ગુજરાત શૈક્ષણિક સંશોધન અને તાલીમ પરિષદના પત્ર-ક્રમાંક
જીસીઈઆરટી/સીએન્ડઈ/2018/5808, તા.07/03/2018થી મંજૂર

ગણિત

ધોરણ VII

પ્રતિજ્ઞાપત્ર

ભારત મારો દેશ છે.
બધાં ભારતીયો મારાં ભાઈબહેન છે.
હું મારા દેશને ચાહું છું અને તેના સમૃદ્ધ અને
વૈવિધ્યપૂર્ણ વારસાનો મને ગર્વ છે.
હું સદાય તેને લાયક બનવા પ્રયત્ન કરીશ.
હું મારાં માતાપિતા, શિક્ષકો અને વડીલો પ્રત્યે આદર રાખીશ
અને દરેક જણ સાથે સભ્યતાથી વર્તીશ.
હું મારા દેશ અને દેશબાંધવોને મારી નિષ્ઠા અર્પું છું.
તેમનાં કલ્યાણ અને સમૃદ્ધિમાં જ મારું સુખ રહ્યું છે.

રાજ્ય સરકારની વિનામૂલ્યે યોજના હેઠળનું પુસ્તક

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ
'વિદ્યાયન', સૅક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર-382010

અનુવાદ

શ્રી મેઘરાજભાઈ જે. ભટ્ટ
શ્રી ભક્તિભાઈ પી. પટેલ
ડૉ. સંજયકુમાર એસ. પટેલ

સમીક્ષા

શ્રી એમ. એસ. જાજલ
શ્રી યોગેશભાઈ એન. દેવલુક
ડૉ. હર્ષવર્ધનસિંહ જાડેજા
શ્રી ચિંતનકુમાર પી. શાહ
શ્રી નિતેષકુમાર એમ. દલવાડી
શ્રી નિલેશકુમાર એમ. નાથાણી
શ્રી નીરજ એમ. રાવલ
શ્રી પરિમલ એ. પટેલ
શ્રી સંજયકુમાર બી. પટેલ

ભાષાશુદ્ધિ

શ્રી યોસેફ મેકવાન

સંયોજન

શ્રી આશિષ એચ. બોરીસાગર
(વિષય સંયોજક : ગણિત)

નિર્માણ-આયોજન

શ્રી હરેન પી. શાહ
(નાયબ નિયામક : શૈક્ષણિક)

મુદ્રણ-આયોજન

શ્રી હરેશ એસ. લીમ્બાચીયા
(નાયબ નિયામક : ઉત્પાદન)

પ્રસ્તાવના

રાષ્ટ્રીય સ્તરે સમાન અભ્યાસક્રમ રાખવાની સરકારશ્રીની નીતિના અનુસંધાને ગુજરાત સરકાર તથા GCERT દ્વારા તા. 19-7-2017ના ઠરાવ ક્રમાંક જશભ/1217/સિંગલ ફાઈલ-62/ન થી શાળા કક્ષાએ NCERT ના પાઠ્યપુસ્તકોનો સીધો જ અમલ કરવાનો નિર્ણય કરવામાં આવ્યો તેને અનુલક્ષીને NCERT, નવી દિલ્હી દ્વારા પ્રકાશિત **ધોરણ VII** ના **ગણિત** વિષયના પાઠ્યપુસ્તકનો ગુજરાતીમાં અનુવાદ કરીને વિદ્યાર્થીઓ સમક્ષ મૂકતાં ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ આનંદ અનુભવે છે.

આ પાઠ્યપુસ્તકનો અનુવાદ તથા તેની સમીક્ષા નિષ્ણાત પ્રાધ્યાપકો અને શિક્ષકો પાસે કરાવવામાં આવ્યા છે અને સમીક્ષકોનાં સૂચનો અનુસાર હસ્તપ્રતમાં યોગ્ય સુધારા-વધારા કર્યા પછી આ પાઠ્યપુસ્તક પ્રસિદ્ધ કરતાં પહેલા આ પાઠ્યપુસ્તકની મંજૂરી માટે એક સ્ટેટ લેવલની કમિટીની રચના કરવામાં આવી. આ કમિટીની સાથે NCERTના પ્રતિનિધિ તરીકે RIE, ભોપાલથી ઉપસ્થિત રહેલા નિષ્ણાતોની એક ત્રિદિવસીય કાર્યશિબીરનું આયોજન કરવામાં આવ્યું અને પાઠ્યપુસ્તકને અંતિમ સ્વરૂપ આપવામાં આવ્યું જેમાં શ્રી મેઘરાજભાઈ ભટ્ટ, શ્રી અનિલ દરજી, શ્રી સુરેલીયા વિજય, શ્રી નીરજ રાવલ, ડૉ. સુરેશ કે. મકવાણા (RIE, ભોપાલ) અને શ્રી અજી થોમસ (RIE, ભોપાલ) ઉપસ્થિત રહી પોતાના કીમતી સૂચનો અને માર્ગદર્શન પૂરા પાડ્યા છે.

પ્રસ્તુત પાઠ્યપુસ્તકને રસપ્રદ, ઉપયોગી અને ક્ષતિરહિત બનાવવા માટે માન.અગ્રસચિવશ્રી (શિક્ષણ) દ્વારા અંગત રસ લઈને જરૂરી માર્ગદર્શન આપવામાં આવ્યું છે. આ પાઠ્યપુસ્તકની ચકાસણી શિક્ષણ વિભાગના વર્ગ 1 અને વર્ગ 2ના જે-તે વિષય જાણતા અધિકારીશ્રીઓ દ્વારા પણ કરાવવામાં આવી છે. મંડળ દ્વારા પૂરતી કાળજી લેવામાં આવી છે, તેમ છતાં શિક્ષણમાં રસ ધરાવનાર વ્યક્તિઓ પાસેથી ગુણવત્તા વધારે તેવાં સૂચનો આવકાર્ય છે.

NCERT, નવી દિલ્હીના સહકાર બદલ તેમના આભારી છીએ.

પી. ભારતી (IAS)
નિયામક
તા. : 23-12-2019

કાર્યવાહક પ્રમુખ
ગાંધીનગર

પ્રથમ આવૃત્તિ : 2018, પુનઃમુદ્રણ : 2019, 2020

પ્રકાશક : ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, 'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર વતી પી. ભારતી, નિયામક

મુદ્રક :

Foreword

The National Curriculum Framework (NCF), 2005, recommends that children's life at school must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the National Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognise that, given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

These aims imply considerable change in school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making children's life at school a happy experience, rather than a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

The National Council of Educational Research and Training (NCERT) appreciates the hard work done by the textbook development committee responsible for this book. We wish to thank the Chairperson of the advisory group in science and mathematics, Professor J.V. Narlikar and the Chief Advisor for this book, Dr H.K. Dewan for guiding the work of this committee. Several teachers contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are indebted to the institutions and organisations which have generously permitted us to draw upon their resources, material and personnel. We are especially grateful to the members of the National Monitoring Committee, appointed by the Department of Secondary and Higher Education, Ministry of Human Resource Development under the Chairpersonship of Professor Mrinal Miri and Professor G.P. Deshpande, for their valuable time anc contribution. As an organisation committed to systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

Director
National Council of Educational
Research and Training

New Delhi
20 November 2006

Preface

The National Curriculum Framework (NCF), 2005 suggests the need for developing the ability for mathematisation in the child. It points out that the aim of learning mathematics is not merely being able to do quantitative calculations but also to develop abilities in the child that would enable her/him to redefine her/his relationship with the World. The NCF-2005 also lays emphasis on development in the children logical abilities as well as abilities to comprehend space, spatial transformations and develop the ability to visualise both these. It recommends that mathematics needs to slowly move towards abstraction even though it starts from concrete experiences and models. The ability to generalise and perceive patterns is an important step in being able to relate to the abstract and logic governed nature of the subject.

We also know that most children in upper primary and secondary classes develop a fear of mathematics and it is one of the reasons for students not being able to continue in schools. NCF-2005 has also mentioned this problem and has therefore emphasised the need to develop a programme which is relevant and meaningful. The need for conceptualising mathematics teaching allows children to explore concepts as well as develop their own ways of solving problems. This also forms corner-stone of the principles highlighted in the NCF-2005.

