટિમાન થાય છે માટે, આપણે તેમને સત્ય માનીએ છીએ. જો કે, તે શક્ય છે કે પાછળથી એવું પરિણામ મેળવી શકાય કે કોઈ ચોક્કસ સ્વયંસિદ્ધ સત્ય એ સત્ય નથી ! આવી શક્યતા સામે શું રક્ષણ છે? આપણે નીચેનાં સોપાનો લઈએ :

(i) સ્વયંસિદ્ધ સત્યોને ખૂબ જ ન્યૂનતમ રાખવાં. ઉદાહરણ તરીકે માત્ર સ્વયંસિદ્ધ સત્યો અને યુક્લિડની પાંચ પૂર્વધારણાઓને આધારે આપણે સેંકડો પ્રમેય તારવી શકીએ છીએ.

(ii) સુનિશ્ચિત કરો કે સ્વયંસિદ્ધ સત્યો સુસંગત છે.

જો આપણે એક સ્વયંસિદ્ધ સત્યનો ઉપયોગ બીજું સ્વયંસિદ્ધ સત્ય ખરું નથી તે બતાવવા માટે કરી શકીએ તો આપણે કહી શકીએ કે સ્વયંસિદ્ધ સત્યનો સમૂહ વિસંગત છે. ઉદાહરણ તરીકે, નીચેનાં બે વિધાનોનો વિચાર કરો. આપણે સાબિત કરીશું કે તેઓ સુસંગત નથી.

વિધાન 1: કોઈ પૂર્ણ સંખ્યા તેની ક્રમિક સંખ્યાને સમાન નથી.

વિધાન 2: પૂર્ણ સંખ્યાને શૂન્ય વડે ભાગતાં પૂર્ણ સંખ્યા મળે.

(**યાદ રાખો : શૂન્ય વડે ભાગાકાર અવ્યાખ્યાયિત છે.** પરંતુ ક્ષણિક એવું માનીએ કે તે શક્ય છે અને જોઈએ કે શું થાય છે.)

વિધાન 2, પરથી આપણે $\frac{1}{0} = a$, મેળવીએ, જ્યાં a કોઈ પૂર્ણ સંખ્યા છે, અને તે દર્શાવે છે કે $1 = 0$. પરંતુ આ વિધાન 1 ને અસત્ય ઠેરવે છે. તે દર્શાવે છે કે કોઈ પૂર્ણ સંખ્યા તેની ક્રમિક સંખ્યાને સમાન નથી.

(iii) અસત્ય હોય તેવું સ્વયંસિદ્ધ સત્ય, વહેલું કે મોડું એક વિરોધાભાસમાં પરિણમે છે. *જ્યારે આપણે એક એવું વિધાન મેળવીએ જેનાં બંને પરિણામો એટલે કે વિધાન અને પ્રતિવિધાન સત્ય હોય, ત્યારે એક વિરોધાભાસ મળે છે.* ઉપરનાં વિધાન 1 અને વિધાન 2 નો વિચાર કરો.

વિધાન 1 પરથી આપણે $2 \neq 1$ પરિણામ તારવી શકીએ.

હવે $x^2 - x^2$ નો વિચાર કરો. આપણે તેના અવયવ નીચે દર્શાવેલ બે જુદી જુદી રીતે મેળવીશું :

(i) $x^2 - x^2 = x(x - x)$ અને

(ii) $x^2 - x^2 = (x + x)(x - x)$

આથી, $x(x - x) = (x + x)(x - x)$.

વિધાન 2 પરથી આપણે બંને બાજુએથી $(x - x)$ દૂર કરીએ.

આપણને $x = 2x$ મળશે તે $2 = 1$ માં રૂપાંતરિત થાય.

તેથી બંને વિધાન $2 \neq 1$ અને તેનું પ્રતીપ $2 = 1$ બંને સત્ય છે. આ વિરોધાભાસ છે. આ વિરોધાભાસ ઊભું થવાનું કારણ એ છે કે કોઈ પૂર્ણ સંખ્યાને શૂન્ય વડે ભાગતા પૂર્ણ સંખ્યા મળે તે સ્વયંસિદ્ધ સત્ય ખોટું છે.

આથી, જે વિધાનોને આપણે સ્વયંસિદ્ધ સત્ય તરીકે પસંદ કરીએ છીએ તેમાં ખૂબ જ વિચાર અને સૂઝની જરૂર છે. આપણે ખાતરી કરવી જોઈએ કે તે વિધાનો વિસંગતતાઓ કે તાર્કિક વિરોધાભાસ તરફ દોરી જતા ન હોવા જોઈએ. વધુમાં, સ્વયંસિદ્ધ સત્યોની પસંદગી જ જાતે ક્યારેક નવી શોધ તરફ દોરી જાય છે. પ્રકરણ 5 પરથી તમે યુક્લિડની પાંચમી

પૂર્વધારણા અને બિનયુક્લિડિયન ભૂમિતિની શોધથી પરિચિત છો જ. તમે જોયું કે ગણિતશાસ્ત્રીઓ એવું માને છે કે પાંચમી પૂર્વધારણાને પૂર્વધારણા કહેવાની જરૂર નથી અને હકીકતમાં એ જેને ચાર પૂર્વધારણાઓની મદદથી સાબિત કરી શકાય એવું પ્રમેય છે. આશ્ચર્યજનક રીતે આ પ્રયત્નો બિનયુક્લિડિયન ભૂમિતિની શોધ તરફ દોરી જાય છે.

આપણે પ્રમેય, સ્વયંસિદ્ધ સત્ય અને અટકળ વચ્ચેના તફાવતને યાદ કરીને આ વિભાગને સમાપ્ત કરીએ. સ્વયંસિદ્ધ સત્ય એવું વિધાન છે જેને સાબિતી વગર સત્ય ધારી લેવામાં આવે છે. અટકળ એ એવું ગાણિતિક વિધાન છે જેની સત્યાર્થતા કે અસત્યાર્થતા હજુ પ્રસ્થાપિત થયેલ નથી અને પ્રમેય એ એવું ગાણિતિક વિધાન છે જેનું સત્ય તાર્કિક રીતે પ્રસ્થાપિત કરેલું છે.

સ્વાધ્યાય A1.3

1. કોઈ પણ ત્રણ ક્રમિક યુગ્મ સંખ્યાઓ લો અને તેના ગુણાકાર શોધો. ઉદાહરણ તરીકે $2 \times 4 \times 6 = 48$, $4 \times 6 \times 8 = 192$ અને આ જ પ્રમાણે આગળ વધો. આ ગુણાકાર માટે ત્રણ ગાણિતિક અટકળો કરો.

2. પાસ્કલ ત્રિકોણ બનાવો.

હરોળ 1 : 1 $= 11^0$

હરોળ 2 : 1 1 $= 11^1$

હરોળ 3 : 1 2 1 $= 11^2$

હરોળ: 4 અને હરોળ 5 માટે ગાણિતિક અટકળ કરો. શું તમારી ગાણિતિક અટકળ યોગ્ય છે? તમારી અટકળ હરોળ : 6 માટે પણ સાચી છે ?

3. ચાલો ફરીથી ત્રિકોણીય સંખ્યાઓ જુઓ. (જુઓ આકૃતિ A1.2) ક્રમિક બે ત્રિકોણીય સંખ્યાઓ ઉમેરો. ઉદાહરણ તરીકે $T_1 + T_2 = 4$, $T_2 + T_3 = 9$, $T_3 + T_4 = 16$.

તો $T_4 + T_5$ વિશે શું કહી શકાય ? $T_{n-1} + T_n$ માટેની ગાણિતિક અટકળ કરો.

4. નીચે દર્શાવેલ તરાહ જુઓ :

$1^2 = 1$

$11^2 = 121$

$111^2 = 12321$

$1111^2 = 1234321$

$11111^2 = 123454321$

નીચે દર્શાવેલ દરેક માટે ગાણિતિક અટકળ કરીએ :

$111111^2 =$

$1111111^2 =$

ચકાસો કે તમારી ગાણિતિક અટકળ સાચી છે.

5. આ પુસ્તકમાં ઉપયોગમાં લેવાયેલ પાંચ સ્વયંસિદ્ધ સત્યોની (પૂર્વધારણાઓ) યાદી બનાવો.

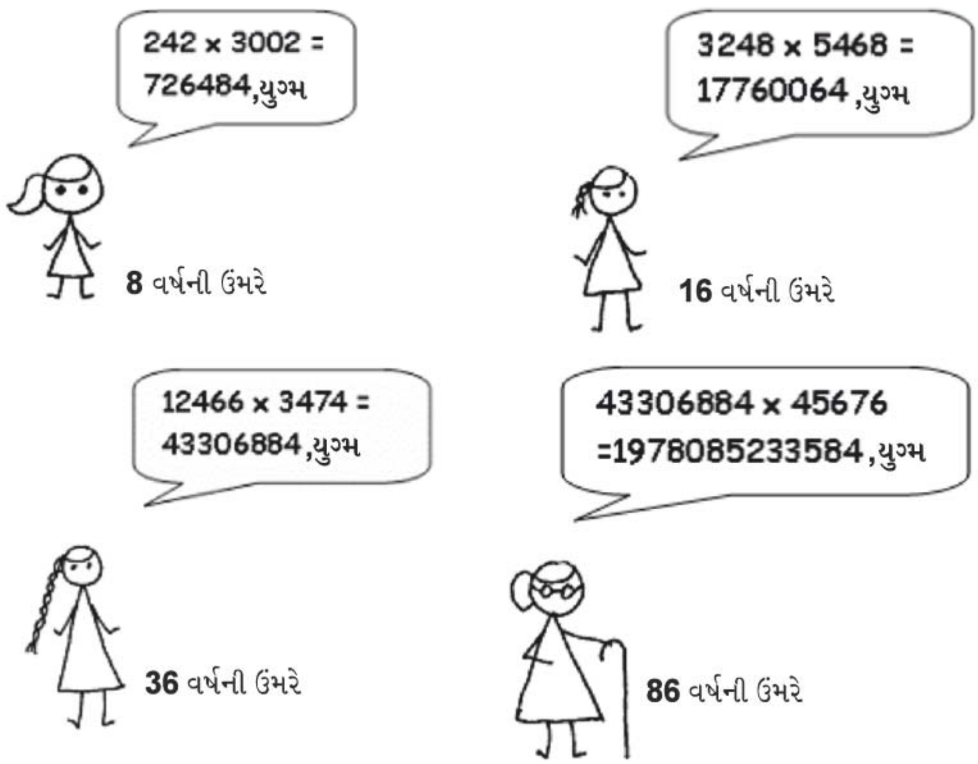
A1.5 ગાણિતિક સાબિતી શું છે ?

ચાલો હવે આપણે સાબિતીનાં વિવિધ પાસાઓ જોઈએ. આપણે ચકાસણી અને સાબિતી વચ્ચેના તફાવતની સમજ સાથે પ્રારંભ કરીએ. ગણિતમાં સાબિતીનો અભ્યાસ કર્યો. એ પહેલાં મુખ્યત્વે તમને વિધાન ચકાસવાનું કહેવામાં આવતું હતું.

ઉદાહરણ તરીકે તમને બે યુગ્મ સંખ્યાઓનો ગુણાકાર યુગ્મ સંખ્યા હોય તેવા ઉદાહરણને ચકાસવાનું કહેવામાં આવે અને તમે બે યાદચ્છિક યુગ્મ સંખ્યાઓ જેમકે 24 અને 2006 લો અને ચકાસો કે $24 \times 2006 = 48144$ પણ યુગ્મ છે. તમે કદાચ બીજા ઘણાં બધાં ઉદાહરણો લઈ શકો.

વળી, તમને એક પ્રવૃત્તિરૂપે વર્ગમાં વિવિધ ત્રિકોણો દોરવાનું અને તેના અંદરના ખૂણાઓનો સરવાળો કરવાનું પૂછી શકાય. માપની ભૂલને અવગણી એ તો તમો જોઈ શકો કે ત્રિકોણના અંતઃકોણોનો સરવાળો $180°$ થાય છે.

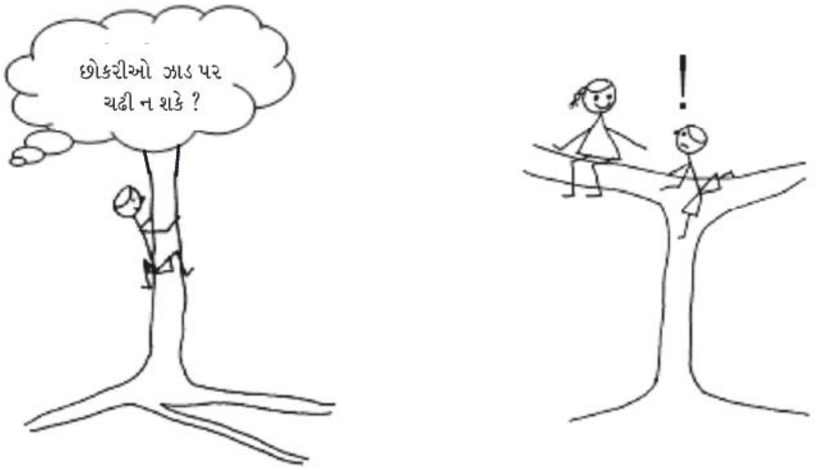
આ પદ્ધતિમાં શું ખામી છે? ચકાસવાની પ્રક્રિયામાં કેટલીક સમસ્યાઓ છે. તમે કોઈ વિધાન કરો અને તે સત્ય છે તેમ માનો તો તમો ચોકકસપણે એવું ન કહી શકો કે તે વિધાન બધા કિસ્સામાં સત્ય છે. ઉદાહરણ તરીકે યુગ્મ સંખ્યાઓની કેટલીક જોડનો ગુણાકાર યુગ્મ સંખ્યા જ હોય. તમે જાતે બધી જ શક્ય યુગ્મ સંખ્યાઓની જોડના ગુણાકાર ચકાસી ન શકો. જો તમે તેવું કરો તો ચિત્રમાં દર્શાવેલી છોકરીની માફક, તમારી બાકીની જિંદગીમાં શક્ય બધી જ યુગ્મ સંખ્યાઓની જોડના ગુણાકાર કર્યા કરો. આ જ પ્રમાણે હજુ સુધી કેટલાક ત્રિકોણ એવા હોઈ શકે, કે જેમના અંતઃકોણોનો સરવાળો $180°$ જેટલો નથી. આપણે શક્ય બધા જ ત્રિકોણના આંતરિક ખૂણાઓ માપી શકતા નથી.



વધુમાં ચકાસણી ઘણી વાર ગેરમાર્ગે દોરનાર બની શકે છે. ઉદાહરણ તરીકે તમો પાસ્કલના ત્રિકોણ આધારિત અગાઉની ચકાસણીના આધારે $11^5 = 15101051$ મેળવવા કદાચ પ્રેરાઈ શકો. (સ્વાધ્યાય A1.3 નો દાખલા નં.2) પરંતુ હકીકતમાં $11^5 = 161051$ થાય.

આથી, કેટલાક કિસ્સાઓમાં ચકાસણી આધારિત ન હોય તેવા બીજા અભિગમની તમારે જરૂર પડે. અહીં બીજા અભિગમનું નામ છે વિધાન સાબિત કરવું. સંપૂર્ણપણે તાર્કિક દલીલો આધારિત જે પ્રક્રિયા ગાણિતિક વિધાનની સત્યાર્થતા પુરવાર કરે છે તેને ગાણિતિક સાબિતી કહે છે.

વિભાગ A1.2 ના ઉદાહરણ 2 માં તમે જોયું કે ગાણિતિક વિધાન અસત્ય છે તે પ્રસ્થાપિત કરવા માટે એક જ પ્રતિઉદાહરણ સર્જવું પૂરતું છે. આથી કોઈ ગાણિતિક-વિધાનની યથાર્થતા પ્રસ્થાપિત કરવા માટે હજારો કિસ્સાઓની જરૂર નથી; માત્ર એક પ્રતિઉદાહરણ તેને અમાન્ય વિધાન કરવા માટે પૂરતું જ છે. (જેમ કે તે દર્શાવવા માટે કે કંઈક અસત્ય છે.)



કોઈ ગાણિતિક વિધાન અસત્ય છે. તેમ બતાવવા માટે પ્રતિઉદાહરણ શોધવું પર્યાપ્ત છે.

આમ, $7 + 5 = 12$ એ બે અયુગ્મ સંખ્યાઓનો સરવાળો અયુગ્મ હોય તેનું પ્રતિઉદાહરણ છે.

(i) પ્રમેય સાબિત કરવા માટે આપણી પાસે કેવી રીતે આગળ વધવું. તેનો આછેરો ખ્યાલ હોવો જોઈએ.

(ii) પ્રમેયમાં અગાઉથી જ અપાયેલ માહિતી સ્પષ્ટ પણે સમજવી અને ઉપયોગમાં લેવી.

ઉદાહરણ તરીકે, પ્રમેય A1.2 દર્શાવે છે કે બે યુગ્મ સંખ્યાઓનો ગુણાકાર યુગ્મ હોય. આપણને બે યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ આપેલી છે. આથી, આપણે તેના ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરી શકીએ. અવયવ પ્રમેયમાં (પ્રકરણ 2) તમને બહુપદી $p(x)$ આપેલી હતી અને $p(a) = 0$ એવું કહેવામાં આવ્યું હતું. $(x - a)$ એ $p(x)$નો એક અવયવ છે તે બતાવવા તમારે તેનો ઉપયોગ કરવો પડે. તેવી જ રીતે અવયવ પ્રમેયના પ્રતીપ માટે $(x - a)$ એ $p(x)$નો અવયવ છે તેવું આપેલું છે અને તમારે આ ઉત્કલ્પનાનો ઉપયોગ કરી $p(a) = 0$ સાબિત કરવાનું છે.

તમે પ્રમેય સાબિત કરવાની પ્રક્રિયામાં રચનાનો પણ ઉપયોગ કરી શકો છો. ઉદાહરણ તરીકે, ત્રિકોણના ખૂણાઓનો સરવાળો $180°$ સાબિત કરવા માટે, આપણે કોઈ એક બાજુને સમાંતર રેખા તે બાજુની સામેનાં શિરોબિંદુમાંથી પસાર થતી હોય તેવી દોરીએ અને સમાંતર રેખાઓના ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરીએ છીએ.

(iii) સાબિતી એ ગાણિતિક વિધાનોની ક્રમિક હારમાળાથી બનેલી હોય છે. સાબિતીનું પ્રત્યેક વિધાન સાબિતીના અગાઉના વિધાન અથવા અગાઉ સાબિત કરેલ પ્રમેય અથવા પૂર્વધારણા કે આપણી ઉત્કલ્પના પરથી તાર્કિક રીતે અનુમાનિત કરેલ હોય છે.

(iv) ગાણિતિક રીતે સત્ય વિધાનોની હારમાળા આપણે શું સાબિત કરવા ઈચ્છીએ છીએ કે શું પ્રમેયનો દાવો છે તેને તાર્કિક રીતે સાચા ક્રમમાં સમાપન તરફ દોરી જાય છે.