In Class VI we have begun the process of developing a programme which would help children understand the abstract nature of mathematics while developing in them the ability to construct their own concepts. As suggested by NCF-2005, an attempt has been made to allow multiple ways of solving problems and encouraging children to develop strategies different from each other. There is an emphasis on working with basic principles rather than on memorisation of algorithms and short-cuts.

The Class VII textbook has continued that spirit and has attempted to use language which the children can read and understand themselves. This reading can be in groups or individual and at some places require help and support by the teacher. We also tried to include a variety of examples and opportunities for children to set problems. The appearance of the book has sought to be made pleasant by including many illustrations. The book attempts to engage the mind of the child actively and provides opportunities to use concepts and develop her/his own structures rather than struggling with unnecessarily complicated terms and numbers.

We hope that this book would help all children in their attempt to learn mathematics and would build in them the ability to appreciate its power and beauty. We also hope that this would enable to revisit and consolidate concepts and skills that they have learnt in the primary school. We hope to strengthen the foundation of mathematics, on which further engagement with studies as well as her daily life would become possible in an enriched manner.

The team in developing the textbook consists of many teachers who are experienced and brought to the team the view point of the child and the school. We also had people who have done research in learning of mathematics and those who have been writing textbooks for mathematics for many years. The team has tried to make an effort to remove fear of mathematics from the minds of children and make it a part of their daily routine even outside the school. We had many discussions and a review process with some other teachers of schools across the country. The effort by the team has been to accommodate all the comments.

In the end, I would like to place on record our gratefulness to Prof Krishna Kumar, Director, NCERT, Prof G. Ravindra, Joint Director, NCERT and Prof Hukum Singh, Head, DESM, for giving opportunity to me and the team to work on this challenging task. I am also grateful to

Prof J.V. Narlikar, Chairperson of the Advisory Group in Science and Mathematics for his suggestions. I am also grateful for the support of all those who were part of this team including Prof S.K. Singh Gautam, Dr V.P. Singh and Dr Ashutosh K. Wazalwar from NCERT, who have worked very hard to make this possible. In the end I must thank the Publication Department of NCERT for its support and advice and those from Vidya Bhawan who helped produce the book.

The process of developing materials is a continuous one and we would hope to make this book better. Suggestions and comments on the book are most welcome.

Dr H.K. Dewan
Chief Advisor
Textbook Development Committee

શિક્ષકો માટે

આ પુસ્તક ધોરણ 7માં શરૂ કરેલ પ્રક્રિયા અને માળખાને વધુ આગળ વધારે છે. NCF-2005માં દર્શાવેલ મુખ્ય મુદ્દાઓ અમે આપને જણાવ્યા હતા. જેમાં ગણિતને વિદ્યાર્થીની શક્તિઓના વિકાસ સાથે જોડવું, અટપટી ગણતરીઓ અને અલ્ગોરિધમને ટાળવા અને સમજણ કેળવવાના માળખાનો વિકાસ કરવો વગેરે હતા. બાળકના મગજમાં ગણિતના ખ્યાલોનો વિકાસ માત્ર તેને કહેવાથી કે સમજણ આપવાથી થતો નથી. ગણિત શીખવા માટે, તેમાં વિશ્વાસ કેળવવા માટે અને મૂળભૂત ખ્યાલોને સમજવા માટે બાળકે સંકલ્પનાઓનું પોતાનું માળખું વિકસાવવું જરૂરી છે. આને માટે વિદ્યાર્થી ચર્ચા કરે, પ્રશ્નોના ઉકેલ મેળવે, નવા પ્રશ્નો બનાવે અને તેના ઉકેલોની રીતો અને વ્યાખ્યાઓ પોતાની ભાષામાં આપે એવા વર્ગખંડની જરૂર છે. આવી સંકલ્પનાઓ પ્રમાણિત સંકલ્પનાઓ જેટલી વ્યાપક અને સંપૂર્ણ ન પણ હોય.

ગણિતના વર્ગમાં વિદ્યાર્થી સમજપૂર્વક પાઠ્યપુસ્તક અને બીજુ સંદર્ભ સાહિત્ય વાંચે એ માટે તેને મદદ કરવી અગત્યની છે. સામાન્ય રીતે વાચન ગણિત શીખવા માટે જરૂરી ગણાતું નથી પરંતુ આગળ જતાં ગણિત શીખવા માટે પુસ્તક વાંચીને તેની સમજ મેળવવી જરૂરી બને છે. ગણિતના પુસ્તકમાં સંક્ષિપ્ત ભાષાનો ઉપયોગ થાય છે. તે સમજવા માટે સંકેતો સાથે કામ પાર પાડવું પડે, તાર્કિક દલીલો સમજવી પડે અને કેટલીક શરતોની જરૂરિયાતનું મહત્વ સમજવું પડે વિદ્યાર્થી ગાણિતીક વિધાનોને સાદાં વિધાનોમાં અને એથી ઉલટું પણ કરે તેનો મહાવરો આપવો જરૂરી છે. વિદ્યાર્થી વિશ્વાસપૂર્વક ભાષાનો ઉપયોગ કરે અને તે સાથે ગાણિતીક વિધાનોથી પણ પ્રત્યાયન કરી શકે એ જરૂરી છે.

ઉચ્ચ પ્રાથમિક કક્ષાએ ગણિત એક મોટા પડકાર રૂપ છે. તે વિદ્યાર્થીના અનુભવ અને તેની આસપાસના વાતાવરણની નજીક હોવું જોઈએ અને સાથે સાથે તે અમૂર્ત પણ હોય. વિદ્યાર્થીઓ ઘણીવાર માત્ર ''ખ્યાલો'' સાથે કામ નથી કરી શકતા, તેનો અર્થ સમજવવા માટે તેમને તેમના અનુભવો સાથે જોડાયેલા સંદર્ભોની પણ જરૂર પડે છે. આ તબક્કો આપણા માટે એક પડકાર છે. કારણ કે આપણે વિદ્યાર્થીને સંદર્ભોના ઉપયોગથી સમજાવવાનું પણ છે પરંતુ સાથે સાથે તેનો સંદર્ભો પરનો આધાર છોડાવવાનો પણ છે. આમ વિદ્યાર્થી સંદર્ભોમાં ઉપયોગમાં લેવાયેલ સિદ્ધાંતો ઓળખી શકે પણ સંદર્ભો પર આધારિત ન રહે એ જરૂરી છે. માધ્યમિક શાળામાં વિદ્યાર્થી આવું કરી શકે એની જરૂરિયાત ઘણી વધારે છે.

ગણિત શિક્ષણ એ માત્ર ઉકેલો અને પદ્ધતિઓનો યાદ રાખવા પૂરતું સીમિત નથી. પરંતુ પ્રશ્નનો ઉકેલ કેવી રીતે મેળવવો તે સમજવાનું છે. કોયડા ઉકેલવાથી વિદ્યાર્થીને તાર્કિક વિચાર કરવાની પદ્ધતિ વિકસાવવાની તક મળે છે અને તેઓ નિષ્ક્રિય ન રહેતાં સક્રીય થઈ જ્ઞાન મેળવી શકે છે. વિદ્યાર્થી પ્રશ્નને ઓળખીને વ્યાખ્યાયિત કરી શકે, તેના ઉકેલ માટેની રીત નક્કી કરી શકે અને જરૂર પડે તેમાં સુધારો કરી શકે એ જરૂરી છે. અહીં શિક્ષકની ભૂમિકા માર્ગદર્શક અને સહાયકની બને છે. વિદ્યાર્થીને કોયડા ઉકેલવાના અનુભવોની સાથે યોગ્ય પ્રવૃત્તિઓ પણ આપવી જરૂરી છે.

જ્યારે કોયડો સામે આવે ત્યારે વિદ્યાર્થી સૌ પ્રથમ તો તેને સમજી શકે એ જરૂરી છે. ત્યારબાદ તેના ઉકેલ માટે જરૂરી જ્ઞાન યાદ કરીને ઉકેલ માટેનું મોડેલ બનાવે એ જરૂરી છે, જેમકે યોગ્ય ઉદાહરણોનો ઉપયોગ આપણે યાદ રાખીએ કે ભૂમિતિમાં તૈયાર કરવા માટે પરિમાણ રહિત આકૃતિ પણ એક મોડેલ છે. જોકે અંકગણિત અને બીજગણિતમાં આવી આકૃતિઓ વધુ મુશ્કેલ બને છે. વિદ્યાર્થી પ્રશ્નને વિભાગોમાં વહેંચીને, યોગ્ય મોડેલ બનાવીને ઉકેલની પદ્ધતિઓ ગોઠવી શકે એ જરૂરી છે. આનો ઉપયોગ અગાઉથી તૈયાર કરેલ અલ્ગોરિધમને બદલે થવો જોઈએ.

સમૂહમાં અધ્યયન થાય અને તેને ઉત્તેજન આપવાની અપેક્ષા, શિક્ષક પાસે છે. હેતુપૂર્ણ વાતચીતથી બાળકો ઘણું શીખે છે. આપણા વર્ગખંડોમાં વિદ્યાર્થીઓમાં પરસ્પર સ્પર્ધાને બદલે અરસપરસ શીખવાની આવડત અને ઈચ્છા વિકસે એ જરૂરી છે. વાતચીત કરવી એ ઘોંઘાટ નથી અને સલાહસૂચન કરવા એ છેતરામણી પણ નથી. વિદ્યાર્થી પરસ્પર મદદરૂપ થાય અને દરેક વિદ્યાર્થી જૂથમાં શીખે એવું વાતાવરણ બનાવવું જરૂરી છે. શિક્ષકે એ ઓળખવું જોઈએ કે જુદાં જુદાં વિદ્યાર્થીઓના જુદા જુદા જૂથ, ભિન્ન રીતોનો ઉપયોગ કરી શકે છે. એમાંની કેટલીક ઘણી સક્ષમ હશે અને કેટલીક એટલી સક્ષમ ન પણ હોય. આવી રીતો વિદ્યાર્થીઓની વૈચારિક ક્રિયાઓ રજૂ કરે છે. એમાં સારી અને ખરાબ રીતોના ભાગ પાડવા અયોગ્ય છે. તેને બદલે બધા જ પ્રયત્નોની નોંધ કરી તેનું વિશ્લેષણ કરવું જોઈએ. એ દરમિયાન ઓછી સક્ષમ રીતોની ચર્ચા કરવી જોઈએ. આખો વર્ગ આવી રીતોને સુધારવા માટે ચર્ચા કરી શકે એટલે કે આપણે બધી જ રીતો સ્વીકારવી જોઈએ. જુદી જુદી કાર્ય પદ્ધતિઓ જાણવાથી વિદ્યાર્થીની ગાણિતીક સમજણ વધુ સ્પષ્ટ થશે અને બીજાઓ શું કાર્ય કરે છે તે જાણવાનું મહત્વ પણ સમજાશે.

આપેલી બાબત સમજવા માટેની જિજ્ઞાસાવૃત્તિ એ વિદ્યાર્થી માટે જ્ઞાન મેળવવાની કુદરતી રીત છે. આ રીત સ્વાભાવિક રીતે અવલોકન કરવાથી શરૂ થઈને જ્ઞાન પ્રાપ્તિમાં પૂર્ણ થાય છે. સંશોધનાત્મક ખુલ્લા જવાબોવાળા, ભૂલો શોધવાના જેવા પ્રશ્નો તેને આપવાથી આ રીત ને મદદ મળી શકે છે. વિદ્યાર્થીઓ સામે પડકાર રૂપ સંશોધનાત્મક પ્રશ્નો આપવા જોઈએ. જેવા કે ભૂમિતિમાં ઘન આકારોની રેખાકૃતિઓ (નેટ) સાથે પ્રયોગો કરવા, કે પડછાયાની રમત દ્વારા ઘન આકારોને સમજવા કે આડછેદ લેવા જેવા પ્રશ્નો અને અંકગણિતમાં સંખ્યાઓ વચ્ચેના સંબંધો શોધીને વ્યાપક સ્વરૂપે લખવા. પૅટર્ન શોધવી અને તેના પરથી બૈજિક સંબંધો શોધવા વગેરે લઈ શકાય.

તાર્કિક દલીલો સમજવાની અને તેમાં રહેલી ક્ષતિઓ શોધવાની તક બાળકોને મળવી જોઈએ. આવી તક તેમને સાબિતીની જરૂરિયાત સમજવા તરફ લઈ જશે.

આ તબક્કે ભૂમિતિ તેના માળખાગત સ્વરૂપમાં શરૂ થઈ રહી છે. વિદ્યાર્થી ભૌમિતિક શબ્દો અને સંબંધો સમજીને કલ્પનાશક્તિ અને સર્જનાત્મકતાનો ઉપયોગ કરે એવી પ્રવૃત્તિઓ એમને આપવી જોઈએ.

ગણિત એ જૂના અને ગૂચવણભર્યા પ્રશ્નોના જવાબો શોધવાનો વિષય નથી. પરંતુ સંશોધનાત્મક અને સર્જનાત્મક વિષય છે એ તે રીતે ઉભરવો જોઈએ કે પ્રશ્નોના ઉકેલ એકથી વધુ રીતે મેળવે અને તેને ઉતેજન અપાય છે. વળી, ભિન્ન વૈકલ્પિક અલ્ગોરિધમ અને રીતોના ઉપયોગની તે સરાહના કરે તે પણ જરૂરી છે.

અહીં પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ, અપૂર્ણાંકો, દશાંશ અપૂર્ણાંકો અને સંમિતિ જેવા મુદ્દાઓને તેમણે કરેલા અભ્યાસ સાથે સાંકળીને રજૂ કર્યા છે. પ્રકરણોને એકબીજા સાથે સાંકળવાનો પ્રયત્ન કર્યો છે અને શરૂઆતના પ્રકરણોમાં તેમણે મેળવેલ જ્ઞાન પાછળના પ્રકરણોમાં આવતી સંકલ્પનાઓ સમજવામાં ઉપયોગી થાય તે રીતે રજૂઆત કરી છે. ઋણ પૂર્ણાંકો, સંમેય સંખ્યાઓ, ભૌમિતિક વિધાનો અને ઘન આકારોના પ્રત્યક્ષીકરણ માટે પૂરતો સમય ફાળવશો.

અમને ખાતરી છે કે આ પુસ્તક વિદ્યાર્થીઓને ગણિતનો આનંદ મેળવવાનું તથા શીખવામાં અને નવી સંકલ્પનાઓમાં વિશ્વાસ કેળવવામાં ઉપયોગી થશે. વ્યક્તિગત અને સામૂહિક રીતે વિચાર કરવાની પૂરતી તક ઊભી થાય એવું અમે સૂચવીએ છીએ. જૂથચર્ચા એ ગણિતના તાસનો એક નિયમિત ભાગ બનવો જોઈએ જેથી વિદ્યાર્થીનો આત્મવિશ્વાસ વધે અને ગણિતનો ભય ભૂતકાળની વાત બની જાય.

પુસ્તક વિશે તમારા તરફથી ટીકાઓ અને સૂચનો આવકાર્ય છે. આશા છે કે તમે તમારા શૈક્ષણિક અનુભવ દરમિયાન વિકસાવેલ પ્રવૃત્તિઓ અને સ્વાધ્યાયો અમને મોકલશો જેનો અમે ભવિષ્યની આવૃત્તિમાં સમાવેશ કરીશું.