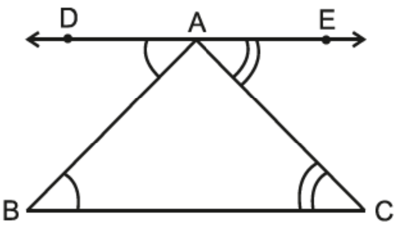
આ ઘટકો સમજવા માટે આપણે પ્રમેય A1.1 અને તેની સાબિતીનું પૃથક્કરણ કરીએ. તમે પ્રકરણ 6 માં આ પ્રમેયનો અભ્યાસ કરી ચૂક્યાં છો. પરંતુ સૌપ્રથમ, ભૂમિતિમાં સાબિતી પર કેટલીક ટિપ્પણી કરીએ. આપણે મોટે ભાગે પ્રમેય સાબિત કરવા માટે આકૃતિઓનો સહારો લેતા હોઈએ છીએ અને તે ખૂબ જ અગત્યનું છે. જો કે સાબિતીના દરેક વિધાન માત્ર તર્કનો ઉપયોગ કરી પ્રસ્થાપિત કરવામાં આવેલા હોય છે. વારંવાર આપણે વિદ્યાર્થીઓને એવું કહેતા સાંભળીએ છીએ કે ''આપેલા બે ખૂણાઓ સમાન છે. કારણ કે ચિત્રમાં તે સમાન લાગે છે. ''અથવા'' તે ખૂણો 90^0 જ હોવો જોઈએ કારણ કે બે રેખાઓ એકબીજીને લંબ હોય તેવું દેખાય છે.'' તમે જે જુઓ છો તેનાથી છેતરાવાથી બચો. (આકૃતિ A1.3 યાદ કરો.)

આથી હવે આપણે પ્રમેય A1.1 જોઈએ.

પ્રમેય A1.1 : ત્રિકોણોના અંતઃકોણોનો સરવાળો $180°$ થાય.

સાબિતી : ત્રિકોણ ABC નો વિચાર કરો. (જુઓ આકૃતિ A1.4).

આપણે $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$ સાબિત કરવાનું છે. (1)



આકૃતિ A1.4

A માંથી પસાર થતી અને BC ને સમાંતર રેખા DE રચો. (2)

DE એ BC ને સમાંતર છે અને AB તેની છેદિકા છે.

આથી, $\angle DAB$ અને $\angle ABC$ એ યુગ્મકોણો છે. માટે પ્રકરણ 6 ના પ્રમેય 6.2 અનુસાર તેઓ સમાન છે એટલે કે

$\angle DAB = \angle ABC$ (3)

આ જ પ્રમાણે $\angle CAE = \angle ACB$ (4)

માટે $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE$ (5)

પરંતુ $\angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180°$, કારણ કે તેઓ સરળકોણ બનાવે છે. (6)

તેથી, $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180°$. ■ (7)

હવે, આપણે સાબિતીના દરેક સોપાન પર ટિપ્પણ કરીએ.

સોપાન 1 : આપણું પ્રમેય ત્રિકોણના ગુણધર્મો આધારિત છે. આથી આપણે ત્રિકોણથી શરૂઆત કરીએ.

સોપાન 2 : આ ચાવી રૂપ વિચાર છે કે પ્રમેય સાબિત કરવા માટે સાહજિક કૂદકો કે કેવી રીતે આગળ વધવું તેની સમજ

હોવી જરૂરી છે. ભૌમિતિક સાબિતીઓમાં રચનાની આવશ્યકતા હોઈ શકે.

સોપાન 3 અને 4 : DE એ BC ને સમાંતર છે(રચના) એ સત્યનો ઉપયોગ કરી અને બે સમાંતર રેખાની છેદિકાથી બનતા યુગ્મકોણ સમાન હોય છે તેવા પહેલા સાબિત કરેલા પ્રમેય 6.2 પરથી આપણે $\angle$ DAE = $\angle$ ABC અને $\angle$ CAE = $\angle$ ACB મેળવીને સમાપન કરીએ છીએ.

સોપાન 5 : અહીં આપણે યુક્લિડના સ્વયંસિદ્ધ સત્યનો ઉપયોગ કરીએ. (જુઓ પ્રકરણ 5.) એ દર્શાવે છે કે "જો સમાનમાં સમાનને ઉમેરીએ તો કુલ સમાન થાય" આ રીતે સમજાવી શકાય.

$\angle$ ABC + $\angle$ BAC+ $\angle$ ACB = $\angle$ DAB +$\angle$ BAC + $\angle$ CAE

આમ, ત્રિકોણના અંતઃકોણોનો સરવાળો એ સીધી રેખા પર મળતા ખૂણાઓના સરવાળાને સમાન થાય છે.

સોપાન 6:અહીં આપણે પ્રકરણ 6 ની રૈખિક જોડનું સ્વયંસિદ્ધ સત્ય ઉપયોગ લીધેલું છે. તે દર્શાવે છે કે સીધી રેખા પરના ખૂણાઓનો સરવાળો 180° થાય. આ પરથી દર્શાવી શકાય $\angle$ DAB +$\angle$ BAC + $\angle$ CAE = 180°.

સોપાન 7 : આપણે યુક્લિડના સ્વયંસિદ્ધ સત્યનો ઉપયોગ કરીએ. તે દર્શાવે છે કે "જે બાબતો સમાન હોય તે એકબીજાને સમાન હોય" પરથી કહી શકાય કે $\angle$ ABC + $\angle$ BAC + $\angle$ ACB = $\angle$ DAB +$\angle$ BAC + $\angle$ CAE = 180°.
સોપાન 7 એ પ્રમેય દ્વારા રજૂ થતું વિધાન આપણે સાબિત કર્યું એવો દાવો છે. હવે આપણે પ્રમેય A1.2 અને A1.3 નું પૃથક્કરણ કર્યા વગર સાબિત કરીશું.

પ્રમેય A1.2 : બે પ્રાકૃતિક યુગ્મ સંખ્યાઓનો ગુણાકાર યુગ્મ હોય છે.

સાબિતી : ધારો કે x અને y કોઈપણ બે પ્રાકૃતિક યુગ્મ સંખ્યાઓ છે.

આપણે xy એ યુગ્મ છે તે સાબિત કરવા માંગીએ છીએ.

x અને y યુગ્મ હોવાથી તે 2 વડે વિભાજ્ય છે અને તેથી કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યા m માટે $x = 2m$ અને કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે $y = 2n$ તરીકે દર્શાવી શકાય.

પરિણામે $xy = 4\,mn$ અહીં $4\,mn$ એ 2 વડે વિભાજ્ય છે. આથી xy પણ 2 વડે વિભાજ્ય થાય.

માટે, xy એ યુગ્મ સંખ્યા છે. ■

પ્રમેય A1.3 : ત્રણ ક્રમિક પ્રાકૃતિક યુગ્મ સંખ્યાઓનો ગુણાકાર 16 વડે વિભાજ્ય હોય.

ઉદાહરણ : કોઈ પણ ત્રણ ક્રમિક યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ (કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે) $2n$, $2n + 2$ અને $2n + 4$ સ્વરૂપે હોય આપણે એવું સાબિત કરવું છે કે તેનો ગુણાકાર $2n(2n + 2)(2n + 4)$ એ 16 વડે વિભાજ્ય હોય.

હવે, $2n(2n + 2)(2n + 4) = 2n \times 2(n + 1) \times 2(n + 2)$

$= 2 \times 2 \times 2n(n + 1)(n + 2) = 8n(n + 1)(n + 2)$.

હવે, આપણી પાસે બે વિકલ્પ છે. n એ કાં તો અયુગ્મ અથવા યુગ્મ સંખ્યા છે. ચાલો આપણે દરેક વિકલ્પ ચકાસીએ. ધારો કે n એ યુગ્મ છે તો કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યા m માટે $n = 2m$ લખી શકીએ.

અને ત્યાર બાદ $2n(2n + 2)(2n + 4) = 8n(n + 1)(n + 2) = 16m(2m + 1)(2m + 2)$.

માટે $2n(2n + 2)(2n + 4)$ એ 16 વડે વિભાજ્ય છે.

હવે, ધારો કે n એ અયુગ્મ સંખ્યા છે. માટે $n + 1$ એ યુગ્મ સંખ્યા થાય અને આપણે કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યા r માટે $n + 1 = 2r$ લઈ શકીએ.

હવે આપણી પાસે : $2n(2n + 2)(2n + 4) = 8n(n + 1)(n + 2)$

$$= 8(2r - 1) \times 2r \times (2r + 1)$$

$$= 16r(2r - 1)(2r + 1)$$

માટે, $2n(2n + 2)(2n + 4)$ એ 16 વડે વિભાજ્ય થાય.

માટે, બંને કિસ્સાઓમાં આપણે દર્શાવ્યું કે ત્રણ ક્રમિક પ્રાકૃતિક યુગ્મ સંખ્યાઓનો ગુણાકાર 16 વડે વિભાજ્ય છે. ■

ગણિતશાસ્ત્રીઓ કેવી રીતે પરિણામ મેળવે અને કેવી રીતે પરંપરાગત કઠિન સાબિતીઓ લખાય છે તેની વચ્ચેના તફાવતની કેટલીક નોંધ સાથે આપણે આ પ્રકરણનું સમાપન કરીએ. અગાઉ દર્શાવ્યું એ પ્રમાણે પ્રત્યેક સાબિતીમાં મુખ્ય એક સાહજિક વિચાર (ક્યારેક એક કરતાં વધુ) હોય છે. ગણિતશાસ્ત્રીઓ જે રીતે વિચારે છે અને પરિણામો તારવે છે તેમાં અંતઃપ્રેરણા કેન્દ્રમાં હોય છે. ગણિતશાસ્ત્રી ભાગ્યે જ કોઈ પ્રમેયની સાબિતી અસ્પષ્ટ આપે છે.

ગણિતશાસ્ત્રીઓ ખરો ઉકેલ કે સાબિતી આપતાં પહેલાં મોટે ભાગે વિવિધ માર્ગે વિચાર કરે અને તર્ક લગાવે અને ઉદાહરણો દ્વારા પ્રયોગ કરે છે. યોગ્ય સાબિતી મેળવવા માટે રચનાત્મક તબકકો આવ્યા બાદ બધી દલીલોની સંખ્યા ઘટાડી શકાય છે.

અહીં ભારતના મહાન ગણિતશાસ્ત્રી રામાનુજનનો વિચાર કરવો જોઈએ. તેમણે ઉચ્ચ કક્ષાની અંતઃપ્રેરણા દ્વારા ઘણાંબધાં વિધાનો તારવ્યાં હતાં. તે સાચાં હોવાનો તેમણે દાવો કર્યો હતો. તેમાંનાં ઘણાં બધાં સત્ય પુરવાર થયાં અને તે પ્રસિદ્ધ પ્રમેયો છે. જોકે આજે પણ વિશ્વના ગણિતશાસ્ત્રીઓ તેમના દાવા (ધારણાઓ)ને સાબિત કરવા (કે નકારવા) સંઘર્ષ કરી રહ્યા છે.

શ્રીનિવાસ રામાનુજન
(1887–1920)
આકૃતિ A1.5

સ્વાધ્યાય A1.4

1. નીચે દર્શાવેલાં વિધાનો માટે પ્રતિઉદાહરણ આપીને ચકાસો :

(i) જો બે ત્રિકોણોના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય, તો આ ત્રિકોણો એકરૂપ હોય.

(ii) બધી જ બાજુઓ સમાન હોય તેવો ચતુષ્કોણ એક ચોરસ હોય.

(iii) બધા જ ખૂણાઓ સમાન હોય તેવો ચતુષ્કોણ એક ચોરસ હોય.

(iv) પૂર્ણાંકો a અને b માટે, $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

(v) બધી જ પૂર્ણ સંખ્યાઓ n માટે $2n^2 + 11$ એ અવિભાજ્ય છે.

(vi) બધા જ ધન પૂર્ણાંકો n માટે $n^2 - n + 41$ એ અવિભાજ્ય છે.

2. તમારી મનપસંદ સાબિતી લો અને વિભાગ A1.5 માં આપેલ ક્રમિક પગલાઓમાં પૃથક્કરણ કરી દરેક સોપાનની ચર્ચા કરો. (શું આપ્યું છે. શું સાબિત કરવાનું છે. કયાં પ્રમેય અને સ્વયંસિદ્ધ સત્ય વપરાય છે અને બીજું બધું.)

3. સાબિત કરો કે બે અયુગ્મ સંખ્યાઓનો સરવાળો યુગ્મ સંખ્યા થાય.

4. સાબિત કરો કે બે અયુગ્મ સંખ્યાઓનો ગુણાકાર અયુગ્મ સંખ્યા થાય.

5. સાબિત કરો કે ત્રણ ક્રમિક યુગ્મ સંખ્યાઓનો સરવાળો 6 વડે વિભાજ્ય હોય.

6. સાબિત કરો કે $y = 2x$ સમીકરણવાળી રેખા પર અનંત બિંદુઓ આવેલાં છે.

(**સૂચન :** પૂર્ણાંક n માટે બિંદુ $(n, 2n)$ નો વિચાર કરો.)

7. તમારો મિત્ર તમને એક સંખ્યા ધારવાનું કહે છે અને તેના પર વિવિધ પ્રક્રિયા કરવાનું કહે છે અને બાદમાં મૂળ સંખ્યા જાણ્યા વગર, તમને આ પ્રક્રિયા કઈ સંખ્યા સાથે પૂર્ણ થાય છે તે જણાવવાનું કહે છે.

(i) એક સંખ્યા પસંદ કરો. તેના બે ગણા કરો. તેમાં નવ ઉમેરો. તેમાં તમારી મૂળ સંખ્યા ઉમેરો. તેને ત્રણ વડે ભાગો. તેમાં ચાર ઉમેરો. તેમાંથી મૂળ સંખ્યા બાદ કરો. તમારું પરિણામ 7 છે.

(ii) ત્રણ આંકડાની એક સંખ્યા લખો. (ઉદાહરણ તરીકે 425). આ જ ક્રમમાં પુનરાવર્તન કરી 6 અંકની સંખ્યા બનાવો (425425). તમારી નવી સંખ્યા 7, 11 અને 13 વડે વિભાજ્ય હશે.

A1.6 સારાંશ

આ પરિશિષ્ટમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓ શીખી ગયાં :

1. ગણિતમાં હંમેશા સત્ય કે અસત્ય હોય તેવું વિધાન સ્વીકાર્ય છે.

2. ગાણિતિક વિધાન અસત્ય છે તે દર્શાવવા માટે તેનું પ્રતિઉદાહરણ શોધીએ તે પર્યાપ્ત છે.

3. જે સાબિતી વગર સત્ય છે તેમ ધારવામાં આવે છે એવાં વિધાનો સ્વયંસિદ્ધ સત્યો છે.

4. જેને આપણી ગાણિતિક અંતઃપ્રેરણાના આધારે સત્ય માનીએ છીએ એવું વિધાન અટકળ છે, પરંતુ તે આપણે હજુ સાબિત કરવાનું છે.

5. જેની સત્યાર્થતા પ્રસ્થાપિત (સાબિત) થઈ છે તેવા ગાણિતિક વિધાનને પ્રમેય કહે છે.

6. ગાણિતિક વિધાનોને સાબિત કરવાનું મુખ્ય તાર્કિક સાધન એ અનુમાનિક તર્ક છે.

7. સાબિતી એ ક્રમિક ગાણિતિક વિધાનોની શ્રૃંખલા છે. સાબિતીનું પ્રત્યેક વિધાન સાબિતીના અગાઉના વિધાન અથવા અગાઉ સાબિત કરેલ પ્રમેય અથવા પૂર્વધારણા કે આપણી ઉત્કલ્પના પરથી તાર્કિક રીતે અનુમાનિત કરેલ હોય છે.

પરિશિષ્ટ 2

ગાણિતિક મોડેલનો પરિચય

A2.1 પ્રાસ્તાવિક

અગાઉનાં ધોરણોથી તમે તમારી આસપાસ રહેલા વાસ્તવિક જગતના કૂટપ્રશ્નો ઉકેલતાં આવ્યાં છો. ઉદાહરણ તરીકે તમે સાદા વ્યાજને લગતાં કૂટપ્રશ્નોના ઉકેલ તેનું સૂત્ર વાપરી મેળવ્યા છે. સૂત્ર (અથવા સમીકરણ)એ વ્યાજ અને તેની સાથે સંકળાયેલ બીજી ત્રણ રાશિઓ, મુદ્દલ, વ્યાજનો દર અને સમયગાળા વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવે છે. આ સૂત્ર એ ગાણિતિક મોડેલનું ઉદાહરણ છે.

ગાણિતિક મોડેલ એ કેટલીક વ્યવહારુ પરિસ્થિતિ વચ્ચેનો ગાણિતિક સંબંધ દર્શાવે છે.

ગાણિતિક મોડેલ જીવનની ઘણીબધી વ્યવહારુ પરિસ્થિતિઓ ઉકેલવામાં ઉપયોગી છે, જેવી કે...

- ઉપગ્રહનું પ્રક્ષેપણ કરવામાં
- ચોમાસાના આગમનની આગાહી કરવા માટે
- વાહનો દ્વારા થતા પ્રદૂષણનું નિયંત્રણ કરવા માટે
- મોટાં શહેરોમાં સ્થગિત વાહનવ્યવહારની સ્થગિતતા ઘટાડવા માટે

આ પ્રકરણમાં ગાણિતિક મોડેલની રચના કરવાનાં સોપાનોની સમજ તમને આપીશું. તે ગાણિતિક મોડેલિંગ તરીકે ઓળખાય છે. ગાણિતિક મોડેલિંગમાં આપણે જગતની વાસ્તવિક સમસ્યા લઈશું અને તેને ગાણિતિક કોયડાની જેમ જ લખીશું. આપણે તેને ગાણિતિક કૂટપ્રશ્નોની જેમ ઉકેલીશું અને આ ઉકેલનું અર્થઘટન જગતની વાસ્તવિક સમસ્યાના સંદર્ભે કરીશું. આથી ગાણિતિક મોડેલિંગમાં સૂત્ર બનાવવું, ઉકેલ, અર્થઘટન અને યથાર્થતા જેવાં સોપાનોનો સમાવેશ થાય છે.

A2.2. વિભાગમાં આપણે આપેલા શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નો ઉકેલવા માટે હાથ ધરાતી પ્રક્રિયાને નિહાળીને પ્રારંભ કરીશું. અહીં

આપણે તમે અગાઉના ધોરણમાં ઉકેલ્યા હોય એવા કેટલાક શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નોની ચર્ચા કરીશું. આપણે આગળ એ પણ જોઈશું કે શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નો ઉકેલવા માટેનાં જે સોપાનો છે તેમાંનાં કેટલાંક સોપાનો ગાણિતિક મોડેલિંગના ઉકેલમાં પણ વપરાય છે.

બીજો વિભાગ એટલે કે A2.3 માં આપણે કેટલાંક સાદાં મોડેલ્સની ચર્ચા કરીશું.

વિભાગ A2.4 માં આપણે મોડેલિંગની સમગ્ર પ્રક્રિયા, તેનાં ફાયદા અને કેટલીક મર્યાદાઓની ચર્ચા કરીશું..

A2.2 શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નોની સમીક્ષા

આ વિભાગમાં, આપણે અગાઉના ધોરણમાં ઉકેલ્યા હોય તેના જેવા કેટલાક શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નોની ચર્ચા કરીશું. ચાલો આપણે સમચલનના કૂટપ્રશ્નથી પ્રારંભ કરીએ.

ઉદાહરણ 1 : મેં મારી કારમાં 48 લિટર પેટ્રોલમાં 432 કિલોમીટરની મુસાફરી કરી. મારે મારી કાર દ્વારા 180 કિલોમીટર દૂર એક સ્થળે જવાનું છે. મારે કેટલા પેટ્રોલની જરૂર પડશે ?

ઉકેલ : આ કૂટપ્રશ્નને ઉકેલવા માટેનાં પગલાંઓની આપણે યાદી બનાવીએ.

સોપાન 1 : તમે જાણો છો કે જેમ વધુ મુસાફરી કરીશું તેમ વધારે પેટ્રોલની જરૂરિયાત થશે. એટલે કે પેટ્રોલનો જે જથ્થો જરૂરી છે તે કાપેલાં અંતરનાં સમપ્રમાણમાં છે.

432 કિમી મુસાફરી માટે જરૂરી પેટ્રોલ = 48 લિટર

180 કિમી મુસાફરી માટે જરૂરી પેટ્રોલ = ?

ગાણિતિક વર્ણન : ધારો કે

x = મેં કાપેલું અંતર

y = મારી પેટ્રોલની જરૂરિયાત

આથી, y એ x ના સમચલનમાં છે.

$y = kx$, જ્યાં k એ અચળાંક છે.

હું 432 કિલોમીટર મુસાફરી 48 લિટર પેટ્રોલમાં કરી શકું છું.

આથી, $y = 48,\ x = 432$

માટે, $k = \dfrac{y}{x} = \dfrac{48}{432} = \dfrac{1}{9}$

પરંતુ, $y = kx,$

માટે, $$y = \frac{1}{9}x \qquad (1)$$

સમીકરણ અથવા સૂત્ર (1) પેટ્રોલની જરૂરિયાત અને કાપેલ અંતર વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવે છે.

સોપાન 2 : ઉકેલ : આપણે 180 કિલોમીટર મુસાફરી કરવા માટે કેટલું પેટ્રોલ જોઈએ તે શોધવા માંગીએ છીએ. જ્યારે $x = 180$ હોય ત્યારે y ની કિંમત આપણે શોધવી પડે. સમીકરણ (1) માં $x = 180$ મૂકતાં...

$$y = \frac{180}{9} = 20$$

સોપાન 3 : અર્થઘટન : $y = 20$

આથી, આપણને 180 કિલોમીટરની મુસાફરી કરવા માટે 20 લિટર પેટ્રોલની જરૂર પડે.

એવું બને કે તમે દરેક પરિસ્થિતિમાં સમીકરણ (1)નો ઉપયોગ ન કરી શકો ? ઉદાહરણ તરીકે, ધારો કે 432 કિલોમીટરનો રસ્તો પહાડી માર્ગે હોય અને 180 કિલોમીટરનો રસ્તો સપાટ માર્ગ પર હોય. પ્રથમ માર્ગમાં કાર વધુ દરે પેટ્રોલનો ઉપયોગ કરે. આથી જ્યાં પેટ્રોલ અગાઉના માર્ગ કરતાં ઓછા દરે વપરાશે ત્યાં આપણે 180 કિલોમીટર માટે પણ તે જ દરે પેટ્રોલ ન વાપરી શકીએ. આથી સૂત્ર ત્યારે જ વપરાય કે આવી બધી જ પરિસ્થિતિઓ જે પેટ્રોલના વપરાશના દર પર અસર કરતી હોય તેવી બધી જ પરિસ્થિતિઓ બંને મુસાફરીમાં સમાન હોય અથવા જો પરિસ્થિતિઓમાં ફેરફાર હોય તો કારમાં વપરાતા પેટ્રોલ પર તે તફાવતની અસર ખૂબ જ ઓછી થતી હોય. આવી જ પરિસ્થિતિમાં વપરાતું પેટ્રોલ એ કાપેલા અંતરના સમચલનમાં હોય. આ કૂટપ્રશ્ન ઉકેલતી વખતે આપણે આવી ધારણા કરી હશે.

ઉદાહરણ 2 : ધારો કે સુધીરે વાર્ષિક 8 ટકાના સાદા વ્યાજે ₹ 15,000 નું રોકાણ કર્યું. આ રોકાણના વળતર સહિતની રકમમાંથી તે ₹ 19,000 ની કિંમતનું એક વૉશીંગ મશીન ખરીદવા માગે છે. તો તેણે ₹ 15,000 કેટલી મુદત માટે રોકવા જોઈએ જેથી વૉશીંગ મશીન ખરીદવા માટે પૂરતી રકમ મળી રહે ?

ઉકેલ : સોપાન 1 : કૂટપ્રશ્નનું નિર્માણ : અહીં, આપણે મુદત અને વ્યાજનો દર જાણીએ છીએ. સુધીરને ₹ 15,000 ઉપરાંત વૉશીંગ મશીન ખરીદવા માટે જે રકમ જોઈએ છે તે વ્યાજની રકમ થાય. આપણે હવે વર્ષની સંખ્યા શોધવી પડે.

ગાણિતિક વર્ણન : સાદા વ્યાજ માટેનું સૂત્ર $\mathrm{I} = \frac{\mathrm{P}nr}{100}$,

જ્યાં, P = મુદલ

n = વર્ષની સંખ્યા

r % = વ્યાજનો દર

I = મેળવેલ વ્યાજ

અહીં, મુદલ = ₹ 15,000

સુધીરને વૉશીંગ મશીન ખરીદવા માટે જરૂરી રકમ = ₹ 19,000

આથી, મેળવવા પાત્ર વ્યાજ = ₹ (19,000 – 15,000)

= ₹ 4000

15,000 નું રોકાણ કરવા માટે જરૂરી મુદત = n

15,000 નું 8 ટકાના દરે n વર્ષ માટેનું વ્યાજ = I

આથી, $$\mathrm{I} = \frac{15000 \times n \times 8}{100}$$

માટે, $$\mathrm{I} = 1200n \qquad (1)$$

આ સમીકરણ જો 15000 વાર્ષિક 8 ટકાના દરે રોક્યાં હોય, તો તે વર્ષની સંખ્યા અને વ્યાજ વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવે છે.

આપણે ₹ 4000 વ્યાજ થાય તે માટેનો સમયગાળો શોધવો પડે.

સમીકરણ (1) માં I = 4000 મૂકતાં આપણને નીચેનું પરિણામ મળે :

$$4000 = 1200n \tag{2}$$

સોપાન 2 : કૂટપ્રશ્નનો ઉકેલ : સમીકરણ (2) ને ઉકેલતાં આપણને

$$n = \frac{4000}{1200} = 3\frac{1}{3}$$

સોપાન 3 : અર્થઘટન : $n = 3\frac{1}{3}$ મળે છે અને વર્ષનો એક તૃતીયાંશ ભાગ 4 માસ છે. આથી આથી સુધીર 3 વર્ષ અને 4 માસ બાદ વૉશીંગ મશીન ખરીદી શકશે.

તમે અનુમાન લગાવી શકો કે ઉપરના ઉદાહરણમાં તમે શું ધારણા કરી છે ? આપણે જે સમયગાળા માટે વ્યાજની ગણતરી કરી તે ગાળામાં વ્યાજનો દર સમાન જ રહેશે તેવી ધારણા કરી છે. નહિ તો, $I = \frac{Pnr}{100}$ સૂત્ર માન્ય ગણાય નહિ. આપણે એ પણ ધારણા કરેલ છે જે સમયગાળામાં સુધીર નાણાં એકઠાં કરે છે તે દરમિયાન વૉશીંગ મશીનનો ભાવ પણ વધતો નથી.

ઉદાહરણ 3 : એક મોટરબૉટ નદીના પ્રવાહની વિરુદ્ધ દિશામાં જઈ બે શહેરના નદીકિનારા વચ્ચેનું અંતર 6 કલાકમાં કાપે છે. આ બૉટ આટલું જ અંતર નદીના પ્રવાહની દિશામાં જઈ 5 કલાકમાં કાપે છે. જો નદીના પ્રવાહની ઝડપ 2 કિમી/કલાક હોય, તો મોટરબૉટની સ્થિર પાણીમાં ઝડપ શોધો.

ઉકેલ :

સોપાન 1 : નિર્માણ: આપણે નદીના પ્રવાહની ઝડપ અને બે સ્થળ વચ્ચેનું અંતર કાપવા માટે બંને દિશામાં આવતાં-જતાં લીધેલો સમય જાણીએ છીએ. આપણે સ્થિર પાણીમાં બૉટની ઝડપ શોધવાની છે.

ગાણિતિક વર્ણન : ધારો કે બૉટની સ્થિર પાણીમાં ઝડપ x , લીધેલ સમય માટે t અને કાપેલ અંતર માટે y લઈએ તો.

$$y = tx \tag{1}$$

ધારો કે બે સ્થળ વચ્ચેનું અંતર d છે.

નદીના પ્રવાહની વિરુદ્ધ દિશામાં જતા બૉટની ખરેખર ઝડપ

= સ્થિર પાણીમાં બૉટની ઝડપ – નદીના પ્રવાહની ઝડપ

કારણ કે બૉટ નદીના પ્રવાહની સામે મુસાફરી કરે છે.

આથી, નદીના પ્રવાહની વિરુદ્ધ દિશામાં બૉટની ઝડપ = $(x - 2)$ કિમી/કલાક

નદીના પ્રવાહની વિરુદ્ધ દિશામાં બે શહેર વચ્ચે અંતર કાપતાં 6 કલાક લાગે છે. આથી સમીકરણ (1) પરથી

$$d = 6(x - 2) \text{ મળે.} \tag{2}$$

પ્રવાહની દિશામાં જતાં બૉટની ઝડપમાં, નદીના પ્રવાહની ઝડપ ઉમેરાશે.

આથી, પ્રવાહની દિશામાં બૉટની ઝડપ = $(x + 2)$ કિમી/કલાક

પ્રવાહની દિશામાં તેટલું જ અંતર કાપવા માટે બોટને 5 કલાક લાગે છે.

$$d = 5(x + 2) \quad (3)$$

સમીકરણ (2) અને (3) પરથી આપણને નીચેનું સમીકરણ મળશે :

$$5(x + 2) = 6(x - 2) \quad (4)$$

સોપાન 2 : ઉકેલ મેળવવો. સમીકરણ (4) પરથી x ની કિંમત મેળવતાં આપણને $x = 22$ મળશે.

સોપાન 3 : અર્થઘટન

$x = 22$ મળે છે.

આથી મોટર બૉટની સ્થિર પાણીમાં ઝડપ 22 કિમી/કલાક છે.

ઉપરના ઉદાહરણમાં આપણે જાણીએ છીએ કે નદીના પ્રવાહની ઝડપ દરેક જગ્યાએ સમાન હોતી નથી. તે કિનારાની નજીક ધીમે વહે છે અને મધ્ય ભાગમાં ઝડપી વહે છે. બૉટ કિનારાથી શરૂ થઈ નદીના મધ્ય ભાગ તરફ જાય છે. જ્યારે તે નિશ્ચિત સ્થળની નજીક હોય છે, ત્યારે તે ધીમી પડે છે અને કિનારાની નજીક જાય છે. આથી બોટની નદીના મધ્ય ભાગમાં અને કિનારાની નજીકના ભાગમાં ઝડપમાં થોડો તફાવત હોય છે. જોકે તે કિનારાની નજીક થોડા સમય માટે જ હોય. આ નદીની ઝડપનો તફાવત બોટની ઝડપ પર ટૂંકા સમય પૂરતો જ અસર કરે છે. આથી આપણે નદીની ઝડપના આ તફાવતને અવગણી શકીએ. વળી નદીના પ્રવાહની ઝડપ ઉપરાંત પાણી અને બોટની સપાટી વચ્ચેનું ઘર્ષણ પણ બોટની મૂળ ઝડપને અસર કરે છે. આપણે એવું સ્વીકારી લઈએ છીએ કે આ અસર પણ ખૂબ જ ઓછી છે.

આથી, આપણે એવું અનુમાન કરીએ કે,

1. નદીના પ્રવાહની ઝડપ અને બોટની ઝડપ દરેક સમયે અચળ રહે છે.

2. બોટ અને પાણી વચ્ચેના ઘર્ષણ તથા હવાને કારણે થતા ઘર્ષણની અસર અવગણ્ય છે.

આપણે હોડીની સ્થિર પાણીમાં ઝડપ ઉપર્યુક્ત ધારણાઓ (ઉત્કલ્પનાઓ)ના આધારે મેળવી છે.

શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નો માટે આપણે જોયું કે શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નો ઉકેલવા માટે ત્રણ સોપાનો જરૂરી છે. તે આ પ્રમાણે છે :

1. **નિર્માણ :** આપણે કૂટપ્રશ્નનું પૃથક્કરણ કર્યું અને જોયું કે કૂટપ્રશ્નના ઉકેલ પર કયા પરિબળોની મુખ્ય અસર છે. આ બધાં સંબંધિત પરિબળો છે. આપણા પ્રથમ ઉદાહરણમાં, કાપેલ અંતર અને વપરાયેલ પેટ્રોલ એ ***સંબંધિત પરિબળો*** છે. આપણે રસ્તાનો પ્રકાર, ડ્રાઈવિંગ ઝડપ વગેરે પરિબળોને અવગણ્યા. નહિ તો આ કૂટપ્રશ્ન ઉકેલવો વધુ કઠિન બની જાય. જે પરિબળોને આપણે અવગણ્યા તે બધાં ***અસંબંધિત પરિબળો*** છે.

   ત્યાર બાદ આપણે કૂટપ્રશ્નને એક કે વધારે ગાણિતિક સમીકરણ દ્વારા ગાણિતિક સ્વરૂપે વર્ણવી શકીએ.

2. **ઉકેલ :** પ્રથમ સોપાનમાં મેળવેલ ગાણિતિક સમીકરણને યોગ્ય પદ્ધતિ વડે ઉકેલવાથી આપણને ઉકેલ મળશે.

3. **અર્થઘટન :** મૂળભૂત શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નના સંદર્ભ બીજા સોપાનમાં મળેલ ઉકેલનો અર્થ (મહત્ત્વ) આપણે જોઈ શકીએ છીએ.

અહીં તમારા માટે કેટલાક સ્વાધ્યાય છે. નીચેના કૂટપ્રશ્નો માટે ઉપર્યુક્ત ત્રણ સોપાનો વડે શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નો ઉકેલવામાં સંકળાયેલાં સોપાનો માટેની તમારી સમજની ચકાસણી થશે.

સ્વાધ્યાય A 2.1

નીચેના પૈકી પ્રત્યેક કૂટપ્રશ્નમાં સોપાન 1, 2 અને 3 દરમિયાન સંબંધિત અને અસંબંધિત પરિબળો સ્પષ્ટ દર્શાવો.

1. ધારો કે એક કંપનીને કેટલાક સમય માટે એક કમ્પ્યૂટરની આવશ્યકતા છે. કંપની કાં તો માસિક ₹ 2000 ના ભાડે કમ્પ્યૂટર લે અથવા ₹ 25,000 માં ખરીદે છે. જો કંપનીને કમ્પ્યૂટરનો લાંબા સમય માટે ઉપયોગ હોય તો કંપનીએ ખૂબ ઊંચું ભાડું ભરવું પડે. તેના કરતાં કમ્પ્યૂટર ખરીદવું વધારે સસ્તુ પડે. બીજી બાજુ જો કંપનીને કમ્પ્યૂટરનો ઉપયોગ એક માસ પૂરતો જ હોય તો કમ્પ્યૂટર ભાડે લેવું સસ્તું પડે. કેટલા મહિનાના ઉપયોગ બાદ કમ્પ્યૂટર ખરીદવું સસ્તું પડશે તે શોધો.

2. ધારો કે એક કાર સ્થળ A થી 40 કિમી/કલાકની ઝડપે સ્થળ B તરફ મુસાફરી કરે છે. તે જ સમયે બીજી કાર સ્થળ B થી 30 કિમી/કલાકની ઝડપે સ્થળ A તરફ મુસાફરી કરે છે. જો સ્થળ A અને સ્થળ B વચ્ચેનું અંતર 100 કિમી હોય, તો કેટલા સમય બાદ બંને કાર ભેગી થશે ?

3. ચંદ્ર આશરે પૃથ્વીથી 3,84,000 કિલોમીટર દૂર છે અને તેનો પૃથ્વી ફરતે ગતિમાર્ગ લગભગ વર્તુળાકાર છે. તે પૃથ્વીને ફરતે કઈ ઝડપે પરિભ્રમણ કરે છે? ધારો કે તેનો પૃથ્વીને ફરતે પરિભ્રમણનો સમય 24 કલાક છે. ($\pi = 3.14$ લો.)

4. એક કુટુંબ જે મહિનાઓ દરમિયાન વૉટર હીટર નથી વાપરતું, તેનું સરેરાશ માસિક વીજબિલ ₹ 1000 ભરે છે અને જે મહિનાઓ દરમિયાન વૉટર હીટર વાપરે તે દરમ્યાન તેનું સરેરાશ માસિક વીજબિલ ₹ 1240 ભરે છે. વૉટર હીટર વાપરવાનો ખર્ચ ₹ 8.00 પ્રતિ કલાક છે. દિવસ દરમિયાન સરેરાશ કેટલા કલાક વૉટર હીટર વપરાય છે તે શોધો.

A2.3 કેટલાંક ગાણિતિક મોડેલ

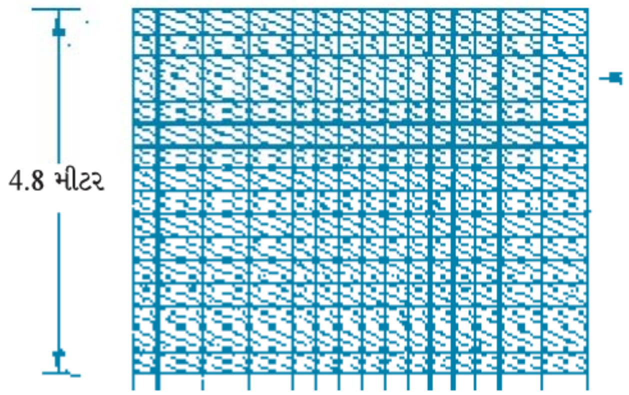
હજી સુધી આપણી ચર્ચામાં કાંઈ જ નવું નથી. આ વિભાગમાં આપણે અગાઉ જેની ચર્ચા કરેલી તે ત્રણ સોપાનોમાં એક બીજું સોપાન ઉમેરવા જઈ રહ્યાં છીએ. આ સોપાનને યથાર્થતા કહે છે. *યથાર્થતા* એટલે શું ? ચાલો આપણે જોઈએ, જીવનની વ્યવહારુ પરિસ્થિતિમાં, આપણે એવું મોડેલ ન સ્વીકારી શકીએ કે જે માત્ર ઉકેલ આપતું હોય અને તે વાસ્તવિકતાને અનુરૂપ ન હોય. વાસ્તવિકતાની સાપેક્ષ ઉકેલને ચકાસવાની પ્રક્રિયા અને જો જરૂરી હોય તો ગાણિતિક વર્ણનમાં સુધારા-વધારા કરવાની ક્રિયાને *યથાર્થતા* કહે છે. મોડેલિંગનું આ અગત્યનું સોપાન છે. આ વિભાગમાં તમને આ સોપાનનો પરિચય કરાવીશું.

પ્રથમ, જેમાં *યથાર્થતા* બાદ આપણા મોડેલને સુધારવું નહિ પડે એવું સ્વીકારીશું. ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 4 : ધારો કે તમારી પાસે 6 મીટર લંબાઈ અને 5 મીટર પહોળાઈનો એક ઓરડો છે. તમે આ રૂમના ભોયતળિયાને 30 સેમી લંબાઈની ચોરસ લાદીથી ઢાંકવાનો છે. તો કેટલી લાદી જોઈએ ? ગાણિતિક મોડેલ રચી આ કૂટપ્રશ્નને ઉકેલો.

ઉકેલ : નિર્માણ : આ કૂટપ્રશ્નને ઉકેલવા માટે આપણે ઓરડાનું ક્ષેત્રફળ અને એક લાદીનું ક્ષેત્રફળ ધ્યાનમાં લેવું પડશે.

લાદીની બાજુનું માપ 0.3 મીટર છે. ઓરડાની લંબાઈ 6 મીટર હોવાથી, આપણે $\frac{6}{0.3} = 20$ લાદીઓ લંબાઈની એક હારમાં ગોઠવી શકાય. (જુઓ આકૃતિ A2.1.)