Textbook Development Committee

CHAIRPERSON, ADVISORY GROUP IN SCIENCE AND MATHEMATICS

J.V. Narlikar, *Emeritus Professor*, Inter University Centre for Astronomy and Astrophysics (IUCCA), Ganeshkhind, Pune University, Pune, Maharashtra

CHIEF ADVISOR

H.K. Dewan, Vidya Bhawan Society, Udaipur, Rajasthan

CHIEF COORDINATOR

Hukum Singh, *Professor* and *Head (Retd.),* DESM, NCERT, New Delhi

MEMBERS

Anjali Gupte, *Teacher*, Vidya Bhawan Public School, Udaipur, Rajasthan

Avantika Dam, *TGT*, CIE Experimental Basic School, Department of Education, Delhi

H.C. Pradhan, *Professor*, Homi Bhabha Centre for Science Education, TIFR, Mumbai, Maharashtra

Mahendra Shankar, *Lecturer (S.G.) (Retd.),* NCERT, New Delhi

Meena Shrimali, *Teacher*, Vidya Bhawan Senior Secondary School, Udaipur, Rajasthan

R. Athmaraman, *Mathematics Education Consultant*, TI Matric Higher Secondary School and AMTI, Chennai, Tamil Nadu

S.K.S. Gautam, *Professor*, DESM, NCERT, New Delhi

Shradha Agarwal, *PGT*, Sir Padampat Singhania Education Centre, Kanpur (U.P.)

Srijata Das, *Senior Lecturer* in Mathematics, SCERT, New Delhi

V.P. Singh, *Reader (Retd.)*, DESM, NCERT, New Delhi

MEMBER-COORDINATOR

Ashutosh K. Wazalwar, *Professor,* DESM, NCERT, New Delhi

Acknowledgements

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop – Ms. Nirupma Sahni, *TGT,* Mahavir Digambar Jain Sr. Sec. School, Jaipur; Dr Roohi Fatima, *TGT,* Jamia Middle School, New Delhi; Ms. Deepti Mathur, *TGT,* Mother's International School, New Delhi; Shri K. Balaji, *TGT,* Kendriya Vidyalaya, Donimalai, Karnataka; Shri Amit Bajaj, *TGT,* CRPF Public School, Delhi; Ms. Omlata Singh, *TGT,* Presentation Convent Sr. Sec. School, Delhi; Shri Nagesh S. Mone, *TGT,* Dravid High School, Wai, Maharashtra; Shri Gorakh Nath Sharma, *PGT,* Jawahar Navodaya Vidyalaya, Mesra, Ranchi, Jharkhand; Shri Ajay Kumar Singh, *TGT,* Ramjas Sr. Sec. School, No.3, Delhi; Ms. Ragini Subramanian, *TGT,* SRDF Vivekananda Vidyalaya, Chennai, Tamil Nadu; Shri Rajkumar Dhawan, *PGT,* Geeta Sr. Sec. School No.2, Delhi; Dr Sanjay Mudgil, *Lecturer,* CIET, NCERT, New Delhi; Dr. Sushma Jaireth, *Reader,* DWS, NCERT, New Delhi; Dr Mona Yadav, *Lecturer,* DWS, NCERT, New Delhi.

The Council acknowledges the comments/suggestions given by Dr Ram Avtar (*Retd. Professor,* NCERT) *Consultant,* DESM, NCERT, New Delhi, Dr R.P. Maurya, *Reader,* DESM, NCERT, New Delhi and Shri Sanjay Bolia, *Senior Teacher,* Vidya Bhawan Basic Secondary School, Udaipur, Rajasthan for the improvement of the content.

The Council acknowledges the support and facilities provided by Vidya Bhawan Society and its staff, Udaipur, for conducting workshops of the development committee at Udaipur, and to the Director, Centre for Science Education and Communication (CSEC), Delhi University for providing library help.

The Council acknowledges the academic and administrative support of Professor Hukum Singh, *Head,* DESM, NCERT, New Delhi.

The Council also acknowledges the efforts of S.M. Ikram, *DTP Operator,* Vidya Bhawan Society Udaipur; Sajjad Haider Ansari, Rakesh Kumar and Neelam Walecha, *DTP Operators,* Kanwar Singh, *Copy Editor,* NCERT; Abhimanu Mohanty, *Proof Reader,* NCERT; Deepak Kapoor, *Computer Station Incharge,* DESM, NCERT for technical assistance, APC-office and the Administrative Staff, DESM, NCERT; and the Publication Department of the NCERT.

39BMPH

અનુક્રમણિકા

THE CONSTITUTION OF INDIA

PREAMBLE

WE, THE PEOPLE OF INDIA, having solemnly resolved to constitute India into a [1]**[SOVEREIGN SOCIALIST SECULAR DEMOCRATIC REPUBLIC]** and to secure to all its citizens :

JUSTICE, social, economic and political;

LIBERTY of thought, expression, belief, faith and worship;

EQUALITY of status and of opportunity; and to promote among them all

FRATERNITY assuring the dignity of the individual and the [2][unity and integrity of the Nation];

IN OUR CONSTITUENT ASSEMBLY this twenty-sixth day of November, 1949 do **HEREBY ADOPT, ENACT AND GIVE TO OURSELVES THIS CONSTITUTION.**

---

1. Subs. by the Constitution (Forty-second Amendment) Act, 1976, Sec.2, for "Sovereign Democratic Republic" (w.e.f. 3.1.1977)
2. Subs. by the Constitution (Forty-second Amendment) Act, 1976, Sec.2, for "Unity of the Nation" (w.e.f. 3.1.1977)

પ્રકરણ 1

પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ

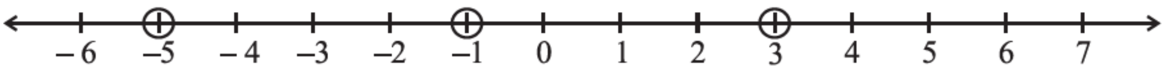
D245CP

1.1 પરિચય

આપણે ધોરણ - 6માં પૂર્ણ સંખ્યાઓ અને પૂર્ણાંકો વિશે શીખી ગયાં છીએ. આપણે જાણીએ છીએ કે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો એક મોટો સમૂહ હોય છે જેમાં પૂર્ણ સંખ્યાઓ અને ઋણ સંખ્યાઓનો સમાવેશ થાય છે. શું તમે પૂર્ણ સંખ્યાઓ અને પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ વચ્ચે તફાવત શોધી શકો છો ? આ પ્રકરણમાં આપણે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ અને તેમના ગુણધર્મો અને ક્રિયાઓ વિશે વધુ અભ્યાસ કરીશું. સૌ પ્રથમ આપણે અગાઉના ધોરણમાંની પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ વિશે સમીક્ષા અને પુનરાવર્તન કરીશું.

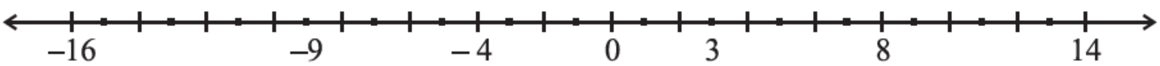
1.2 પુનરાવર્તન (Recall)

આપણે જાણીએ છીએ કે સંખ્યારેખા પર પૂર્ણાંક સંખ્યાઓને કેવી રીતે દર્શાવી શકાય. નીચે આપેલ સંખ્યારેખા પર કેટલીક પૂર્ણાંક સંખ્યાઓને અંકિત કરવામાં આવેલ છે.



શું તમે અંકિત કરેલી પૂર્ણાંક સંખ્યાઓને ચડતા ક્રમમાં લખી શકો છો ? આ સંખ્યાઓનો ચડતો ક્રમ –5, –1, 3 છે. શા માટે આપણે –5 ને સૌથી નાની સંખ્યા તરીકે પસંદ કરી છે ?

નીચે આપેલ સંખ્યારેખા પર પૂર્ણાંક સંખ્યા સાથે કેટલાંક બિંદુ અંકિત કરવામાં આવેલ છે. એ પૂર્ણાંક સંખ્યાને ઊતરતા ક્રમમાં ગોઠવો.

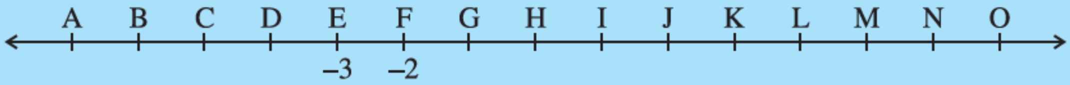


આ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો ઊતરતો ક્રમ : 14, 8, 3,... છે.

ઉપરોક્ત સંખ્યારેખા ઉપર કેટલીક પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ દર્શાવી છે. દરેક બિંદુ આગળ યોગ્ય સંખ્યા દર્શાવો.