આકૃતિ A2.1

ઓરડાની પહોળાઈ 5 મીટર હોવાથી આપણને $\frac{5}{0.3} = 16.67$ મળે. આથી આપણે એક સ્તંભમાં (ઊભી હારમાં) 16 લાદીઓ ગોઠવી શકીએ. જોકે $16 \times 0.3 = 4.8$, $5 - 4.8 = 0.2$ મીટર પહોળાઈવાળો ભાગ લાદીઓથી ઢંકાશે નહિ. આ ભાગને આપણે બીજી લાદીઓ કાપીને ઢાંકવો પડશે, ભોયતળિયાની પહોળાઈનો 0.2 મીટર ભાગ ઢાંક્યા વગરનો રહી ગયો અને તે લાદીની લંબાઈ 0.3 મીટરના અડધા કરતા વધારે છે. આથી આપણે લાદીને બે સમાન ટુકડામાં તોડી શકીશું નહિ અને તેના બંને ટુકડાઓનો બાકી રહેતો ભાગ ઢાંકવામાં ઉપયોગ કરી શકીશું નહિ.

ગાણિતિક વર્ણન : આપણી પાસે

જરૂરી લાદીઓની કુલ સંખ્યા = (લંબાઈમાં રહેલી લાદીઓની સંખ્યા × પહોળાઈમાં રહેલી લાદીઓની સંખ્યા)
+ બાકીના ખુલ્લા ભાગમાં જરૂરી લાદીઓની સંખ્યા (1)

ઉકેલ : આપણે આગળ કહ્યું એ પ્રમાણે, લંબાઈમાં વપરાતી લાદીઓની સંખ્યા 20 અને પહોળાઈમાં વપરાતી લાદીઓની સંખ્યા 16 છે. છેલ્લી હાર માટે આપણે વધુ 20 લાદીઓની જરૂર પડશે. આ કિંમતો પરિણામ (1)માં મૂકતાં આપણને $(20 \times 16) + 20 = 320 + 20 = 340$ મળશે.

અર્થઘટન : ભોયતળિયું ઢાંકવા માટે આપણને 340 લાદીઓની જરૂર પડશે.

યથાર્થતા : વ્યવહારુ જીવનમાં તમારો કડિયો તમને કેટલીક વધારે લાદીઓ લાવવાનું કહેશે. કારણ કે લાદીઓની તેમના માપમાં કાપવા જતાં કેટલીક લાદીઓ તૂટી જશે (નુકસાન થશે) અને આ સંખ્યા તમારા કડિયાની આવડત પર નિર્ભર છે. પરંતુ, આ માટે આપણે સમીકરણ (1)માં સુધારો કરવાની જરૂર નથી. આ સમીકરણ આપણને કેટલી લાદીઓની જરૂર પડશે તેનો અંદાજિત ખ્યાલ આપે છે. આથી આપણે અહીં અટકીએ.

ચાલો, આપણે એક બીજી પરિસ્થિતિ જોઈએ.

ઉદાહરણ 5 : વર્ષ 2000 માં યુ.એસ.ના 191 સભ્યદેશોએ એક જાહેરનામા પર હસ્તાક્ષર કર્યા. આ જાહેરનામામાં, વર્ષ 2015 સુધીમાં વિકાસના ચોક્કસ ધ્યેયને પહોંચવા આ દેશો સહમત થયા. તેને સહસ્રાબ્દિ વિકાસ ધ્યેયો (*Millenium Development Goals*) કહે છે. એમાંનો એક ધ્યેય જાતીય સમાનતા છે. આ ધ્યેય સિદ્ધ થયો છે કે નહિ તે માટેનો એક

સંકેત પ્રાથમિક, માધ્યમિક અને તૃતીય શિક્ષણમાં રહેલા કુમારો અને કન્યાઓનો ગુણોત્તર છે. ભારતે પણ જાહેરનામામાં હસ્તાક્ષર કરેલા હોવાથી તે આ ગુણોત્તર વધારવા માટે પ્રતિબદ્ધ છે. પ્રાથમિક શાળાઓમાં નોંધાયેલી કન્યાઓની ટકાવારી નીચે કોષ્ટક A2.1 માં આપેલી છે :

કોષ્ટક A2.1

વર્ષ	નોંધણી (ટકામાં)
1991-92	41.9
1992-93	42.6
1993-94	42.7
1994-95	42.9
1995-96	43.1
1996-97	43.2
1997-98	43.5
1998-99	43.5
1999-2000	43.6*
2000-01	43.7*
2001-02	44.1*

મૂળ : શૈક્ષણિક આંકડાશાસ્ત્ર, શિક્ષણવિભાગનું વૅબ પેજ, GOI.

* આ માહિતી કામચલાઉ છે.

આ માહિતીનો ઉપયોગ કરીને ગાણિતિક રીતે વર્ણવો કે કયા દરે કન્યાઓનો પ્રાથમિક શાળામાં નોંધણીનો ગુણોત્તર વધી રહ્યો છે. વળી કયા વર્ષમાં કન્યાઓનો નોંધણી ગુણોત્તર 50 ટકાએ પહોંચશે તેનો અંદાજ લગાવો.

ઉકેલ : ચાલો પ્રથમ આ સમસ્યાને ગાણિતિક કૂટપ્રશ્નમાં રૂપાંતરિત કરીએ.

સોપાન 1 : નિર્માણ : કોષ્ટક A2.1 વર્ષ 1991-92, 1992-93 વગેરેમાં થયેલ નોંધણી દર્શાવે છે. વિદ્યાર્થીઓ શૈક્ષણિક વર્ષની શરૂઆતમાં જોડાયા હોવાથી આપણે વર્ષોને 1991, 1992 વગેરે લઈ શકીએ. ચાલો આપણે ધારીએ કે પ્રાથમિક શાળામાં જોડાતી કન્યાઓની ટકાવારી કોષ્ટક A2.1 માં દર્શાવેલ દરે જ સતત વધતી જાય છે. આથી વર્ષોની સંખ્યા અગત્યની છે, નહિ કે ચોક્કસ વર્ષ. (આવી સમાન પરિસ્થિતિ વિચારીએ. જ્યારે ₹ 1500 નું 8 ટકાના દરે ત્રણ વર્ષ માટે સાદુ વ્યાજ શોધીએ ત્યારે તે ત્રણ વર્ષનો ગાળો 1999 થી 2002 અથવા 2001 થી 2004 હોય તેનાથી કોઈ જ ફરક પડતો નથી. અગત્યનું શું છે, જે-તે વર્ષો માટે નક્કી કરેલ વ્યાજનો દર) અહીં પણ, આપણે જોઈએ 1991 બાદ નોંધણી વધતી જાય છે. જે 1991 બાદ પસાર થયેલા વર્ષોની સંખ્યા અને તેની નોંધણીની તુલના ચાલો આપણે 1991 ના વર્ષને 0 વર્ષ તરીકે લઈએ અને 1992 માટે 1 લખીએ. કારણ કે 1991 બાદ 1992 માં એક વર્ષ પસાર થયું હોય. આ જ પ્રમાણે આપણે 1993 માટે 2, 1994 માટે 3 વગેરે લખી શકીએ. કોષ્ટક A2.1 હવે કોષ્ટક A2.2 જેવું બની જશે.

કોષ્ટક A2.2

વર્ષ	નોંધાયેલ સંખ્યા (ટકામાં)
0	41.9
1	42.6
2	42.7
3	42.9
4	43.1
5	43.2
6	43.5
7	43.5
8	43.6
9	43.7
10	44.1

નોંધણીમાં થયેલ વધારો નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે :

કોષ્ટક A2.3

વર્ષ	નોંધાયેલ સંખ્યા (ટકામાં)	વધારો
0	41.9	0
1	42.6	0.7
2	42.7	0.1
3	42.9	0.2
4	43.1	0.2
5	43.2	0.1
6	43.5	0.3
7	43.5	0
8	43.6	0.1
9	43.7	0.1
10	44.1	0.4

1991 થી 1992 ના એક વર્ષના સમયગાળાના અંતે નોંધણી 41.9 ટકાથી 42.6 % એટલે કે 0.7% વધી. બીજા વર્ષના અંતે તે 42.6 ટકાથી 42.7 % એટલે કે 0.1% વધી. ઉપરના કોષ્ટક પરથી આપણે વર્ષોની સંખ્યા અને ટકાવારી વચ્ચે ચોક્કસ સંબંધ શોધી ન શકીએ, પરંતુ વધારો યોગ્ય રીતે સ્થિર છે. માત્ર પ્રથમ વર્ષ અને દસ વર્ષમાં કૂદકો જોવા મળે છે.

$$\frac{0.7+0.1+0.2+0.2+0.1+0.3+0+0.1+0.1+0.4}{10} = 0.22$$

આપણે ધારી શકીએ કે નોંધણીનો દર સ્થાયી રીતે 0.22 ટકા વધી રહ્યો છે.

ગાણિતિક વર્ણન : આપણે એવું ધાર્યું કે નોંધણીનો દર સ્થાયી રીતે 0.22 % પ્રતિવર્ષ વધી રહ્યો છે. આથી, નોંધણીની ટકાવારી પ્રથમ વર્ષમાં $= 41.9 + 0.22$

નોંધણીની ટકાવારી બીજા વર્ષે $= 41.9 + 0.22 + 0.22$

$= 41.9 + 2 \times 0.22$

નોંધણીની ટકાવારી ત્રીજા વર્ષે $= 41.9 + 0.22 + 0.22 + 0.22$

$= 41.9 + 3 \times 0.22$

આથી, પ્રત્યેક $n \geqslant 1$ માં નોંધણીની ટકાવારી n માં વર્ષે $= 41.9 + 0.22n$, (1)

હવે, આપણે નોંધણી 50 ટકાએ પહોંચે તે વર્ષોની સંખ્યા શોધવાની છે.

માટે આપણે આ સમીકરણ કે સૂત્રમાં n ની કિંમત શોધવી પડશે.

$$50 = 41.9 + 0.22n \quad (2)$$

સોપાન 2 : ઉકેલ : સમીકરણ (2) n માટે ઉકેલતાં...

$$n = \frac{50 - 41.9}{0.22} - \frac{8.1}{0.22} = 36.8$$

સોપાન 3 : અર્થઘટન :

વર્ષોની સંખ્યા પૂર્ણાંક હોવાથી આપણે ત્યાર બાદનો ઉચ્ચતમ પૂર્ણાંક 37 લઈશું. આથી, નોંધણીની ટકાવારી 50 % $1991 + 37 = 2028$ માં થશે.

શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નમાં સામાન્ય રીતે આપણે અહીં અટકી જઈએ. પરંતુ વાસ્તવિક જીવનની સમસ્યા સાથે કાર્ય કરીએ છીએ માટે આપણે જોવું જોઈએ જીવનની વાસ્તવિક પરિસ્થિતિમાં આ કિંમત કેટલી મર્યાદામાં મેળવી શકાય.

સોપાન 4 : યથાર્થતા :

ચાલો ચકાસીએ કે સૂત્ર (1)એ વાસ્તવિકતાની કેટલું નજીક છે. ચાલો સૂત્ર (1)નો ઉપયોગ કરીને આપણે જે વર્ષો જાણીએ છીએ તે માટે કિંમત મેળવીએ અને તેની આપેલી કિંમતો સાથે તુલના કરી તફાવત શોધીએ. કોષ્ટક A2.4 માં આ કિંમતો આપેલી છે.

કોષ્ટક A2.4

વર્ષ	નોંધણી (ટકામાં)	(1) દ્વારા મળતી કિંમત (ટકામાં)	તફાવત (ટકામાં)
0	41.9	41.90	0
1	42.6	42.12	0.48
2	42.7	42.34	0.36
3	42.9	42.56	0.34
4	43.1	42.78	0.32
5	43.2	43.00	0.20
6	43.5	43.22	0.28
7	43.5	43.44	0.06
8	43.6	43.66	–0.06
9	43.7	43.88	–0.18
10	44.1	44.10	0.00

તમે જોઈ શકો છો કે સૂત્ર (1) દ્વારા મેળવેલ કેટલીક કિંમતો મૂળ કિંમત કરતાં 0.3 % અથવા 0.5 % થી પણ ઓછી છે. હકીકતે પ્રતિ વર્ષ વધારો 1 % થી 2 % હોવાથી આશરે 3 થી 5 વર્ષનો તફાવત વધી શકે છે. આપણે કદાચ એવું સૂત્ર (1) સ્વીકારીએ અને અટકીએ. આ વિકલ્પમાં (1) એ આપણું ગાણિતિક મોડેલ છે.

ધારો કે આપણે એવું નક્કી કરીએ કે આ ભૂલ ઘણી મોટી છે અને આપણે આ નમૂનો સુધારવો છે. તો આપણે સોપાન (1)ના નિર્માણમાં પાછા જવું જોઈએ. સમીકરણ (1) બદલવું જોઈએ. ચાલો આપણે તેમ કરીએ.

સોપાન 1 : પુનઃ નિર્માણ : આપણે એવું ધાર્યું હતું કે કિંમતો સ્થાયી રીતે 0.22 % વધે છે. પરંતુ, આપણે ત્રુટિ ઘટાડવા માટે સુધારણા પરિબળ રજૂ કરીશું. આ માટે આપણે બધી જ ત્રુટિઓની સરાસરી શોધીએ, આ પ્રમાણે

$$\frac{0+0.48+0.36+0.34+0.32+0.2+0.28+0.06-0.06-0.18+0}{10}=0.18$$

આપણે ત્રુટિઓની સરાસરી લઈએ અને આપણા સૂત્રને આ કિંમતથી સુધારીએ.

સુધારેલ ગાણિતિક વર્ણન : ચાલો હવે આપણે ત્રુટિઓની સરાસરીને આપણા નોંધણીની ટકાવારીના સૂત્ર જે (1) આપેલ છે તેમાં ઉમેરીએ. આથી, આપણું સુધારેલ સૂત્ર.

$n \geq 1$ માટે n માં વર્ષમાં નોંધણીની ટકાવારી $= 41.9 + 0.22n + 0.18 = 42.08 + 0.22n$ (3)

આ જ પ્રમાણે આપણે સમીકરણ (2)ને પણ યોગ્ય રીતે સુધારીએ. આથી n માટેનું નવું સમીકરણ :

$$50 = 42.08 + 0.22n \qquad (4)$$

સોપાન 2 : સુધારેલો ઉકેલ : સમીકરણ (4)ને n માટે ઉકેલતા આપણને

$$n = \frac{50 - 42.08}{0.22} = \frac{7.92}{0.22} = 36 \text{ મળશે.}$$

સોપાન 3 : અર્થઘટન : $n = 36$ માટે પ્રાથમિક શાળાઓમાં કન્યાઓની નોંધણી 50 % વર્ષ પછી એટલે કે 1991+36=2027 માં થશે.

સોપાન 4 : યથાર્થતા : ફરી વખત આપણે સૂત્ર (3)નો ઉપયોગ કરવાથી મળેલ કિંમતોની ખરેખર કિંમત સાથે તુલના કરીએ : કોષ્ટક A2.5 માં તુલના આપેલી છે.

કોષ્ટક A2.5

વર્ષ	નોંધણી (ટકામાં)	આપેલ કિંમતો (1) દ્વારા	કિંમતોનો તફાવત	(3)દ્વારા મળતું મૂલ્ય	મૂલ્યોનો તફાવત
0	41.9	41.90	0	41.9	0
1	42.6	42.12	0.48	42.3	0.3
2	42.7	42.34	0.36	42.52	0.18
3	42.9	42.56	0.34	42.74	0.16
4	43.1	42.78	0.32	42.96	0.14
5	43.2	43.00	0.2	43.18	0.02
6	43.5	43.22	0.28	43.4	0.1
7	43.5	43.44	0.06	43.62	– 0.12
8	43.6	43.66	– 0.06	43.84	– 0.24
9	43.7	43.88	– 0.18	44.06	– 0.36
10	44.1	44.10	0	44.28	– 0.18

તમે જોઈ શકો છો કે સૂત્ર (4) દ્વારા મેળવેલ ઘણી બધી કિંમતો સૂત્ર (2) દ્વારા મેળવેલ કિંમત કરતાં વાસ્તવિક કિંમતની વધુ નજીક છે. આ કિસ્સામાં ત્રુટિઓની સરાસરી 0 છે.

આપણે આપણી પ્રક્રિયા અહીં અટકાવીશું. આથી સમીકરણ (4) આપણું ગાણિતિક મોડેલ છે. તે વર્ષો અને કુલ નોંધણીમાંથી કન્યાઓની નોંધણીની ટકાવારી વચ્ચેનો ગાણિતિક સંબંધ આપે છે.

આપણે વૃદ્ધિને દર્શાવતા ગાણિતિક મોડેલની રચના કરી છે.

ઉપર્યુક્ત પરિસ્થિતિમાં જે પ્રક્રિયાને આપણે અનુસર્યા તેને ગાણિતિક મોડેલિંગ કહે છે.

આપણી પાસે રહેલા ગાણિતિક સિદ્ધાંતોની મદદથી આપણે ગાણિતિક મોડેલની રચના કરવા આપણે પ્રયાસ કર્યો. આપણી

પાસે રહેલ માહિતી પરથી અનુમાન લગાવવા માટે વધુ સારા ગાણિતિક સિદ્ધાંતો ઘણા છે. પરંતુ તે બધા આ અભ્યાસક્રમના ક્ષેત્રથી પર છે. આ મોડેલ રચવાનો આપણો ધ્યેય તમને મોડેલિંગ પ્રક્રિયા સમજાવવાનો હતો, નહિ કે આ તબક્કે ચોક્કસ અનુમાન લગાવતા શીખવવાનો.

હવે તમને જીવનની વાસ્તવિક પરિસ્થિતિઓમાં જે સમજ આપણી ચર્ચામાં આપી તે ચકાસવી ગમશે. અહીં તમારા પ્રયત્ન માટે સ્વાધ્યાય આપેલ છે.

સ્વાધ્યાય A2.2

1. 400 મીટરની રેસ ઓલિમ્પિકમાં ઉમેરાઈ છે ત્યારથી ગોલ્ડ મૅડલ મેળવનારાઓના સમય નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલા છે. વર્ષ અને સમય વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવતું ગાણિતિક મોડેલ તૈયાર કરો. આગામી ઓલિમ્પિક માટેના સમયના અંદાજ માટે તેનો ઉપયોગ કરો.

કોષ્ઠક A2.6

વર્ષ	સમય(સેકન્ડમાં)
1964	52.01
1968	52.03
1972	51.08
1976	49.28
1980	48.88
1984	48.83
1988	48.65
1992	48.83
1996	48.25
2000	49.11
2004	49.41

A2.4 મોડેલિંગની પ્રક્રિયા, તેના ફાયદાઓ અને મર્યાદાઓ

ચાલો આપણે ગાણિતિક મોડેલિંગના જે ઉદાહરણોની ચર્ચા કરી તેના પાસાઓની સાથે આપણી ચર્ચા હવે પૂર્ણ કરીએ. અગાઉના વિભાગોના આધારે આપણે હવે મોડેલિંગમાં સમાવિષ્ટ સોપાનોની સંક્ષિપ્ત રૂપરેખા આપવાની સ્થિતિમાં છીએ.

સોપાન 1 : નિર્માણ : તમે વિભાગ A2.2 ના ઉદાહરણ (1)ના નિર્માણનો ભાગ અને A2.3 નું મોડેલ જેની આપણે ચર્ચા કરી તેના નિર્માણના ભાગ વચ્ચેનો તફાવત નોંધ્યો હશે. ઉદાહરણ (1)ની બધી જ માહિતી ઉપયોગમાં લઈ શકાય તેવા તૈયાર સ્વરૂપમાં છે, પરંતુ A2.3 માં આપેલ મોડેલમાં આવું ન હતું. વધુમાં તે આપણને ક્યારેક ગાણિતિક વર્ણન શોધવા તરફ દોરી જાય. આપણે આપણું પ્રથમ સૂત્ર ચકાસ્યું અને મેળવ્યું કે તે બીજા સૂત્ર જેટલું સારુ ન હતું. આ સામાન્ય રીતે વ્યાપક સ્વરૂપે સત્ય છે. જેમકે જ્યારે વ્યવહારુ જીવનની પરિસ્થિતિના મોડેલ લઈએ ત્યારે પ્રથમ મોડેલમાં મોટે ભાગે પરિવર્તન કરવું પડે. જ્યારે વાસ્તવિક જીવનની સમસ્યા ઉકેલવાની હોય ત્યારે નિર્માણમાં ઘણો સમય લાગે છે. ઉદાહરણ તરીકે ન્યૂટનના ગતિના ત્રણ

નિયમો; જે ગતિનું ગાણિતિક વર્ણન છે તેને સરળતાથી દર્શાવી શકાય પરંતુ ન્યૂટને ખૂબ જ મોટા પ્રમાણમાં માહિતી અને અગાઉના વૈજ્ઞાનિકોએ કરેલાં કાર્યોનો અભ્યાસ કરી નિયમો મેળવ્યા હતા.

નિર્માણમાં નીચેનાં ત્રણ સોપાનો સંકળાયેલાં છે :

(i) સમસ્યા કથન : મોટે ભાગે સમસ્યા અસ્પષ્ટ રીતે રજૂ થતી હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે કુમાર અને કન્યાઓની નોંધણી સમાન થાય તેની ખાતરી કરવી તે વિશાળ ધ્યેય છે. આનો અર્થ કદાચ એ થાય કે શાળાએ જવાની ઉંમરના 50% કુમારો અને શાળાએ જવાની ઉંમરની 50% કન્યાઓની નોંધણી થવી જોઈએ. બીજી રીતે કહીયે તો શાળાએ જતા બાળકોમાં 50% કન્યાઓ હોય. આપણી સમસ્યામાં આપણે બીજો અભિગમ અપનાવેલ છે.

(ii) સંબંધિત પરિબળોને ઓળખવા : નક્કી કરો કે કયા જથ્થાઓ અને સંબંધો આપણી સમસ્યા માટે અગત્યના છે અને જેને અવગણી શકાય તેવા કયા અગત્યના નથી. ઉદાહરણ તરીકે પ્રાથમિક શાળામાં નોંધણી બાબતમાં આપણી સમસ્યામાં ગત વર્ષે નોંધાયેલ કન્યાઓની ટકાવારીની ચાલુ વર્ષે નોંધાનાર કન્યાઓની ટકાવારી પર અસર પડે છે, કારણ કે જેમ વધુ ને વધુ કન્યાઓ શાળામાં નોંધાય છે તેમ વાલીઓ એવું મહેસૂસ કરે છે કે પોતાની દીકરીઓને પણ શાળામાં મૂકવી જોઈએ. પરંતુ આપણે આ પરિબળને અવગણ્યું છે. કારણ કે આ કદાચ ત્યારે જ ઉપયોગી બને જ્યારે નોંધણી ચોક્કસ ટકાવારી કરતાં વધી જાય. વળી, આ પરિબળને ઉમેરતાં આપણો નમૂનો વધારે જટિલ બની જાય.

(iii) ગાણિતિક વર્ણન : હવે ધારો કે સમસ્યા શું છે તે બાબતે આપણે સ્પષ્ટ છીએ અને કયા પાસાઓ બીજા પાસાઓ કરતાં વધુ સંબંધિત છે, તો આપણે જે પાસાઓ સંબંધિત છે તેમની વચ્ચેનો સંબંધ સમીકરણ, આલેખ કે બીજા કોઈ યોગ્ય ગાણિતિક વર્ણન દ્વારા શોધવો પડે. અને જો તે સમીકરણ હોય, તો બધા જ અગત્યનાં પાસાઓને ગાણિતિક સમીકરણમાં ચલ તરીકે દર્શાવવાં જોઈએ.

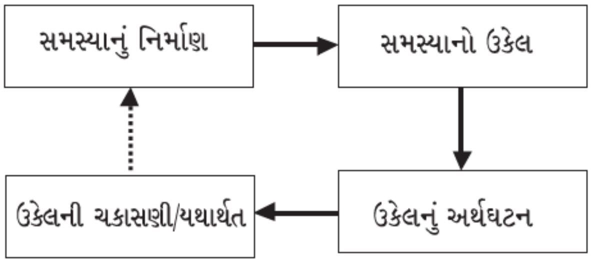
સોપાન 2 : ઉકેલ મેળવવો : ગાણિતિક નિર્માણ કંઈ ઉકેલ આપતા નથી. આપણે આ કૂટપ્રશ્નને સમકક્ષ ગાણિતિક રીતે ઉકેલવો પડશે. અહીં તમારું ગાણિતિક જ્ઞાન ઉપયોગી થશે.

સોપાન 3 : ઉકેલનું અર્થઘટન : ગાણિતિક ઉકેલ એ નમૂનામાં કેટલાક ચલની કિંમત કે કિંમતો દર્શાવે છે. આપણે જીવનના વાસ્તવિક કોયડાઓમાં જઈએ અને જોઈએ કે આ કિંમતોનો શો અર્થ થાય છે.

સોપાન 4 : ઉકેલની યથાર્થતા : આપણે A2.3 માં જોયું કે ઉકેલ મેળવ્યા બાદ તે વાસ્તવિકતાને અનુરૂપ છે કે નહિ તે આપણે ચકાસવું જોઈએ. જો તે અનુરૂપ હોય તો ગાણિતિક મોડેલ સ્વીકાર્ય છે. જો ગાણિતિક ઉકેલ અનુરૂપ ન હોય, તો આપણે ફરી નિર્માણના સોપાનમાં જઈ આપણું મોડેલ સુધારવા પ્રયત્ન કરવો જોઈએ.

પ્રક્રિયાનું આ સોપાન એ શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નો અને ગાણિતિક મોડેલિંગ વચ્ચેનો મહત્ત્વનો તફાવત છે. આ મોડેલિંગનું ખૂબ જ અગત્યનાં સોપાનો પૈકીનું એક છે. તે શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નોમાં જોવા મળતું નથી. જોકે કેટલાક વ્યવહારુ જીવનની પરિસ્થિતિઓમાં સમસ્યા સરળ હોય તો સાચો ઉકેલ સીધો મળી જાય ત્યારે યથાર્થતાની જરૂર પડતી નથી. આપણે A2.3 ના પ્રથમ મોડેલમાં આ વિચાર્યું હતું.

પૃષ્ઠ 287 પર દર્શાવેલ આકૃતિ A2.2 ગાણિતિક મોડેલિંગના સોપાનોનો ક્રમ દર્શાવતો સારાંશ આપેલ છે. યથાર્થતાના સોપાનથી નિર્માણના સોપાન તરફથી ગતિને ત્રૂટક તીર વડે દર્શાવેલ છે. આમ થવાનું કારણ એ છે કે, આ સોપાનો દરેક વખતે ફરી કરવાની જરૂર હોતી નથી.



આકૃતિ A2.2

હવે તમે ગાણિતિક મોડેલિંગમાં સમાવિષ્ટ તબક્કાઓનો અભ્યાસ કર્યો. ચાલો આપણે તેનાં કેટલાક પાસાઓની ચર્ચા કરીએ.

ગાણિતિક મોડેલિંગનો ધ્યેય એ છે કે વ્યવહારુ જીવનની સમસ્યા વિશેની કેટલીક અગત્યની માહિતી મેળવવી અને તેનું ગાણિતિક કૂટપ્રશ્નમાં રૂપાંતર કરવું. તે ખાસ કરીને જ્યારે સીધા અવલોકન અથવા પ્રયોગો કરીને આ માહિતી મેળવવી શક્ય ન હોય અથવા વિધિ ખૂબ જ ખર્ચાળ હોય ત્યારે ઉપયોગી નીવડે છે.

તમને નવાઈ પણ લાગશે કે શા માટે આપણે ગાણિતિક મોડેલિંગ હાથ ધરીએ છીએ ? ચાલો આપણે મોડેલિંગના કેટલાક ફાયદાઓ જોઈએ. ધારો કે આપણે મથુરા રિફાઈનરીમાંથી વિસર્જિત થતા પ્રદુષિત પદાર્થોની તાજમહેલ પર થતા ખવાણની અસરનો અભ્યાસ કરવો છે. આપણે તાજમહેલ પર સીધા પ્રયોગ હાથ ન ધરી શકીએ, કે તેમ કરવું કદાચ સલામત પણ નથી. આપણે પ્રમાણિત કરેલું ભૌતિક મોડેલ વાપરી શકીએ પરંતુ આ માટે આપણને કદાચ ખાસ સુવિધાઓની જરૂર પડે. તે ખર્ચાળ હોઈ શકે. અહીં ગાણિતિક નમૂનો ખૂબ જ ઉપયોગી થાય.

ધારો કે પાંચ વર્ષ બાદ આપણને કેટલી પ્રાથમિક શાળાઓની જરૂર પડશે તે જાણવા માંગીએ તો આપણે આ સમસ્યાને માત્ર ગાણિતિક નમૂનાનો ઉપયોગ કરી ઉકેલી શકીએ. આ જ પ્રમાણે, વૈજ્ઞાનિકો કેટલીક અસાધારણ ઘટનાઓનું અસ્તિત્વ પણ માત્ર મોડેલિંગથી વર્ણવવા સમર્થ છે.

તમે A2.3 વિભાગમાં જોયું કે, બીજા ઉદાહરણમાં વધુ સારી પદ્ધતિથી ઉકેલને સુધારવા આપણે પ્રયત્ન કર્યો. પરંતુ આપણે અટકી ગયા કારણ કે આપણી પાસે ગાણિતિક ઉપકરણો નથી. વ્યવહારુ જીવનમાં પણ આવું અવારનવાર બને છે કે આપણી પાસે ગાણિતિક ઉપકરણો પ્રાપ્ય ન હોવાથી અંદાજિત ઉકેલોથી સંતુષ્ટ થવું પડે છે. ચોક્કસ ઉકેલ આપતાં ગાણિતિક ઉપકરણો પ્રાપ્ય ન હોવાથી મોડેલિંગમાં ખૂબ જ જટિલ હોય તેવાં નમૂનારૂપ સમીકરણો વપરાય છે.

તમને થશે કે કઈ સીમા સુધી આપણે આપણો મોડેલિંગ સુધારવું જોઈએ. આ માટે આપણે વધુ પરિબળોને ધ્યાનમાં લેવા જરૂરી છે. જ્યારે આપણે તેવું કરીએ તો આપણે આપણાં ગાણિતિક સમીકરણોમાં વધુ ચલ ઉમેરવા પડે - જો આપણે તે ઉમેરીએ તો તે વધુ જટિલ નમૂનો બની જાય કે જેથી તેનો ઉપયોગ કરવો મુશ્કેલ થાય. મોડેલિંગ ઉપયોગમાં સરળ હોય તેવું જ હોવું જોઈએ. સારું મોડેલ બે બાબતોને સમતોલ રાખે છે :

1. ચોક્સાઈ એટલે કે વાસ્તવિકતાની કેટલી નજીક છે.
2. સરળતાથી ઉપયોગ કરી શકાય.

ઉદાહરણ તરીકે ન્યૂટનના ગતિના નિયમો ખૂબ જ સરળ છે એટલું જ નહિ ઘણીબધી ભૌતિક પરિસ્થિતિઓમાં મોડેલિંગ માટે પૂરતા સક્ષમ છે.

આથી, શું ગાણિતિક મોડેલિંગ આપણી બધી જ સમસ્યાઓના ઉકેલ આપે છે ? તદ્દન નહિ, તેને પણ પોતાની મર્યાદાઓ છે.

આથી, આપણે ધ્યાનમાં રાખવું જોઈએ મોડેલ એ જગતની વાસ્તવિક સમસ્યાઓનું માત્ર સરળીકરણ છે અને તે બન્ને (મોડેલ અને જગતની વાસ્તવિક સમસ્યાઓ) સમાન નથી. આ કોઈ રાષ્ટ્ર અને તે રાષ્ટ્રની લાક્ષણિકતાઓ દર્શાવતા નકશા વચ્ચેના તફાવત જેવું થયું. આપણે નકશા પરથી કોઈ પ્લેનની દરિયાની સપાટીથી ઊંચાઈ શોધી શકીએ. પરંતુ ત્યાંના લોકોની લાક્ષણિકતાઓ શોધી ન શકીએ. આથી આપણે મોડેલ જે હેતુ માટે તૈયાર થયો હોય તે પૂરતો ઉપયોગ કરી શકીએ. તેને રચવા દરમિયાન અવગણેલા તમામ ઘટકો યાદ રાખવા પડે. આપણે મોડેલ જ્યાં લાગુ પાડી શકાય તે મર્યાદામાં જ તેનો ઉપયોગ કરી શકીએ. આગળના ધોરણમાં આપણે આ પાસા પર વધુ ચર્ચા કરીશું.

સ્વાધ્યાય A2.3

1. પાઠ્યપુસ્તકમાં આવતા શાબ્દિક કોયડાઓના ઉકેલ ગાણિતિક મોડેલિંગની પ્રક્રિયાથી કેમ અલગ છે ?

2. ધારો કે તમે ચાર રસ્તા પાસેના ટ્રાફિક જંક્શન પર વાહનોનો પ્રતીક્ષા સમય લઘુતમ કરવા ઈચ્છો છો. આમાંથી કયાં પરિબળો અગત્યના છે અને કયાં પરિબળો અગત્યના નથી ?

(i) પેટ્રોલની કિંમત

(ii) ચાર અલગ અલગ માર્ગેથી આવતાં વાહનોનો દર

(iii) સાઈકલ અને રિક્ષા જેવા ધીમે ચાલતાં વાહનો તથા કાર અને સ્કૂટર જેવા ઝડપી ચાલતાં વાહનોનો ગુણોત્તર

A2.5 સારાંશ

આ પરિશિષ્ટમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નો ઉકેલવામાં સમાવિષ્ટ સોપાનો

2. કેટલાક ગાણિતિક મોડેલનું નિર્માણ (રચના)

3. ગાણિતિક મોડેલિંગમાં સમાવિષ્ટ સોપાનો નીચેના ખાનામાં દર્શાવેલ છે :

1. નિર્માણ : (i) સમસ્યાને દર્શાવવી
   (ii) સંબંધિત પરિબળોને ઓળખવાં
   (iii) ગાણિતિક વર્ણન
2. ઉકેલ શોધવો.
3. જગતની વાસ્તવિક સમસ્યાના સંદર્ભે ઉકેલનું અર્થઘટન કરવું.
4. અભ્યાસ કરેલ સમસ્યાઓ માટે કઈ સીમા સુધી પ્રતિનિધિત્વ ધરાવે છે તે ચકાસવું / માન્ય કરવું.

4. ગાણિતિક મોડેલિંગના હેતુઓ, ફાયદાઓ અને મર્યાદાઓ

જવાબો / સૂચનો

સ્વાધ્યાય 1.1

1. હા, $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3}$ વગેરે... છેદ q ને ઋણ પૂર્ણાંક પણ લઈ શકાય છે.

2. સંખ્યાઓ 3 અને 4 ની વચ્ચે અનંત સંમેય સંખ્યાઓ હોઈ શકે છે. તેને મેળવવાની એક રીત આ પણ છે.

$3 = \frac{21}{6+1}$, $4 = \frac{28}{6+1}$ લેતાં આપણને $\frac{22}{7}, \frac{23}{7}, \frac{24}{7}, \frac{25}{7}, \frac{26}{7}, \frac{27}{7}$ એ 6 સંખ્યાઓ મળશે

3. $\frac{3}{5} = \frac{30}{50}, \frac{4}{5} = \frac{40}{50}$. તેથી પાંચ સંમેય સંખ્યાઓ : $\frac{31}{50}, \frac{32}{50}, \frac{33}{50}, \frac{34}{50}, \frac{35}{50}$.

4. (i) સત્ય, કારણ કે પૂર્ણ સંખ્યાના સંગ્રહમાં બધી પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સમાવેશ થાય છે.

(ii) અસત્ય, ઉદાહરણ તરીકે -2 એ પૂર્ણ સંખ્યા નથી.

(iii) અસત્ય, ઉદાહરણ તરીકે $\frac{1}{2}$ એ સંમેય સંખ્યા છે. પરંતુ પૂર્ણ સંખ્યા નથી.

સ્વાધ્યાય 1.2

1. (i) સત્ય, કારણ કે વાસ્તવિક સંખ્યાનો સંગ્રહ એ સંમેય સંખ્યાઓ અને અસંમેય સંખ્યાઓથી બને છે.

(ii) અસત્ય, કારણ કે કોઈ પણ ઋણ સંખ્યા એ કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યાનું વર્ગમૂળ નથી હોતી.

(iii) અસત્ય, ઉદાહરણ તરીકે 2 વાસ્તવિક સંખ્યા છે, પરંતુ અસંમેય નથી.

2. ના, ઉદાહરણ તરીકે $\sqrt{4} = 2$ એક સંમેય સંખ્યા છે.

3. આકૃતિ 1.8 માં દર્શાવેલી પ્રક્રિયાનું કેટલીકવાર પુનરાવર્તન કરો. પહેલાં $\sqrt{4}$ મેળવો અને પછી $\sqrt{5}$ મેળવો.

સ્વાધ્યાય 1.3

1. (i) 0.36 સાન્ત (ii) $0.\overline{09}$ અનંત આવૃત (iii) 4.125, સાન્ત

(iv) $0.\overline{230769}$, અનંત આવૃત (v) $0.1\overline{8}$, અનંત આવૃત (vi) 0.8225, સાન્ત

2. $\frac{2}{7} = 2 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{285714}$, $\frac{3}{7} = 3 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{428571}$

$\frac{4}{7} = 4 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{571428}$, $\frac{5}{7} = 5 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{714285}$

$\frac{6}{7} = 6 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{857142}$

3. (i) $\frac{2}{3}$ (ધારો કે $x = 0.666...$ તેથી $10x = 6.666$, અથવા $10x = 6 + x$ અથવા $x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

(ii) $\frac{43}{90}$ (iii) $\frac{1}{999}$

4. 1 (ધારો કે $x = 0.9999...$ તેથી $10x = 9.999...$ તેથી $10x = 9 + x$ તેથી $x = 1$)

5. $0.\overline{0588235294117647}$

6. q ના અવિભાજ્ય અવયવો ફક્ત 2 ના ઘાત અથવા 5 ના ઘાત અથવા બંનેના ઘાત સ્વરૂપે હોય છે.

7. 0.01001000100001..., 0.202002000200002..., 0.003000300003...

8. 0.75075007500075000075..., 0.767076700767000..., 0.808008000800008...

9. (i) અને (v) અસંમેય સંખ્યા (ii), (iii) અને (iv) સંમેય

સ્વાધ્યાય 1.4

1. 2.665 માટે વિભાગ 1.4 માં દર્શાવેલ પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરો.

2. ઉદાહરણ 11 મુજબ

સ્વાધ્યાય 1.5

1. (i) અસંમેય (ii) સંમેય (iii) સંમેય (iv) અસંમેય (v) અસંમેય

2. (i) $6 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$ (ii) 6 (iii) $7 + 2\sqrt{10}$ (iv) 3

3. અહીં વિરોધાભાસ નથી. યાદ રાખો કે જ્યારે કોઈ પણ માપપટ્ટીથી કે અન્ય સાધનથી લંબાઈ માપો ત્યારે તમને ફક્ત સંમેય સંખ્યાનું એક આસન્ન મૂલ્ય મળશે. તેથી તમે એવું ન માનશો કે c અથવા d અસંમેય છે.

4. આકૃતિ 1.17 નો સંદર્ભ લો.