પ્રયત્ન કરો

1. નીચે આપેલ સંખ્યારેખા પર પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ દર્શાવી છે.



–3 અને –2 ને ક્રમશઃ E અને F પર અંકિત કરવામાં આવેલ છે. કઈ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ B, D, H, J, M અને O વડે દર્શાવાશે ?

2. 7, –5, 4, 0 અને –4 ને ચડતા ક્રમમાં ગોઠવી તેને સંખ્યારેખા પર દર્શાવીને તમારો જવાબ ચકાસો.

આપણે, અગાઉના ધોરણમાં પૂર્ણાંક સંખ્યાઓના સરવાળા અને બાદબાકી કરતાં શીખી ગયાં છીએ.

નીચે આપેલાં વિધાનો વાંચો : સંખ્યારેખા પર,

(i) ધન પૂર્ણાંક ઉમેરતાં આપણે જમણી બાજુ ખસીએ છીએ.

(ii) ઋણ પૂર્ણાંક ઉમેરતાં આપણે ડાબી બાજુ ખસીએ છીએ.

(iii) ધન પૂર્ણાંકની બાદબાકી કરતાં આપણે ડાબી બાજુ ખસીએ છીએ.

(iv) ઋણ પૂર્ણાંકની બાદબાકી કરતાં આપણે જમણી બાજુ ખસીએ છીએ.

નીચે આપેલાં વિધાનો સાચાં છે કે ખોટાં તે જણાવો. જો ખોટાં હોય તો સુધારો :

(i) જ્યારે બે ધન પૂર્ણાંકોનો સરવાળો કરવામાં આવે તો આપણને ધન પૂર્ણાંક મળે છે.

(ii) જ્યારે બે ઋણ પૂર્ણાંકોનો સરવાળો કરવામાં આવે તો આપણને ધન પૂર્ણાંક મળે છે.

(iii) જ્યારે એક ધન પૂર્ણાંક અને એક ઋણ પૂર્ણાંકનો સરવાળો કરવામાં આવે તો હંમેશાં આપણને ઋણ પૂર્ણાંક મળે છે.

(iv) પૂર્ણાંક સંખ્યા 8 ની વિરોધી સંખ્યા (–8) છે અને પૂર્ણાંક સંખ્યા (–8) ની વિરોધી સંખ્યા 8 છે.

(v) બાદબાકી માટે જે પૂર્ણાંક સંખ્યાની બાદબાકી કરવાની હોય તેની વિરોધી સંખ્યા, બીજી પૂર્ણાંક સંખ્યામાં ઉમેરવામાં આવે છે.

(vi) $(-10) + 3 = 10 - 3$

(vii) $8 + (-7) - (-4) = 8 + 7 - 4$

નીચેના જવાબો સાથે તમારા જવાબની સરખામણી કરો.

(i) સાચું છે, ઉદાહરણ તરીકે :

(a) $56 + 73 = 129$ (b) $113 + 82 = 195$ વગેરે.

આ વિધાનને ચકાસવા અન્ય પાંચ ઉદાહરણો આપો.

(ii) ખોટું છે, કારણ કે $(-6) + (-7) = -13$ થશે જે ધન પૂર્ણાંક નથી. સાચું વિધાન આ પ્રમાણે થશે. જ્યારે બે ઋણ પૂર્ણાંકોનો સરવાળો કરવામાં આવે છે ત્યારે આપણને ઋણ પૂર્ણાંક જ મળે છે.

ઉદાહરણ તરીકે,

(a) $(-56) + (-73) = -129$ (b) $(-113) + (-82) = -195$, વગેરે

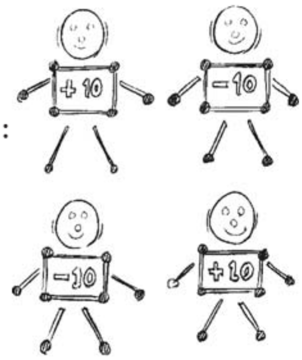
આ વિધાનને ચકાસવા અન્ય તમારા પાંચ ઉદાહરણો આપો.

(iii) ખોટું છે, કારણ કે $-9 + 16 = 7$ જે ઋણ પૂર્ણાંક નથી. સાચું વિધાન આ પ્રમાણે થશે. જ્યારે એક ધન પૂર્ણાંક અને એક ઋણ પૂર્ણાંકનો સરવાળો કરવામાં આવે છે ત્યારે એનો તફાવત લઈને મોટી પૂર્ણાંક સંખ્યાનું ચિહ્ન મૂકવામાં આવે છે. બંને પૂર્ણાંક સંખ્યાઓના ચિહ્નની અવગણના કરી મોટી પૂર્ણાંક સંખ્યા દ્વારા ચિહ્ન નક્કી કરવામાં આવે છે. ઉદાહરણ તરીકે,

(a) $(-56) + (73) = 17$ (b) $(-113) + 82 = -31$

(c) $16 + (-23) = -7$ (d) $125 + (-101) = 24$

આ વિધાનને ચકાસવા અન્ય પાંચ ઉદાહરણો આપો.



(iv) સાચું છે, વિરોધી સંખ્યાઓનાં કેટલાંક ઉદાહરણો નીચે પ્રમાણે છે :

પૂર્ણાંક સંખ્યા	વિરોધી સંખ્યા
10	–10
–10	10
76	–76
–76	76

આમ, કોઈ પણ પૂર્ણાંક a ની વિરોધી સંખ્યા $-a$ અને $(-a)$ ની વિરોધી સંખ્યા a થશે.

(v) સાચું છે, બાદબાકી એ સરવાળાની વિરુદ્ધ હોવાથી આપણે બાદબાકીવાળી પૂર્ણાંક સંખ્યાની વિરોધી સંખ્યા સાથે બીજી પૂર્ણાંક સંખ્યાનો સરવાળો કરીએ છીએ. ઉદાહરણ તરીકે,

(a) $56 - 73 = 56$ સાથે 73 ની વિરોધી સંખ્યાનો સરવાળો $= 56 + (-73) = -17$

(b) $56 - (-73) = 56$ સાથે (-73) ની વિરોધી સંખ્યાનો સરવાળો $= 56 + 73 = 129$

(c) $(-79) - 45 = (-79) + (-45) = -124$

(d) $(-100) - (-172) = -100 + 172 = 72$ વગેરે.

આ વાક્યની ચકાસણી કરવા માટે ઓછામાં ઓછાં પાંચ ઉદાહરણો આપો.

આ પ્રમાણે કોઈ પણ બે પૂર્ણાંક સંખ્યા a અને b માટે

$a - b = a + (b$ ની વિરોધી સંખ્યા$) = a + (-b)$

અને $a - (-b) = a + [(-b)$ ની વિરોધી સંખ્યા$] = a + b$

(vi) ખોટું છે કારણ કે $(-10) + 3 = -7$ અને $10 - 3 = 7$

એટલા માટે, $(-10) + 3 \neq 10 - 3$

(vii) ખોટું છે કારણ કે $8 + (-7) - (-4) = 8 + (-7) + 4 = 1 + 4 = 5$

અને $8 + 7 - 4 = 15 - 4 = 11$

એટલા માટે $8 + (-7) - (-4) \neq 8 + 7 - 4$

પ્રયત્ન કરો

અગાઉના વર્ગમાં આપણે સંખ્યાઓ સાથે વિવિધ પેટર્નના દાખલાઓ કર્યા છે. શું તમે નીચે આપેલ પ્રત્યેક માટે કઈ પેટર્ન લાગુ પડે છે એ ઓળખી શકો છો ? જો હા, તો નીચેની ખાલી જગ્યા પૂરો.

(a) 7, 3, –1, –5, ______, ______, ______.

(b) –2, –4, –6, –8, ______, ______, ______.

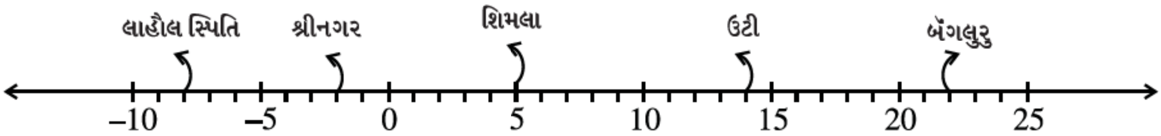
(c) 15, 10, 5, 0, ______, ______, ______.