5. (i) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ (ii) $\sqrt{7} + \sqrt{6}$ (iii) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{3}$ (iv) $\frac{\sqrt{7} + 2}{3}$

સ્વાધ્યાય 1.6

1. (i) 8 (ii) 2 (iii) 5 **2.** (i) 27 (ii) 4 (iii) 8 (iv) $\frac{1}{5}$ $\left[(125)^{-\frac{1}{3}} = \left(5^3\right)^{-\frac{1}{3}} = 5^{-1}\right]$

3. (i) $2^{\frac{13}{15}}$ (ii) 3^{-21} (iii) $11^{\frac{1}{4}}$ (iv) $56^{\frac{1}{2}}$

સ્વાધ્યાય 2.1

1. (i) અને (ii) એક ચલ બહુપદીઓ છે. (v) ત્રિચલ બહુપદી છે. (iii), (iv) બહુપદીઓ નથી કારણ કે દરેકમાં ચલનો ઘાતાંક પૂર્ણ સંખ્યા નથી.

2. (i) 1 (ii) –1 (iii) $\frac{\pi}{2}$ (iv) 0

3. $3x^{35} - 4$; $\sqrt{2}\,y^{100}$ (તમે જુદા જુદા સહગુણકો ધરાવતી બીજી અન્ય વધારે બહુપદીઓ લખી શકો.)

4. (i) 3 (ii) 2 (iii) 1 (iv) 0

5. (i) દ્વિઘાત (ii) ત્રિઘાત (iii) દ્વિઘાત (iv) સુરેખ (v) સુરેખ

(vi) દ્વિઘાત (vii) ત્રિઘાત

સ્વાધ્યાય 2.2

1. (i) 3 (ii) –6 (iii) –3

2. (i) 1, 1, 3 (ii) 2, 4, 4 (iii) 0, 1, 8 (iv) –1, 0, 3

3. (i) હા (ii) ના (iii) હા (iv) હા (v) હા

(vi) હા (vii) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ બહુપદીનું શૂન્ય છે પરંતુ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ એ શૂન્ય નથી (viii) ના

4. (i) –5 (ii) 5 (iii) $\frac{-5}{2}$ (iv) $\frac{2}{3}$

(v) 0 (vi) 0 (vii) $-\frac{d}{c}$

સ્વાધ્યાય 2.3

1. (i) 0 (ii) $\frac{27}{8}$ (iii) 1 (iv) $-\pi^3 + 3\pi^2 - 3\pi + 1$

(v) $-\frac{27}{8}$

2. $5a$ **3.** ના, કારણ કે શેષ શૂન્ય નથી.

સ્વાધ્યાય 2.4

1. $(x + 1)$ એ (i) નો અવયવ છે પરંતુ (ii), (iii) અને (iv) નો અવયવ નથી.

2. (i) હા (ii) ના (iii) હા

3. (i) –2 (ii) $-\left(2 + \sqrt{2}\right)$ (iii) $\sqrt{2} - 1$ (iv) $\frac{3}{2}$

4. (i) $(3x-1)(4x-1)$ (ii) $(x+3)(2x+1)$ (iii) $(2x+3)(3x-2)$ (iv) $(x+1)(3x-4)$

5. (i) $(x-2)(x-1)(x+1)$ (ii) $(x+1)(x+1)(x-5)$

(iii) $(x+1)(x+2)(x+10)$ (iv) $(y-1)(y+1)(2y+1)$

સ્વાધ્યાય 2.5

1. (i) $x^2+14x+40$ (ii) $x^2-2x-80$ (iii) $9x^2-3x-20$ (iv) $y^4-\frac{9}{4}$ (v) $9-4x^2$

2. (i) 11021 (ii) 9120 (iii) 9984

3. (i) $(3x+y)(3x+y)$ (ii) $(2y-1)(2y-1)$ (iii) $\left(x+\frac{y}{10}\right)\left(x-\frac{y}{10}\right)$

4. (i) $x^2+4y^2+16z^2+4xy+16yz+8xz$

(ii) $4x^2+y^2+z^2-4xy-2yz+4xz$

(iii) $4x^2+9y^2+4z^2-12xy+12yz-8xz$

(iv) $9a^2+49b^2+c^2-42ab+14bc-6ac$

(v) $4x^2+25y^2+9z^2-20xy-30yz+12xz$

(vi) $\frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{4}+1-\frac{ab}{4}-b+\frac{a}{2}$

5. (i) $(2x+3y-4z)(2x+3y-4z)$ (ii) $\left(-\sqrt{2}\,x+y+2\sqrt{2}\,z\right)\left(-\sqrt{2}\,x+y+2\sqrt{2}\,z\right)$

6. (i) $8x^3+12x^2+6x+1$ (ii) $8a^3-27b^3-36a^2b+54ab^2$

(iii) $\frac{27}{8}x^3+\frac{27}{4}x^2+\frac{9}{2}x+1$ (iv) $x^3-\frac{8}{27}y^3-2x^2y+\frac{4}{3}xy^2$

7. (i) 970299 (ii) 1061208 (iii) 994011992

8. (i) $(2a+b)(2a+b)(2a+b)$ (ii) $(2a-b)(2a-b)(2a-b)$

(iii) $(3-5a)(3-5a)(3-5a)$ (iv) $(4a-3b)(4a-3b)(4a-3b)$

(v) $\left(3p-\frac{1}{6}\right)\left(3p-\frac{1}{6}\right)\left(3p-\frac{1}{6}\right)$

10. (i) $(3y+5z)(9y^2+25z^2-15yz)$ (ii) $(4m-7n)(16m^2+49n^2+28mn)$

11. $(3x+y+z)(9x^2+y^2+z^2-3xy-yz-3xz)$

12. જમણી બાજુનું સાદુરૂપ આપો.

13. નિત્યસમ VIII માં $x+y+z=0$ મૂકો.

14. (i) -1260, $a=-12$, $b=7$, $c=5$ લો. અહીં $a+b+c=0$. પ્રશ્ન 13 માં આ પરિણામનો ઉપયોગ કરો.

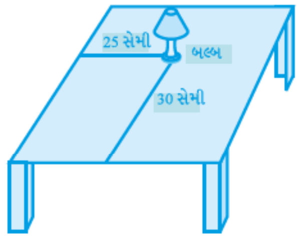
(ii) 16380

15. (i) લંબાઈ = $5a - 3$, પહોળાઈ = $5a - 4$ એ એક શક્ય જવાબ છે. (ii) લંબાઈ = $7y - 3$, પહોળાઈ = $5y + 4$ એ એક શક્ય જવાબ છે.

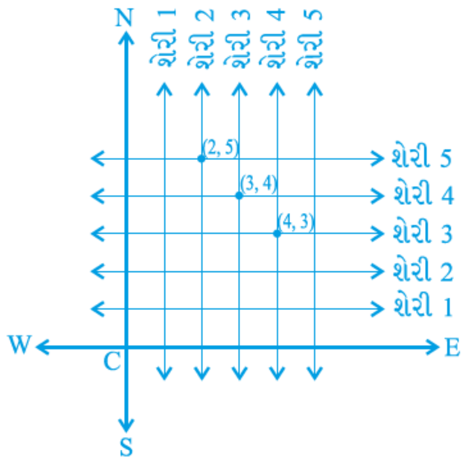
16. (i) એક શક્ય જવાબ $3, x$ અને $x - 4$ છે. (ii) એક શક્ય જવાબ $4k$, $3y + 5$ અને $y - 1$ છે.

સ્વાધ્યાય 3.1

1. બલ્બને બિંદુ અને ટેબલને સમતલ તરીકે લો. ટેબલની કોઈ બે પરસ્પર લંબ ધાર પસંદ કરો. લાંબી ધારથી બલ્બનું અંતર માપો. ધારો કે તે 25 સેમી છે. ફરીથી ટૂંકી ધારથી બલ્બનું અંતર માપો. ધારો કે તે 30 સેમી છે. તમે બલ્બનું સ્થાન (30, 25) અથવા (25, 30) રીતે લખી શકો, જે તમે નક્કી કરેલા ક્રમ પર આધારિત છે.



2. શેરીનો નકશો બાજુમાં આપેલી આકૃતિમાં દર્શાવેલ છે. શેરીઓ જ્યાં ભેગી થાય તે બિંદુઓને આકૃતિમાં અંકિત કરેલ છે. તે અનન્ય મળશે, કારણ કે તેમને નિર્દેશિત કરવા માટે માટે આપણે બે સંબંધિત રેખાઓનો ઉપયોગ કર્યો છે.



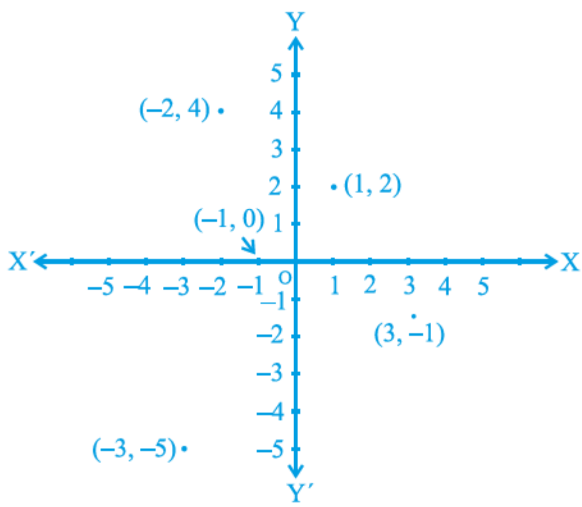
સ્વાધ્યાય 3.2

1. (i) x - અક્ષ y - અક્ષ (ii) ચરણ (iii) ઊગમબિંદુ

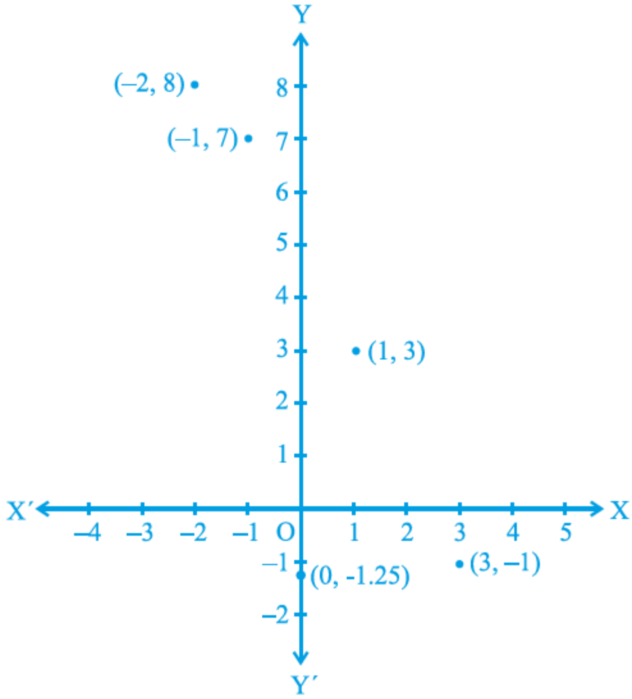
2. (i) (–5, 2) (ii) (5, –5) (iii) E (iv) G (v) 6 (vi) –3 (vii) (0, 5) (viii) (–3, 0)

સ્વાધ્યાય 3.3

1. બિંદુ (–2, 4) દ્વિતિય ચરણમાં આવેલું છે. બિંદુ (3, –1) ચતુર્થ ચરણમાં આવેલું છે. બિંદુ (– 1, 0) ઋણ x - અક્ષ ઉપર, બિંદુ (1, 2) એ પ્રથમ ચરણમાં અને બિંદુ (–3, –5) તૃતિય ચરણમાં આવેલાં છે. બિંદુઓનાં સ્થાન બાજુમાં આકૃતિમાં દર્શાવેલ છે.



2. બિંદુઓનાં સ્થાન બાજુના આલેખમાં દર્શાવેલ છે.



સ્વાધ્યાય 4.1

1. $x - 2y = 0$

2. (i) $2x + 3y - 9.3\overline{5} = 0; a = 2, b = 3, c = -9.3\overline{5}$

(ii) $x - \frac{y}{5} - 10 = 0; a = 1, b = \frac{-1}{5}, c = -10$

(iii) $-2x + 3y - 6 = 0; a = -2, b = 3, c = -6$

(iv) $1 \cdot x - 3y + 0 = 0; a = 1, b = -3, c = 0$

(v) $2x + 5y + 0 = 0; a = 2, b = 5, c = 0$

(vi) $3x + 0 \cdot y + 2 = 0; a = 3, b = 0, c = 2$

(vii) $0 \cdot x + 1 \cdot y - 2 = 0; a = 0, b = 1, c = -2$

(viii) $-2x + 0 \cdot y + 5 = 0; a = -2, b = 0, c = 5$

સ્વાધ્યાય 4.2

1. (iii) કારણ કે x ની પ્રત્યેક કિંમત માટે y ની અનુરૂપ કિંમત મળે અને y ની પ્રત્યેક કિંમત માટે અનુરૂપ x ની કિંમત મળે.

2. (i) $(0, 7), (1, 5), (2, 3), (4, -1)$ (ii) $(1, 9-\pi), (0, 9), (-1, 9+\pi), \left(\frac{9}{\pi}, 0\right)$

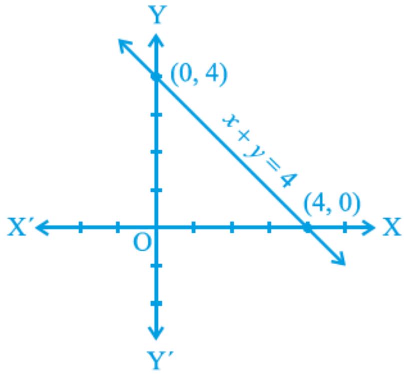
(iii) $(0, 0), (4, 1), (-4, 1), \left(2, \frac{1}{2}\right)$

3. (i) ના (ii) ના (iii) હા (iv) ના (v) ના

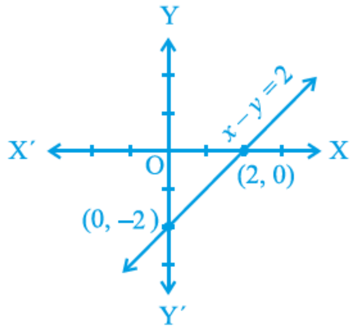
4. 7

સ્વાધ્યાય 4.3

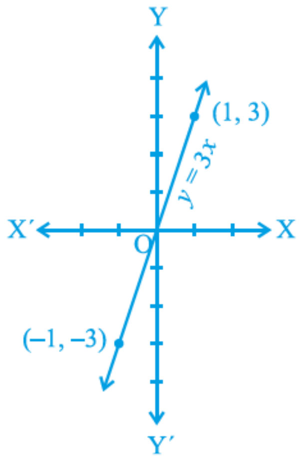
1. (i)



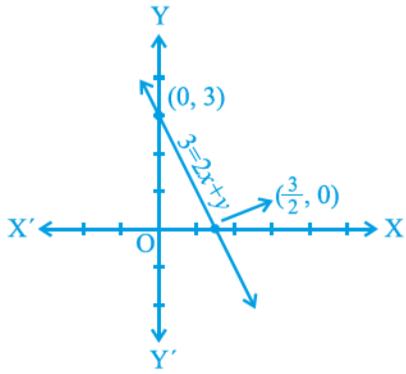
(ii)



(iii)



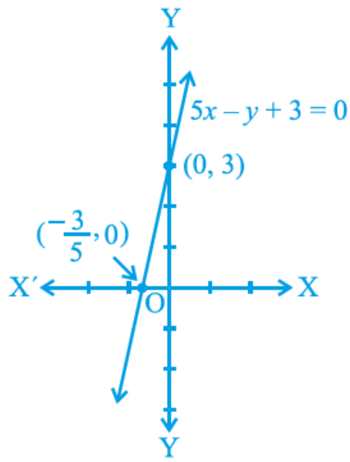
(iv)



2. $7x-y=0$ અને $x+y=16$; અનંત [એક બિંદુમાંથી અનંત રેખાઓ દોરી શકાય.]

3. $\frac{5}{3}$

4. $5x-y+3=0$

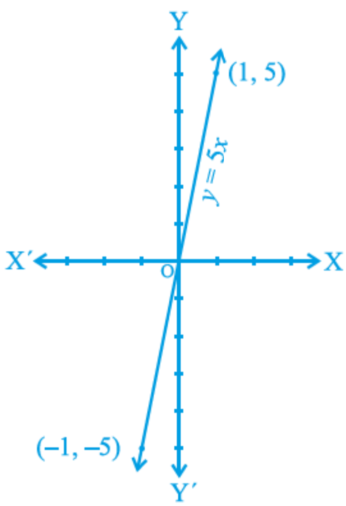


5. આકૃતિ 4.6 માટે $x+y=0$ અને આકૃતિ 4.7 માટે $y=-x+2$.

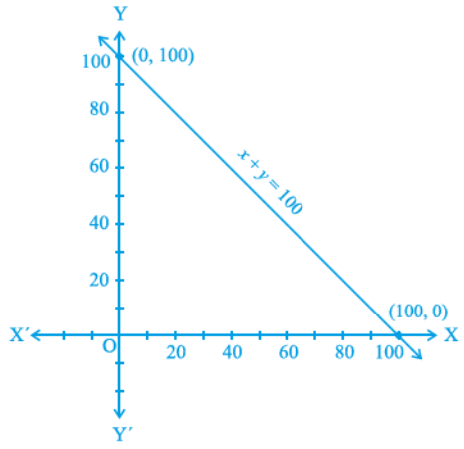
6. ધારો કે x એ અંતર છે અને y એ થયેલ કાર્ય છે. આથી કૂટ પ્રશ્ન પરથી સમીકરણ $y=5x$ થશે.

(i) 10 એકમ

(ii) 0 એકમ



7. $x+y=100$



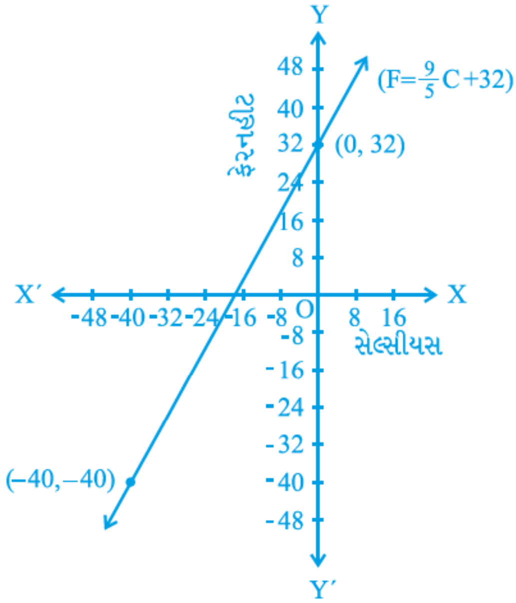
8. (i) બાજુની આકૃતિ જૂઓ

(ii) 86° F

(iii) 35° C

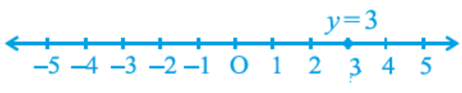
(iv) 32° F, –17.8° C (આસન્ન મૂલ્ય)

(v) Yes, – 40° (F અને C બંનેમાં)

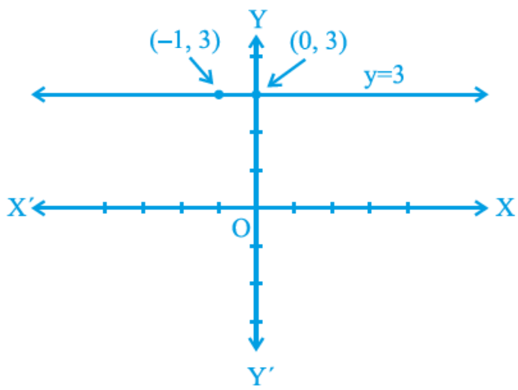


સ્વાધ્યાય 4.4

1. (i)

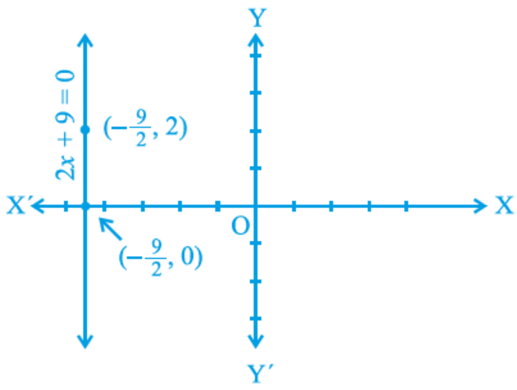


(ii)



2. (i)

(ii)



સ્વાધ્યાય 5.1

1. (i) અસત્ય, વિદ્યાર્થી જોઇને કહી શકશે.

   (ii) અસત્ય, પૂર્વધારણા 5.1 સાથે વિરોધાભાસ.

   (iii) સત્ય, (પૂર્વધારણા 2)

   (iv) સત્ય, જો તમે એક વર્તુળના પ્રદેશને બીજા વર્તુળથી ઢાંકી દો તો તે સંપાતી થઈ જશે. તેથી તેમનાં કેન્દ્ર અને સીમાઓ એક બીજા પર આવી જશે. તેથી તેમની ત્રિજ્યાઓ એક જ થઇ જશે.

   (v) સત્ય, યુક્લિડની પ્રથમ પૂર્વધારણા

3. તેમાં કેટલાંક અવ્યાખ્યાયિત પદો છે જેની યાદી વિદ્યાર્થીઓ બનાવશે. તે સુસંગત છે કારણ કે તે બે અલગ પરિસ્થિતિઓ સાથે સંકળાયેલ છે.

   (i) પરથી કહી શકાય કે બે બિંદુઓ A અને B આપેલ હોય તો બિંદુ C રેખા પર તેમની વચ્ચે મળે.

   (ii) પરથી કહી શકાય કે બે બિંદુઓ A અને B આપેલ હોય તો તમે બિંદુ C એવું લઇ શકો કે જે A અને B માંથી પસાર થતી રેખા પર ના હોય.

   આ 'પૂર્વધારણાઓ' યુક્લિડની પૂર્વધારણાઓને અનુસરતી નથી. આમ છતાં તે પૂર્વધારણા 5.1 (સ્વયંસિધ્ધ સત્ય 5.1)ને અનુસરે છે.

4. $AC = BC$

   તેથી, $AC + AC = BC + AC$ (સમાનમાં સમાન ઉમેરતા)

   એટલે કે, $2AC = AB$ $(BC + AC = AB)$

   તેથી, $AC = \frac{1}{2} AB$

5. હંગામી ધોરણે ધારણા કરો કે ભિન્ન બિંદુઓ C અને D એ AB નાં મધ્ય બિંદુઓ છે. હવે તમે બતાવો કે બિંદુઓ C અને D ભિન્ન બિંદુઓ નથી.

6. $AC = BD$ (આપેલ છે) (1)

$AC = AB + BC$ (બિંદુ B, A અને C ની વચ્ચે આવેલ છે) (2)

$BD = BC + CD$ (બિંદુ C, B અને Dની વચ્ચે આવેલ છે) (3)

(2) અને (3) ની કિંમત (1) માં મૂકતા,

$AB + BC = BC + CD$

તેથી, $AB = CD$ (સમાનમાંથી સમાન બાદ કરતાં)

7. આ દુનિયાના કોઈ પણ ભાગમાં સત્ય હોવાથી, આ સનાતન સત્ય છે.

સ્વાધ્યાય 5.2

1. વિદ્યાર્થીએ આપેલ કોઈ સૂત્ર માટે વર્ગખંડમાં ચર્ચા થવી જોઈએ.

2. જો સીધી રેખા l બીજી બે રેખાઓ m અને n પર પડે(છેદે) જેથી રેખા lના એક તરફના અંતઃકોણનો સરવાળો બે કાટખૂણા થાય, ત્યારબાદ યુક્લિડની પાંચમી પૂર્વધારણા દ્વારા રેખા l ની આ તરફ રેખાઓ મળશે નહિ. પછી તમે જાણો છો કે રેખા l ની બીજી તરફના અંતઃકોણોનો સરવાળો પણ બે કાટખૂણા થાય તેથી તે બીજી તરફ પણ મળશે નહિ તેથી રેખાઓ m અને n ક્યાકેય મળશે નહિ. તેથી તે સમાંતર છે.

સ્વાધ્યાય 6.1

1. $30°, 250°$ **2.** $126°$ **4.** બિંદુ પરના બધા ખૂણાઓનો સરવાળો $= 360°$

5. $\angle QOS = \angle SOR + \angle ROQ$ અને $\angle POS = \angle POR - \angle SOR$. **6.** $122°, 302°$

સ્વાધ્યાય 6.2

1. $130°, 130°$ **2.** $126°$ **3.** $126°, 36°, 54°$ **4.** $60°$ **5.** $50°, 77°$

6. આપાતકોણ = પરાવર્તન કોણ

બિંદુ B પર $BE \perp PQ$ દોરો અને બિંદુ C પર $CF \perp RS$ દોરો.

સ્વાધ્યાય 6.3

1. $65°$ **2.** $32°, 121°$ **3.** $92°$ **4.** $60°$ **5.** $37°, 53°$

6. ΔPQR ના ખૂણાઓનો સરવાળો $= \Delta QTR$ ના ખૂણાઓનો સરવાળો અને $\angle PRS = \angle QPR + \angle PQR$.

સ્વાધ્યાય 7.1

1. તે સમાન છે. **6.** $\angle BAC = \angle DAE$

સ્વાધ્યાય 7.2

6. $\angle BCD = \angle BCA + \angle DCA = \angle B + \angle D$ **7.** દરેકનું માપ $45°$ થાય.

સ્વાધ્યાય 7.3

3. (i) પરથી (ii), $\angle ABM = \angle PQN$

સ્વાધ્યાય 7.4

4. BD જોડો અને $\angle B > \angle D$ બતાવો. AC જોડો અને $\angle A > \angle C$ બતાવો.

5. $\angle Q + \angle QPS > \angle R + \angle RPS$ વગેરે.

સ્વાધ્યાય 8.1

1. $36°, 60°, 108°$ અને $156°$.

6. (i) Δ DAC અને Δ BCA પરથી, $\angle DAC = \angle BCA$ અને $\angle ACD = \angle CAB$ બતાવો, વગેરે.

(ii) પ્રમેય 8.4 નો ઉપયોગ કરીને બતાવો કે $\angle BAC = \angle BCA$.

સ્વાધ્યાય 8.2

2. PQRS સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે તેમ બતાવો. $PQ \parallel AC$ અને $PS \parallel BD$ પણ બતાવો. તેથી $\angle P = 90°$.

5. AECF સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. તેથી $AF \parallel CE$, વગેરે.

સ્વાધ્યાય 9.1

1. (i) આધાર DC, DC અને AB સમાંતર છે. (iii) આધાર QR, QR અને PS સમાંતર છે.

(v) આધાર AD, AD અને BQ સમાંતર છે.

સ્વાધ્યાય 9.2

1. 12.8 સેમી **2.** EG ને જોડો, ઉદાહરણ 2 ના પરિણામનો ઉપયોગ કરો.

6. Δ APQ માં ઘઉં અને અન્ય બે ત્રિકોણમાં દાળ અથવા Δ APQ માં દાળ અને અન્ય બે ત્રિકોણમાં ઘઉં.

સ્વાધ્યાય 9.3

4. $CM \perp AB$ દોરો અને $DN \perp AB$ દોરો, $CM = DN$ સાબિત કરો. **12.** ઉદાહરણ 4 જુઓ.

સ્વાધ્યાય 9.4 (વૈકલ્પિક)

7. ઉદાહરણ 3 ના પરિણામનો પુનરાવર્તિત રીતે ઉપયોગ કરો.

સ્વાધ્યાય 10.1

1. (i) અંદરના ભાગમાં (ii) બહારના ભાગમાં (iii) વ્યાસ

(iv) અર્ધવર્તુળ (v) જીવા (vi) ત્રણ

2. (i) સત્ય (ii) અસત્ય (iii) અસત્ય

(iv) સત્ય (v) અસત્ય (vi) સત્ય

સ્વાધ્યાય 10.2

1. એકરૂપ વર્તુળોની જીવાઓનો વિચાર કરીને પ્રમેય 10.1 જેમ જ સાબિત કરો.
2. એકરૂપતા માટેની બાખૂબા પૂર્વધારણાનો ઉપયોગ કરીને બે ત્રિકોણની એકરૂપતા બતાવો.

સ્વાધ્યાય 10.3

1. 0, 1, 2, બે 2. ઉદાહરણ 1 પ્રમાણે કરો.

3. બે વર્તુળનાં કેન્દ્રો O અને O' ને સામાન્ય જીવા AB ના મધ્યબિંદુ M સાથે જોડો. ત્યારબાદ $\angle$ OMA = 90° અને $\angle$ O'MA = 90° બતાવો.

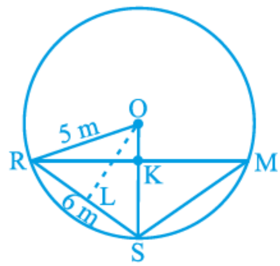
સ્વાધ્યાય 10.4

1. 6 સેમી. કેન્દ્રોને જોડતી રેખા નાના વર્તુળની ત્રિજ્યાને લંબ છે અને ત્યારબાદ સામાન્ય જીવા એ નાના વર્તુળનો વ્યાસ છે તેમ બતાવો.
2. AB અને CD, O કેન્દ્રિત વર્તુળની સમાન જીવાઓ E માં છેદે, AB પર OM અને CD પર ON લંબ દોરો અને O, E જોડો. કાટકોણ ત્રિકોણ OME અને ONE એકરૂપ બતાવો.
3. ઉદાહરણ 2 પ્રમાણે ગણો. 4. AD પર લંબ OM દોરો.
5. રેશમા, સલમા અને મનદીપને અનુક્રમે R, S અને M વડે દર્શાવો. ધારો કે

KR = x મી(આકૃતિ જુઓ). Δ ORS નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} x \times 5$.

વળી, Δ ORS નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}$ RS × OL $= \frac{1}{2} \times 6 \times 4$ પણ થાય.

x મેળવો તેથી RM મળે.



6. સમબાજુ ત્રિકોણના ગુણધર્મોનો અને પાયથાગોરસ પ્રમેયનો પણ ઉપયોગ કરો.

સ્વાધ્યાય 10.5

1. 45° 2. 150°, 30° 3. 10° 4. 80° 5. 110°

6. $\angle$BCD = 80° અને $\angle$ECD = 50°

8. CD પર AM અને BN લંબ દોરો.(AB $\parallel$ CD અને AB < CD). ΔAMD $\cong$ ΔBNC બતાવો. તેના પરથી $\angle$C = $\angle$D મળે અને તેથી, $\angle$A + $\angle$C = 180°.

સ્વાધ્યાય 10.6 (વૈકલ્પિક)

2. ધારો કે O વર્તુળનું કેન્દ્ર છે. ત્યાર બાદ બંને જીવાઓનો લંબદ્વિભાજક સમાન થશે અને O માંથી પસાર થશે. હવે r એ ત્રિજ્યા છે તેથી, $r^2 = \left(\frac{11}{2}\right)^2 + x^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + (6 - x)^2$,

જ્યાં x એ 11 સેમી લંબાઈની જીવા પર O માંથી દોરેલ લંબની લંબાઈ છે. આ પરથી $x = 1$ મળે. તેથી, $r = \frac{5\sqrt{5}}{2}$ સેમી

3. 3 સેમી

4. ધારો કે $\angle AOC = x$ અને $\angle DOE = y$. ધારો કે $\angle AOD = z$ તો $\angle EOC = z$ અને $x + y + 2z = 360°$.

$\angle ODB = \angle OAD + \angle DOA = 90° - \frac{1}{2}z + z = 90° + \frac{1}{2}z$. વળી, $\angle OEB = 90° + \frac{1}{2}z$ થાય.

8. $\angle ABE = \angle ADE$, $\angle ADF = \angle ACF = \frac{1}{2}\angle C$.

તેથી, $\angle EDF = \angle ABE + \angle ADF = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = \frac{1}{2}(180° - \angle A) = 90° - \frac{1}{2}\angle A$.

9. પ્રશ્ન-1, સ્વાધ્યાય 10.2 અને પ્રમેય 10.8 નો ઉપયોગ કરો.

10. $\angle A$ નો દ્વિભાજક ΔABC ના પરિવૃતને D માં છેદે છે. DC અને DB ને જોડો. પછી $\angle BCD = \angle BAD = \frac{1}{2}\angle A$ અને $\angle DBC = \angle DAC = \frac{1}{2}\angle A$. તેથી, $\angle BCD = \angle DBC$ અથવા, DB = DC. તેથી D એ BC ના લંબદ્વિભાજક પર આવેલ છે.

સ્વાધ્યાય 12.1

1. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, $900\sqrt{3}$ સેમી^{2} **2.** ₹ 1650000 **3.** $20\sqrt{2}$ મી^{2}

4. $21\sqrt{11}$ સેમી^{2} **5.** 9000 સેમી^{2} **6.** $9\sqrt{15}$ સેમી^{2}

સ્વાધ્યાય 12.2

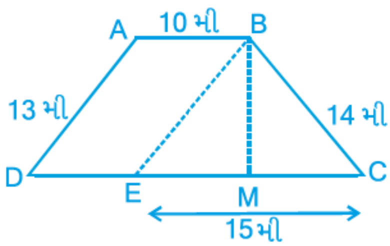
1. 65.5 મી^{2} (આશરે) **2.** 15.2 સેમી^{2} (આશરે) **3.** 19.4 સેમી^{2} (આશરે)

4. 12 સેમી **5.** 48 મી^{2} **6.** $1000\sqrt{6}$ સેમી^{2}, $1000\sqrt{6}$ સેમી^{2}

7. ઘેરાયેલા પ્રદેશ I નું ક્ષેત્રફળ = ઘેરાયેલા પ્રદેશ II નું ક્ષેત્રફળ = 256 સેમી^{2} અને ઘેરાયેલા પ્રદેશ III નું ક્ષેત્રફળ = 17.92 સેમી^{2}

8. ₹ 705.60 **9.** 196 મી^{2}

[આકૃતિ જુઓ. ΔBEC નું ક્ષેત્રફળ = 84 મી^{2} મેળવો. બાદમાં BM ની ઊંચાઈ શોધો.]



સ્વાધ્યાય 13.1

1. (i) 5.45 મી^{2} (ii) ₹ 109 **2.** ₹ 555 **3.** 6 મી **4.** 100 ઈંટો

5. (i) ઘનાકાર પેટીના પાર્શ્વપૃષ્ઠોનું ક્ષેત્રફળ 40 સેમી^{2} જેટલું વધારે છે.

(ii) સમઘન પેટીની સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ 10 સેમી^{2} જેટલું ઓછું છે.

6. (i) 4250 સેમી^{2} કાચ (ii) 320 સેમી લાંબીટેપ [બધી ધારનો સરવાળો કરો. (કુલ 12 ધાર છે 4 લંબાઈ, 4 પહોળાઈ અને 4 ઊંચાઈ ધરાવે)].

7. ₹2184 **8.** 47 મી^{2}

સ્વાધ્યાય 13.2

1. 2 સેમી **2.** 7.48 મી^{2} **3.** (i) 968 સેમી^{2} (ii) 1064.8 સેમી^{2} (iii) 2038.08 સેમી^{2}

[પાઈપની કુલ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ (અંદરની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ + બહારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ + બે પાયાઓનું ક્ષેત્રફળ). દરેક પાયો એ આપેલ રીંગનું ક્ષેત્રફળ π ($R^2 - r^2$) જ્યાં, R = બહારની ત્રિજ્યા અને r = અંદરની ત્રિજ્યા].

4. 1584 મી^{2} **5.** ₹68.75 **6.** 1 મી

7. (i) 110 મી^{2} (ii) ₹4400 **8.** 4.4 મી^{2}

9. (i) 59.4 મી^{2} (ii) 95.04 મી^{2}

[ધારો કે ખરેખર વપરાયેલ સ્ટીલનું ક્ષેત્રફળ x મી^{2}. ખરેખર વપરાયેલ સ્ટીલનો $\frac{1}{12}$ મો ભાગ વેડફાઈ ગયો,

ટાંકીમાં વપરાયેલ સ્ટીલનું ક્ષેત્રફળ = x ના $\frac{11}{12}$. આનો અર્થ એ થયો કે ખરેખર વપરાયેલ સ્ટીલનું ક્ષેત્રફળ = $\frac{12}{11} \times 87.12$ મી^{2}]

10. 2200 સેમી^{2}; નળાકારની ઉંચાઈ (30 + 2.5 + 2.5) સેમી **11.** 7920 સેમી^{2}

સ્વાધ્યાય 13.3

1. 165 સેમી^{2} **2.** 1244.57 મી^{2} **3.** (i) 7 સેમી (ii) 462 સેમી^{2}

4. (i) 26 મી (ii) ₹ 137280 **5.** 63 મી **6.** ₹1155

7. 5500 સેમી^{2} **8.** ₹ 384.34 (આશરે)

સ્વાધ્યાય 13.4

1. (i) 1386 સેમી^{2} (ii) 394.24 સેમી^{2} (iii) 2464 સેમી^{2}

2. (i) 616 સેમી^{2} (ii) 1386 સેમી^{2} (iii) 38.5 મી^{2}

3. 942 સેમી^{2} **4.** 1 : 4 **5.** ₹27.72

6. 3.5 સેમી 7. 1 : 16 8. 173.25 સેમી^{2}

9. (i) $4\pi r^2$ (ii) $4\pi r^2$ (iii) 1 : 1

સ્વાધ્યાય 13.5

1. 180 સેમી^{3} 2. 135000 લિટર 3. 4.75 મી 4. ₹ 4320 5. 2 મી

6. 3 દિવસ 7. 16000 8. 6 સેમી, 4 : 1 9. 4000 મી^{3}

સ્વાધ્યાય 13.6

1. 34.65 લિટર

2. 3.432 કિગ્રા [પાઈપનું ઘનફળ = $\pi h \times (R^2 - r^2)$, જ્યાં R એ બહારની ત્રિજ્યા અને r એ અંદરની ત્રિજ્યા].

3. નળાકારની ક્ષમતા 85 સેમી^{3} જેટલી વધારે છે.

4. (i) 3 સેમી (ii) 141.3 સેમી^{3}

5. (i) 110 મી^{2} (ii) 1.75 મી (iii) 96.25 કિલોલિટર

6. 0.4708 મી^{2}

7. લાકડાનું ઘનફળ = 5.28 સેમી^{3}, ગ્રેફાઈટનું ઘનફળ = 0.11 સેમી^{3}.