(d) –11, –8, –5, –2, ______, ______, ______.

આવી બીજી પેટર્ન બનાવો અને તમારા મિત્રોને પૂર્ણ કરવા માટે કહો.

સ્વાધ્યાય 1.1

1. આપેલ સંખ્યા રેખા પર કોઈ એક દિવસનાં જુદાં જુદાં સ્થળોનાં તાપમાન ડિગ્રી સેલ્સિયસ (°C) વડે દર્શાવવામાં આવેલ છે.



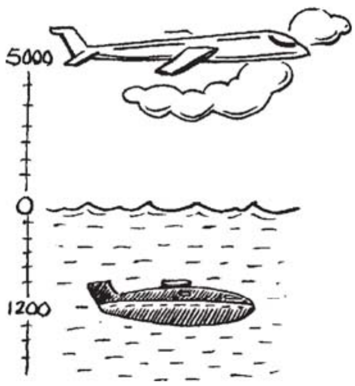
(a) આ સંખ્યારેખાને જુઓ અને એના પર દર્શાવેલ સ્થળોનાં તાપમાન લખો.

(b) ઉપર આપેલ સ્થળોનાં તાપમાનમાં સૌથી ગરમ અને સૌથી ઠંડાં સ્થળોના તાપમાનમાં શું તફાવત છે ?

(c) લાહૌલ સ્પિતિ અને શ્રીનગરના તાપમાનમાં શું તફાવત છે ?

(d) શું આપણે કહી શકીએ કે શ્રીનગર અને શિમલાનું સંયુક્ત તાપમાન શિમલાનાં તાપમાન કરતાં પણ ઓછું છે ? શું તે શ્રીનગરના તાપમાન કરતાં પણ ઓછું છે ?

2. કોઈ એક પ્રશ્નોત્તરીમાં સાચા જવાબ માટે ધન અંક આપવામાં આવે છે અને ખોટા જવાબ માટે ઋણ અંક આપવામાં આવે છે. જો પાંચ ક્રમિક રાઉન્ડમાં જૅકે પ્રાપ્ત કરેલ અંકો 25, –5, –10, 15 અને 10 છે, તો અંતમાં તેના કુલ ગુણ કેટલા થશે ?

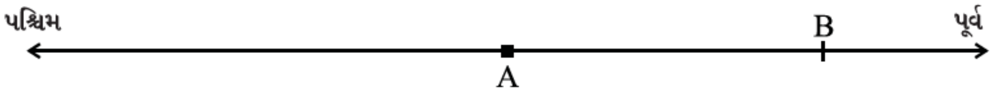


3. સોમવારે શ્રીનગરનું તાપમાન - 5°C હતું અને મંગળવારનું તાપમાન 2°C ઓછું થયું. તો મંગળવારે શ્રીનગરનું તાપમાન શું હતું ? બુધવારે તાપમાન 4°C વધી ગયું. તો આ દિવસે તાપમાન કેટલું હતું ?

4. એક વિમાન સમુદ્રતટથી 5000 મીટરની ઊંચાઈએ ઊડે છે. કોઈ એક ચોક્કસ બિંદુ પર આ વિમાન સમુદ્રની સપાટીથી 1200 મીટર નીચે તરતી સબમરીનની બરાબર ઉપર છે. સબમરીન અને વિમાન વચ્ચેનું લંબઅંતર શું થશે ?

5. મોહન તેના બેંકના ખાતામાં ₹ 2,000 જમા કરાવે છે અને બીજે દિવસે તેમાંથી ₹ 1,642 ઉપાડે છે. જો ઉપાડેલ રકમને ઋણ પૂર્ણાંક વડે દર્શાવાય તો જમા કરાવેલ રકમને તમે કઈ રીતે દર્શાવશો ? ઉપાડ પછી મોહનના ખાતામાં કેટલી સિલક છે તે શોધો.

6. રીટા બિંદુ A થી પૂર્વ દિશા તરફ બિંદુ B સુધી 20 કિલોમીટરનું અંતર કાપે છે. એ જ રસ્તે તે બિંદુ B થી પશ્ચિમ દિશા તરફ 30 કિલોમીટરનું અંતર કાપે છે. જો પૂર્વ તરફ કાપેલ અંતરને ધન પૂર્ણાંક દર્શાવવામાં આવે, તો પશ્ચિમ દિશા તરફ કાપેલ અંતરને તમે કેવી રીતે દર્શાવશો ? બિંદુ Aથી તેની અંતિમ સ્થિતિને તમે કઈ પૂર્ણાંક સંખ્યા વડે દર્શાવશો ?



7. એક જાદુઈ ચોરસમાં દરેક હરોળ, સ્તંભ અને વિકર્ણ સમાન સરવાળો ધરાવે છે. આપેલ ચોરસમાં કયો જાદુઈ ચોરસ છે તે તપાસો.

5	–1	–4
–5	–2	7
0	3	–3

1	–10	0
–4	–3	–2
–6	4	–7

8. નીચે આપેલી કિંમતો a અને b માટે $a - (-b) = a + b$ ચકાસો.

(i) $a = 21, b = 18$ (ii) $a = 118, b = 125$

(iii) $a = 75, b = 84$ (iv) $a = 28, b = 11$

9. વાક્યને સાચું બનાવવા માટે ખાનામાં >, < અથવા = ચિહ્નનો ઉપયોગ કરો.

(a) $(-8) + (-4)$ $\square$ $(-8) - (-4)$

(b) $(-3) + 7 - (19)$ $\square$ $15 - 8 + (-9)$

(c) $23 - 41 + 11$ $\square$ $23 - 41 - 11$

(d) $39 + (-24) - (15)$ $\square$ $36 + (-52) - (-36)$

(e) $-231 + 79 + 51$ $\square$ $-399 + 159 + 81$

10. પાણીની ટાંકીની અંદર પગથિયાં આવેલાં છે. એક વાંદરો સૌથી ઉપરના પગથિયા પર બેઠો છે (અર્થાત્ સૌથી પહેલું પગથિયું) પાણીનું સ્તર નવમા પગથિયા પર છે.

(i) તે એક કૂદકામાં ત્રણ પગથિયાં નીચે અને પછીના કૂદકામાં 2 પગથિયાં ઉપર આવે છે. તો તે કેટલામા કૂદકે પાણીના સ્તરે પહોંચશે ?

(ii) પાણી પી લીધા પછી તે પાછો ફરે છે. આ માટે તે 4 પગથિયાં ઉપર કૂદકો મારે છે અને તે પછી દરેક ચાલમાં 2 પગથિયાં નીચે કૂદકો મારે છે તો તે કેટલામા કૂદકે ટોચના પગથિયે પાછો પહોંચશે ?

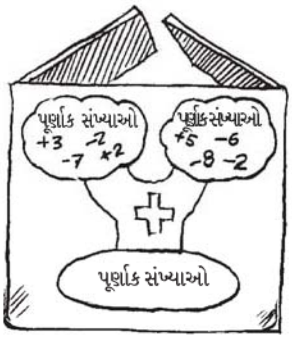
(iii) નીચેની તરફનાં પગથિયાંની સંખ્યાને ઋણ પૂર્ણાંક દર્શાવીએ અને ઉપરની તરફનાં પગથિયાંની સંખ્યાને ધન પૂર્ણાંક દર્શાવીએ. તેની ચાલને દર્શાવવા માટે ભાગ (i) અને (ii) દ્વારા નીચેની બાબતો પૂર્ણ કરો ; (a) $- 3 + 2 - ... = - 8$ (b) $4 - 2 + ... = 8$. જેમાં (a) રકમ (–8) એ આઠ પગથિયાં નીચે જવાનું દર્શાવે છે, તો (b) માં રકમ 8 શું દર્શાવે છે ?

1.3 પૂર્ણાંક સંખ્યાઓના સરવાળા અને બાદબાકીના ગુણધર્મો (Properties of Addition and Subtraction of Integers)

39KSR5

1.3.1 સરવાળા વિશે સંવૃતતા (Closure under Addition)

આપણે શીખી ગયા છીએ કે કોઈ પણ બે પૂર્ણ સંખ્યાઓનો સરવાળો કરતાં ફરી પૂર્ણ સંખ્યા થાય છે. ઉદાહરણ તરીકે $17 + 24 = 41$ જે ફરીથી પૂર્ણ સંખ્યા છે. આપણે જાણીએ છીએ કે પૂર્ણ સંખ્યાઓ સરવાળા વિશે સંવૃતતા ધરાવે છે.



તો ચાલો, જોઈએ કે આ ગુણધર્મ પૂર્ણાંક સંખ્યા માટે સાચો છે કે નહિ.
નીચે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓની કેટલીક જોડીઓ આપેલ છે. કોષ્ટકને ધ્યાનથી જુઓ અને પૂર્ણ કરો.

વિધાન	નિરીક્ષણ
(i) $17 + 23 = 40$	પરિણામ પૂર્ણાંક છે.
(ii) $(-10) + 3 =$ ______	______
(iii) $(-75) + 18 =$ ______	______
(iv) $19 + (-25) = -6$	પરિણામ પૂર્ણાંક છે.
(v) $27 + (-27) =$ ______	______
(vi) $(-20) + 0 =$ ______	______
(vii) $(-35) + (-10) =$ ______	______

તમે શું નિરીક્ષણ કર્યું ? શું બે પૂર્ણાંક સંખ્યાનો સરવાળો હંમેશાં પૂર્ણાંક હોય છે ?
જેમનો સરવાળો પૂર્ણાંક ના હોય તેવી પૂર્ણાંક સંખ્યાઓની જોડી શું તમે શોધી શકો છો ?
પૂર્ણાંક સંખ્યાનો સરવાળો કરવાથી પૂર્ણાંક સંખ્યા જ મળે છે. **તેથી આપણે કહી શકીએ છીએ કે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ સરવાળા વિશે સંવૃતતા ધરાવે છે.** વ્યાપક રીતે, કોઈ પણ બે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ a અને b માટે $a + b$ પૂર્ણાંક છે.

1.3.2 બાદબાકી વિશે સંવૃતતા (Closure under Subtraction)

જ્યારે આપણે એક પૂર્ણાંક સંખ્યામાંથી બીજી પૂર્ણાંક સંખ્યા બાદ કરીએ છીએ ત્યારે શું થાય છે ? શું આપણે કહી શકીએ છીએ કે તેમનો તફાવત એક પૂર્ણાંક છે ?
નીચે આપેલા કોષ્ટકને જુઓ અને પૂર્ણ કરો.

વિધાન	નિરીક્ષણ
(i) $7 - 9 = -2$	પરિણામ પૂર્ણાંક છે.
(ii) $17 - (-21) =$ ______	______
(iii) $(-8) - (-14) = 6$	પરિણામ પૂર્ણાંક છે.
(iv) $(-21) - (-10) =$ ______	______
(v) $32 - (-17) =$ ______	______
(vi) $(-18) - (-18) =$ ______	______
(vii) $(-29) - 0 =$ ______	______

તમે શું નિરીક્ષણ કર્યું ? શું તમે જેમની બાદબાકી પૂર્ણાંક ના હોય તેવી પૂર્ણાંક સંખ્યાઓની જોડી શોધી શકો છો ? શું આપણે કહી શકીએ છીએ કે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ બાદબાકી વિશે સંવૃતતા ધરાવે છે ? હા, આપણે કહી શકીએ છીએ કે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ બાદબાકી વિશે સંવૃતતા ધરાવે છે.

જો a અને b બે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ હોય તો $a - b$ પણ પૂર્ણાંક છે. શું પૂર્ણ સંખ્યા આ ગુણધર્મને અનુસરે છે ?

1.3.3 ક્રમનો ગુણધર્મ (Commutative Property)

આપણે જાણીએ છીએ કે $3 + 5 = 5 + 3 = 8$ એટલે કે પૂર્ણ સંખ્યાઓનો કોઈ પણ ક્રમમાં સરવાળો કરી શકાય છે. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો પૂર્ણ સંખ્યાનો સરવાળો સમક્રમી હોય છે. શું આપણે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ માટે પણ આમ કહી શકીએ છીએ ?

આપણી પાસે $5 + (-6) = -1$ અને $(-6) + 5 = -1$

તેથી $5 + (-6) = (-6) + 5$

નીચેનાં સમાન છે ?

(i) $(-8) + (-9)$ અને $(-9) + (-8)$

(ii) $(-23) + 32$ અને $32 + (-23)$

(iii) $(-45) + 0$ અને $0 + (-45)$

પૂર્ણાંક સંખ્યાઓની અન્ય પાંચ જોડીઓ માટે આ પ્રયત્ન કરો. શું તમે પૂર્ણાંક સંખ્યાની કોઈ એવી જોડી શોધી શકો જેમાં પૂર્ણાંકનો ક્રમ બદલવાથી તેનો સરવાળો પણ બદલાઈ જાય છે ? ચોક્કસપણે શક્ય નથી. આ રીતે આપણે તારણ કાઢી શકીએ છીએ કે **પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ માટે સરવાળો સમક્રમી છે.** વ્યાપક રીતે, કોઈ પણ બે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ a અને b માટે આપણે કહી શકીએ કે,

$$\boxed{a + b = b + a}$$

- આપણે જાણીએ છીએ કે પૂર્ણ સંખ્યા માટે બાદબાકી સમક્રમી હોતી નથી. શું પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ માટે બાદબાકી સમક્રમી છે ?

  5 અને (-3) પૂર્ણાંક સંખ્યા માટે વિચારો.

  શું $5 - (-3)$ અને $(-3) - 5$ સરખા છે ? ના. કારણ કે $5 - (-3) = 5 + 3 = 8$ અને $(-3) - 5 = -3 - 5 = -8$.

  પૂર્ણાંક સંખ્યાની ઓછામાં ઓછી પાંચ અલગ જોડીઓ લઈને આ તપાસો.

  આપણે કહી શકીએ છીએ કે **પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ માટે બાદબાકી સમક્રમી નથી.**

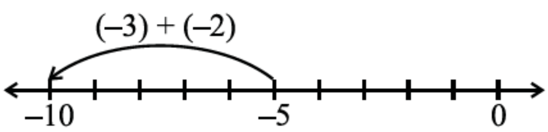
1.3.4 જૂથનો ગુણધર્મ (Associative Property)

આપેલાં ઉદાહરણો જુઓ :

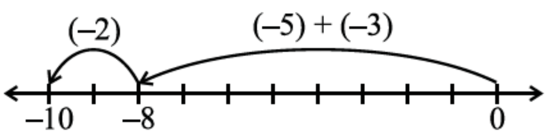
$-3, -2$ અને -5 પૂર્ણાંક સંખ્યા માટે વિચારીએ.

$(-5) + [(-3) + (-2)]$ અને $[(-5) + (-3)] + (-2)$ જુઓ.

પ્રથમ રકમમાં (-3) અને (-2) નું જૂથ બનેલું છે. જ્યારે બીજીમાં (-5) અને (-3) નું જૂથ બનેલું છે. હવે આપણે ભિન્ન પરિણામ મળે કે કેમ તે તપાસીશું.



$(-5) + [(-3) + (-2)]$



$[(-5) + (-3)] + (-2)$

આ બન્ને કિસ્સામાં –10 પ્રાપ્ત થાય છે.

ઉ.દા. $(-5) + [(-3) + (-2)] = [(-5) + (-3)] + (-2)$

તે જ રીતે –3, 1 અને 7 માટે.

$(-3) + [1 + (-7)] = -3 +$ ________ = ________

$[(-3) + 1] + (-7) = -2 +$ ________ = ________

શું $(-3) + [(1 + (-7)]$ અને $[(-3) + 1] + (-7)$ સરખા છે ?