8. 38500 સેમી^{3} અથવા 38.5 લિટર સૂપ

સ્વાધ્યાય 13.7

1. (i) 264 સેમી^{3} (ii) 154 સેમી^{3} 2. (i) 1.232 લિટર (ii) $\frac{11}{35}$ લિટર

3. 10 સેમી 4. 8 સેમી 5. 38.5 કિલોલિટર

6. (i) 48 સેમી (ii) 50 સેમી (iii) 2200 સેમી^{2} 7. 100π સેમી^{3} 8. 240π સેમી^{3}; 5 : 12

9. 86.625 મી^{3}, 99.825 મી^{2}

સ્વાધ્યાય 13.8

1. (i) $1437\frac{1}{3}$ સેમી^{3} (ii) 1.05 મી^{3} (આશરે)

2. (i) $11498\frac{2}{3}$ સેમી^{3} (ii) 0.004851 મી^{3} 3. 345.39 ગ્રામ (આશરે) 4. 64 : 1

5. 0.303 લિટર (આશરે) 6. 0.06348 મી^{3} (આશરે)

7. $179\frac{2}{3}$ સેમી^{3} 8. (i) 249.48 મી^{2} (ii) 523.9 મી^{3} (આશરે) 9. (i) $3r$ (ii) 1 : 9

10. 22.46 મીમી^{3} (આશરે)

સ્વાધ્યાય 13.9 (વૈકલ્પિક)

1. ₹ 6275

2. ₹ 2784.32 (આશરે) [સિલ્વર રંગની ગણતરી કરતી વખતે આધાર પર રાખેલ ગોળાના ભાગને બાદ કરવાનું યાદ રાખો.]

3. 43.75%

સ્વાધ્યાય 14.1

1. આપણા રોજિંદા જીવનમાંથી માહિતીના પાંચ ઉદાહરણ આપણે નીચે પ્રમાણે મેળવી શકીએ :

   (i) આપણા વર્ગમાં રહેલાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા

   (ii) આપણી શાળાના પંખાઓની સંખ્યા

   (iii) છેલ્લા બે વર્ષનાં આપણા ઘરનાં વિજળીનાં બીલ.

   (iv) ટેલીવિઝન અથવા વર્તમાન પત્રો દ્વારા મેળવેલાં ચૂંટણીનાં પરિણામો

   (v) શૈક્ષણિક મોજણી દ્વારા મળેલાં નિરક્ષરતા દરના આંકડા

   યાદ રાખો કે આ ઉપરાંત પણ આ પ્રશ્નના ઘણા બધા જુદા જુદા જવાબ હોઈ શકે.

2. (i), (ii) અને (iii) પ્રાથમિક માહિતી છે (iv) અને (v) ગૌણ માહિતી છે.

સ્વાધ્યાય 14.2

1.

રુધિર જૂથ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
A	9
B	6
O	12
AB	3
કુલ	30

સૌથી વધુ સામાન્ય – O, સૌથી ઓછું સામાન્ય – AB

2.

અંતર (કિમીમાં)	આવૃત્તિ ચિહ્ન	આવૃત્તિ
0 - 5	~~||||~~	5
5 - 10	~~||||~~ ~~||||~~ |	11
10 - 15	~~||||~~ ~~||||~~ |	11
15 - 20	~~||||~~ ||||	9
20 - 25	|	1
25 - 30	|	1
30 - 35	||	2
કુલ		40

3. (i)

સાપેક્ષ ભેજ (%)	આવૃત્તિ
84 - 86	1
86 - 88	1
88 - 90	2
90 - 92	2
92 - 94	7
94 - 96	6
96 - 98	7
98 - 100	4
કુલ	30

(ii) માહિતીમાં સાપેક્ષ ભેજનું પ્રમાણ વધુ હોવાથી માહિતી વર્ષાઋતુની હોય તેમ લાગે છે.

(iii) વિસ્તાર $= 99.2 - 84.9 = 14.3$

4. (i)

ઊંચાઈ (સેમીમાં)	આવૃતિ
150 - 155	12
155 - 160	9
160 - 165	14
165 - 170	10
170 - 175	5
કુલ	50

(ii) ઉપરનાં કોષ્ટક પરથી આપણે તારણ કાઢી શકીએ કે 50% વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈ 165 સેમી થી ઓછી છે.

5. (i)

સલ્ફર ડાયોકસાઈડની સાંદ્રતા (ppm માં)	આવૃતિ
0.00 - 0.04	4
0.04 - 0.08	9
0.08 - 0.12	9
0.12 - 0.16	2
0.16 - 0.20	4
0.20 - 0.24	2
કુલ	30

(ii) 8 દિવસ સુધી સલ્ફર ડાયોકસાઈડની સાંદ્રતા 0.11 ppm થી વધુ હતી.

6.

છાપની સંખ્યા	આવૃત્તિ
0	6
1	10
2	9
3	5
કુલ	30

7. (i)

અંક	આવૃત્તિ
0	2
1	5
2	5
3	8
4	4
5	5
6	4
7	4
8	5
9	8
કુલ	**50**

(ii) સૌથી વધુ વખત પુનરાવર્તિત થતા અંક 3 અને 9 છે. સૌથી ઓછી વખત 0 નું પુનરાવર્તિત થાય છે

8. (i)

કલાકની સંખ્યા	આવૃત્તિ
0 - 5	10
5 - 10	13
10 - 15	5
15 - 20	2
કુલ	**30**

(ii) 2 બાળક

9.

બેટરીનું આયુષ્ય (કલાકમાં)	આવૃત્તિ
2.0 - 2.5	2
2.5 - 3.0	6
3.0 - 3.5	14
3.5 - 4.0	11
4.0 - 4.5	4
4.5 - 5.0	3
કુલ	**40**

સ્વાધ્યાય 14.3

1. (ii) પ્રજનન સ્વાસ્થ્ય સ્થિતિ

3. (ii) પક્ષ A **4.** (ii) આવૃત્તિ બહુકોણ (iii) ના **5.** (ii) 184

8.

ઉંમર (વર્ષમાં)	આવૃત્તિ	વર્ગલંબાઈ	લંબચોરસની લંબાઈ
1 - 2	5	1	$\frac{5}{1} \times 1 = 5$
2 - 3	3	1	$\frac{3}{1} \times 1 = 3$
3 - 5	6	2	$\frac{6}{2} \times 1 = 3$
5 - 7	12	2	$\frac{12}{2} \times 1 = 6$
7 - 10	9	3	$\frac{9}{3} \times 1 = 3$
10 - 15	10	5	$\frac{10}{5} \times 1 = 2$
15 - 17	4	2	$\frac{4}{2} \times 1 = 2$

હવે, તમે આ લંબાઈનો ઉપયોગ કરી સ્તંભાલેખ દોરી શકો.

9. (i)

મૂળાક્ષરોની સંખ્યા	આવૃત્તિ	વર્ગલંબાઈ	લંબચોરસની લંબાઈ
1 - 4	6	3	$\frac{6}{3} \times 2 = 4$
4 - 6	30	2	$\frac{30}{2} \times 2 = 30$
6 - 8	44	2	$\frac{44}{2} \times 2 = 44$
8 - 12	16	4	$\frac{16}{4} \times 2 = 8$
12 - 20	4	8	$\frac{4}{8} \times 2 = 1$

હવે સ્તંભાલેખ દોરો.

(ii) 6 - 8

સ્વાધ્યાય 14.4

1. મધ્યક = 2.8; મધ્યસ્થ = 3; બહુલક = 3

2. મધ્યક = 54.8; મધ્યસ્થ = 52; બહુલક = 52

3. $x = 62$ 4. 14

5. 60 મજૂરોના પગારનો મધ્યક ₹ 5083.33.

સ્વાધ્યાય 15.1

1. $\frac{24}{30}$, એટલે કે $\frac{4}{5}$ 2.(i) $\frac{19}{60}$ (ii) $\frac{407}{750}$ (iii) $\frac{211}{1500}$ 3. $\frac{3}{20}$ 4. $\frac{9}{25}$

5. (i) $\frac{29}{2400}$ (ii) $\frac{579}{2400}$ (iii) $\frac{1}{240}$ (iv) $\frac{1}{96}$ (v) $\frac{1031}{1200}$ **6.** (i) $\frac{7}{90}$ (ii) $\frac{23}{90}$

7. (i) $\frac{27}{40}$ (ii) $\frac{13}{40}$ **8.** (i) $\frac{9}{40}$ (ii) $\frac{31}{40}$ (iii) 0 **11.** $\frac{7}{11}$ **12.** $\frac{1}{15}$ **13.** $\frac{1}{10}$

સ્વાધ્યાય A1.1

1. (i) હંમેશાં અસત્ય, એક વર્ષમાં 12 મહિના હોય.

(ii) સંદિગ્ધ, આપેલ વર્ષમાં દિવાળી શુક્રવારે હોય અથવા ન પણ હોય.

(iii) સંદિગ્ધ, માગાડીનું તાપમાન કેટલીક વાર વર્ષમાં 26°C હોઇ શકે.

(iv) હંમેશાં સત્ય.

(v) હંમેશાં અસત્ય, કૂતરાઓ ઊડે નહિં.

(vi) સંદિગ્ધ, લીપ વર્ષમાં ફેબ્રુઆરીમાં 29 દિવસ હોય.

2. (i) અસત્ય, ચતુષ્કોણના અંતઃકોણોનો સરવાળો 360° છે.

(ii) સત્ય (iii) સત્ય (iv) સત્ય

(v) અસત્ય, ઉદાહરણ $7 + 5 = 12$, આ અયુગ્મ સંખ્યા નથી.

3. (i) 2 કરતાં મોટી બધી અવિભાજય સંખ્યાઓ અયુગ્મ છે. (ii) પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના બે વડે ગુણિત હંમેશા યુગ્મ છે.

(iii) પ્રત્યેક $x > 1$ માટે $3x + 1 > 4$. (iv) પ્રત્યેક $x \geq 0$ માટે $x^3 \geq 0$.

(v) સમબાજુ ત્રિકોણની મધ્યગા એ ખૂણાનો દ્વિભાજક પણ છે.

સ્વાધ્યાય A1.2

1. (i) મનુષ્ય પૃષ્ઠવંશી છે. (ii) ના, દિનેશે તેના વાળ કોઇ બીજા દ્વારા પણ કપાવ્યા હોઈ શકે

(iii) ગુલગને લાલ જીભ (iv) અમે તારણ કાઢયું કે આવતીકાલે ગટર સાફ કરવી પડશે.

(v) પૂંછડીઓ ધરાવતા તમામ પ્રાણીઓ માટે કૂતરા હોવાની જરૂર નથી. ઉદાહરણ તરીકે, ભેંસ, વાંદરાઓ, બિલાડીઓ વગેરે જેવા પ્રાણીઓને પૂંછડી હોય છે, પરંતુ તેઓ કૂતરા નથી.

2. તમારે B અને 8 ઉલટાવવાની જરૂર છે. જો B ની પાછળની બાજુ યુગ્મ સંખ્યા હોય, તો પછી નિયમ તૂટી જાય. તેવી જ રીતે, જો 8 ની બીજી બાજુ વ્યંજન હોય, તો તે નિયમ તૂટી જાય.

સ્વાધ્યાય A1.3

1. ત્રણ શકય અનુમાન છે.

(i) કોઇપણ ત્રણ ક્રમિક યુગ્મ સંખ્યાઓનો ગુણાકાર યુગ્મ હોય છે.

(ii) કોઇપણ ત્રણ ક્રમિક યુગ્મ સંખ્યાઓનો ગુણાકાર 4 વડે વિભાજય છે.

(iii) કોઇપણ ત્રણ ક્રમિક યુગ્મ સંખ્યાઓનો ગુણાકાર 6 વડે વિભાજય છે.

2. હરોળ 4: 1 3 3 1 $=11^3$; હરોળ 5: 1 4 6 4 1$=11^4$; હરોળ 4 અને હરોળ 5 માટે ધારણા યોગ્ય છે, પરંતુ $11^5 \neq 15101051$.

3. $T_4 + T_5 = 25 = 5^2$; $T_{n-1} + T_n = n^2$.

4. $111111^2 = 12345654321$; $1111111^2 = 1234567654321$

5. વિદ્યાર્થીઓ જાતે જવાબ આપશે, ઉદાહરણ તરીકે યુક્લિડની પૂર્વધારણાઓ છે.

સ્વાધ્યાય A1.4

1. (i) તમે સમાન ખૂણાવાળા પરંતુ બાજુઓ જુદી હોય તેવા બે ત્રિકોણ આપી શકો.

   (ii) સમબાજુ ચતુષ્કોણને સમાન બાજુઓ છે પરંતુ તે ચોરસ ન હોય તે શક્ય છે.

   (iii) લંબચોરસને સમાન ખૂણાઓ છે પણ તે ચોરસ ન હોય તે બની શકે.

   (iv) $a = 3$ અને $b = 4$ માટે વિધાન સત્ય નથી.

   (v) $n = 11$ માટે $2n^2 + 11 = 253$ અવિભાજ્ય નથી.

   (vi) $n = 41$ માટે $n^2 - n + 41$ અવિભાજ્ય નથી.

2. વિદ્યાર્થીઓ જાતે જવાબ આપશે.

3. ધારો કે x અને y એ બે અયુગ્મ સંખ્યાઓ છે. પ્રાકૃતિક સંખ્યા m માટે $x = 2m + 1$ અને પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે $y = 2n + 1$ છે.

   $x + y = 2(m + n + 1)$. તેથી $x + y$ એ 2 વડે વિભાજ્ય છે માટે તે યુગ્મ છે.

4. જુઓ પ્રશ્ન 3. $xy = (2m + 1)(2n + 1) = 2(2mn + m + n) + 1$.

   તેથી, $x\,y$ એ 2 વડે વિભાજ્ય નથી માટે તે અયુગ્મ છે.

5. ધારો કે $2n$, $2n + 2$ અને $2n + 4$ ત્રણ ક્રમિક યુગ્મ સંખ્યાઓ છે. તેથી તેમનો સરવાળો $6(n + 1)$ એ 6 વડે વિભાજ્ય છે.

7. (i) ધારો કે મૂળ સંખ્યા n છે, આપણે નીચે મુજબ પ્રક્રિયા કરીશું:

   $$n \to 2n \to 2n + 9 \to 2n + 9 + n = 3n + 9 \to \frac{3n + 9}{3} = n + 3 \to n + 3 + 4 = n + 7 \to n + 7 - n = 7.$$

   (ii) નોંધો કે $7 \times 11 \times 13 = 1001$. ત્રણ અંકોની સંખ્યા abc લો. જયાં $abc \times 1001 = abc\,abc$. તેથી આપણને છ અંકોની સંખ્યા $abcabc$ મળે જે 7, 11 અને 13 વડે વિભાજ્ય છે.

સ્વાધ્યાય A2.1

1. સોપાન **1:** નિર્માણ :

   સંબંધિત પરિબળો આપણને આપેલ કમ્પ્યુટર ભાડે લીધેલ સમય અને બે કિંમતો તે થાય. આપણે ધારી લઇએ કે કમ્પ્યુટર ખરીદવાની કિંમત કે ભાડે લેવાની કિંમતમાં કોઇ નોંધપાત્ર ફેરફાર થતો નથી. આથી આપણે આવા કોઇ ફેરફાર ને અસંબંધિત ગણીશું. આપણે કમ્પ્યુટરની બધી બ્રાંડ કે પેઢીઓને સમાન ગણીશું અને તેમાંના ફેરફારો તે પણ આપણે અસંબંધિત ગણીશું.

   કમ્પ્યુટર x મહિના માટે ભાડે લેવાનો ખર્ચ ₹ $2000x$ થાય. જે તે કમ્પ્યુટરની ખરીદ કિંમત કરતાં વધારે થાય તો, આપણે કમ્પ્યુટર ખરીદીએ તે વધુ સારૂં ગણાય. આથી સમીકરણ

   $$2000x = 25000 \qquad (1)$$

   સોપાન **2 :** ઉકેલ : સમીકરણ (1), $x = \dfrac{25000}{2000} = 12.5$

સોપાન 3 : અર્થઘટન : 12.5 માસ બાદ કમ્પ્યુટર ભાડે લેવાની કિંમત તેની ખરીદકિંમત કરતાં વધુ થતી હોવાથી કમ્પ્યુટર જો તમારે 12 માસથી વધુ ઉપયોગમાં લેવાનું હોય તો કમ્પ્યુટર ખરીદવું સસ્તુ પડે.

2. સોપાન 1 : નિર્માણ : આપણે એવું ધારીએ કે મોટરગાડીઓ એકધારી (અચળ) ઝડપે ગતિ કરે છે. આથી તેની ઝડપના કોઈપણ ફેરફારને આપણે અસંબંધિત ગણીશું. જો બંને મોટર x કલાક બાદ મળે તો પ્રથમ મોટરે સ્થાન A થી $40x$ કિમી અંતર કાપ્યું હોય અને બીજી મોટરે $30x$ કિમી અંતર કાપ્યું હોય. આથી તે સ્થાન A થી $(100 - 30x)$ અંતરે હોય. આથી $40x = 100 - 30x$ સમીકરણ બનશે. માટે $70x = 100$ થાય.

સોપાન 2 : ઉકેલ : સમીકરણ ઉકેલતા $x = \frac{100}{70}$ આપણને મળે.

સોપાન 3 : અર્થઘટન : $\frac{100}{70}$ એ લગભગ 1.4 કલાક થાય. આથી બંન્ને મોટર 1.4 કલાક બાદ મળશે.

3. સોપાન 1 : નિર્માણ : ચંદ્ર પૃથ્વીને પરિભ્રમણ કરે તે ઝડપ $= \frac{\text{પરિભ્રમણ કક્ષાની લંબાઈ}}{\text{લીધેલો સમય}}$

સોપાન 2 : ઉકેલ : પરિભ્રમણ કક્ષા લગભગ વર્તુળાકાર હોવાથી

લંબાઈ $2 \times \pi \times 384000$ કિમી $= 2411520$ કિમી થાય.

ચંદ્રને એક પરિભ્રમણ પૂર્ણ કરવા માટે 24 કલાક લાગે છે.

આથી ઝડપ $= \frac{2411520}{24} = 100480$ કિમી/કલાક.

સોપાન 3 : અર્થઘટન : ઝડપ 100480 કિમી/કલાક.

4. અર્થઘટન : અહીં ધારણા એ થશે કે બીલમાં તફાવતનું એકમાત્ર કારણ એ વોટર હિટરનો ઉપયોગ છે.

ધારો કે વોટર હિટરનો ઉપયોગ થતો હોય તેવા સરેરાશ કલાકની સંખ્યા $= x$

પ્રતિમાસ વોટર હિટરના ઉપયોગથી તફાવત = ₹ 1240 – ₹ 1000 = ₹ 240 થશે.

એક કલાક વોટર હિટર વાપરવાનો ખર્ચ = ₹ 8

આથી, 30 દિવસ વોટર હિટર વાપરવાનો ખર્ચ $= 8 \times 30 \times x$

વળી, 30 દિવસ વોટર હિટર વાપરવાનો ખર્ચ = વોટર હિટર વાપરવાથી થતો તફાવત. આથી, $240x = 240$

ઉકેલ : આ સમીકરણ પરથી $x = 1$ આપણને મળશે.

અર્થઘટન : $x = 1$ હોવાથી વોટર હિટર પ્રતિદિન સરેરાશ 1 કલાક વાપરવું જોઇએ.

સ્વાધ્યાય A2.2

1. અહીં આપણે કોઈ ચોકકસ ઉકેલની ચર્ચા નહીં કરીએ. તમે છેલ્લા ઉદાહરણમાં વાપરી હતી તે પધ્ધતિ અથવા બીજી કોઇ તમને યોગ્ય લાગતી પધ્ધતિ વાપરી શકશો.

સ્વાધ્યાય A2.3

1. આપણે દર્શાવ્યું કે વ્યવહારૂ જીવનની પરિસ્થિતિમાં નિર્માણનો ભાગ ખૂબ જ વિસ્તૃત હોય છે. વળી, શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નોમાં ઉકેલની યથાર્થતા પણ હોતી નથી. આ ઉપરાંત શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નોને ખરો ઉકેલ હોય છે. વ્યવહારૂ જીવનની પરિસ્થિતિના કિસ્સામાં આવી જરૂર હોતી નથી.

2. અગત્યના પરિબળો (ii) અને (iii) છે. અહીં (i) એ અગત્યનું પરિબળ નથી જો કે તેની કેટલા વાહનો વેચાયા તેની પર અસર હોય છે.