અન્ય પાંચ ઉદાહરણો લો. એવાં ઉદાહરણો તમને મળશે નહિ જેના માટે સરવાળો અલગ હોય. આ દર્શાવે છે કે પૂર્ણાંકો માટે **સરવાળો જૂથનો ગુણધર્મ ધરાવે છે.**

વ્યાપક રીતે કોઈ પણ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ a, b અને c માટે આપણે કહી શકીએ છીએ કે,

$$\boxed{a + (b + c) = (a + b) + c}$$

1.3.5 સરવાળાનો તટસ્થતાનો ગુણધર્મ (Additive Identity)

જ્યારે આપણે પૂર્ણ સંખ્યામાં શૂન્ય ઉમેરીએ છીએ ત્યારે આપણને તે જ પૂર્ણ સંખ્યા મળે છે. પૂર્ણ સંખ્યા માટે શૂન્ય તટસ્થ છે. શું એ અન્ય પૂર્ણાંક સંખ્યા માટે પણ તટસ્થ છે ?

ઉપરોક્ત ગુણધર્મ પરથી નીચે આપેલી ખાલી જગ્યા પૂરો :

(i) $(-8) + 0 = (-8)$ (ii) $0 + (-8) = (-8)$

(iii) $(-23) + 0 =$ ______ (iv) $0 + (-37) = (-37)$

(v) $0 + (-59) =$ ______ (vi) $0 +$ ______ $= (-43)$

(vii) $(-61) +$ ______ $= (-61)$ (viii) ______ $+ 0 =$ ______

ઉપરોક્ત ઉદાહરણો દર્શાવે છે કે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ માટે શૂન્ય તટસ્થ છે. તમે અન્ય પાંચ પૂર્ણાંક સંખ્યા સાથે શૂન્ય ઉમેરી ચકાસણી કરો. વ્યાપક રીતે કોઈ પણ પૂર્ણાંક a માટે,

$$\boxed{a + 0 = a = 0 + a}$$

પ્રયત્ન કરો

1. પૂર્ણાંક સંખ્યાની એવી જોડી બનાવો કે જેનો સરવાળો નીચે મુજબ થાય.

   (a) ઋણ પૂર્ણાંક હોય (b) શૂન્ય હોય

   (c) બંને પૂર્ણાંક સંખ્યા કરતાં નાનો પૂર્ણાંક હોય. (d) માત્ર એક પૂર્ણાંક સંખ્યા કરતાં નાનો પૂર્ણાંક હોય.

   (e) બંને પૂર્ણાંક સંખ્યા કરતાં મોટી પૂર્ણાંક સંખ્યા હોય.

2. પૂર્ણાંક સંખ્યાની એવી જોડી લખો, જેનો તફાવત નીચે મુજબ થાય.

   (a) ઋણ પૂર્ણાંક હોય (b) શૂન્ય હોય

   (c) બંને પૂર્ણાંક સંખ્યા કરતાં નાનો પૂર્ણાંક હોય (d) માત્ર એક પૂર્ણાંક સંખ્યા કરતાં નાનો પૂર્ણાંક હોય

   (e) બંને પૂર્ણાંક સંખ્યા કરતાં મોટી પૂર્ણાંક સંખ્યા હોય

ઉદાહરણ 1 પૂર્ણાંક સંખ્યાની જોડી લખો જેનો,

(a) સરવાળો (–3) હોય (b) તફાવત (–5) હોય

(c) તફાવત 2 હોય (d) સરવાળો 0 હોય

જવાબો (a) $(-1) + (-2) = (-3)$ અથવા $(-5) + 2 = (-3)$

(b) $(-9) - (-4) = (-5)$ અથવા $(-2) - 3 = (-5)$

(c) $(-7) - (-9) = 2$ અથવા $1 - (-1) = 2$

(d) $(-10) + 10 = 0$ અથવા $5 + (-5) = 0$

આ ઉદાહરણો પરથી તમે વધુ જોડી બનાવી શકો છો ?

સ્વાધ્યાય 1.2

1. પૂર્ણાંક સંખ્યાઓની જોડી લખો. જેનો,

   (a) સરવાળો (–7) હોય (b) તફાવત (–10) હોય (c) સરવાળો 0 હોય

2. (a) જેનો તફાવત 8 હોય એવા ઋણ પૂર્ણાંકોની જોડી લખો.

   (b) જેનો સરવાળો (–5) હોય એવા ઋણ પૂર્ણાંક અને ધન પૂર્ણાંક લખો.

   (c) જેનો તફાવત (–3) હોય એવા ઋણ પૂર્ણાંક અને ધન પૂર્ણાંક લખો.

3. ક્વીઝના ત્રણ ક્રમિક રાઉન્ડ પછી ટીમ A ના ગુણ (–40), 10, 0 છે અને ટીમ B ના ગુણ 10, 0, –40 છે. કઈ ટીમના ગુણ વધુ છે ? શું આપણે કહી શકીએ કે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓને કોઈ પણ ક્રમમાં ઉમેરી શકીએ ?

4. નીચે આપેલ વિધાનોને સાચાં બનાવવા માટે ખાલી જગ્યા પૂરો :

   (i) $(-5) + (-8) = (-8) + (..........)$

   (ii) $(-53) + ... = (-53)$

   (iii) $17 + ... = 0$

   (iv) $[13 + (-12)] + (..........) = 13 + [(-12) + (-7)]$

   (v) $(-4) + [15 + (-3)] = [(-4) + 15] + ...$

1.4 પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર (Multiplication of Integers)

આપણે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો સરવાળો અને બાદબાકી શીખ્યા, તો ચાલો હવે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર કેવી રીતે થાય એ શીખીએ.

1.4.1 ધન અને ઋણ પૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર (Multiplication of a Positive and a Negative Integer)

આપણે જાણીએ છીએ કે પૂર્ણ સંખ્યાઓનો ગુણાકાર પુનરાવર્તિત સરવાળો છે. દાખલા તરીકે,

$$5 + 5 + 5 = 3 \times 5 = 15$$

શું તમે એ જ રીતે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો સરવાળો દર્શાવી શકો છો ?

પ્રયત્ન કરો

સંખ્યા રેખાની મદદથી શોધો.

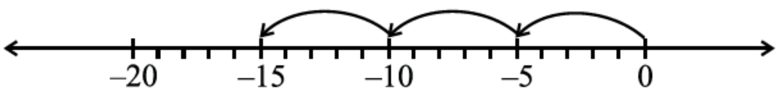
$4 \times (-8)$,

$8 \times (-2)$,

$3 \times (-7)$,

$10 \times (-1)$

આપણે નીચેની સંખ્યારેખા પર $(-5) + (-5) + (-5) = -15$ જોઈ શકીએ છીએ.

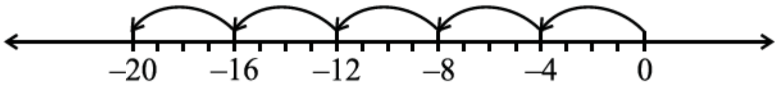


આપણે આ રીતે પણ લખી શકીએ

$$(-5) + (-5) + (-5) = 3 \times (-5)$$

એટલે કે, $3 \times (-5) = -15$

એ જ રીતે, $(-4) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) = 5 \times (-4) = (-20)$



અને $(-3) + (-3) + (-3) + (-3) =$ ________ $=$ ________

વળી, $(-7) + (-7) + (-7) =$ ________ $=$ ________

ચાલો, આપણે જોઈએ કે સંખ્યા રેખાની મદદ વિના ધન પૂર્ણાંક અને ઋણ પૂર્ણાંકના ગુણાકાર કેવી રીતે થાય છે.

ચાલો $3 \times (-5)$ ને બીજી રીતે શોધીએ. પ્રથમ 3×5 શોધો અને જવાબની આગળ (–)નું ચિહ્ન મૂકો. તમને –15 મળશે એટલે કે (–15) મેળવવા માટે આપણે $-(3 \times 5)$ કર્યા.

એ જ રીતે $5 \times (-4) = -(5 \times 4) = (-20)$

એ જ રીતે શોધો,

$4 \times (-8) =$ _____ $=$ _____, $3 \times (-7) =$ _____ $=$ _____

$6 \times (-5) =$ _____ $=$ _____, $2 \times (-9) =$ _____ $=$ _____

આપણે આ પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરીને,

$10 \times (-43) = -(10 \times 43) = -430$ મેળવી શકીએ.

પ્રયત્ન કરો

શોધો :

(i) $6 \times (-19)$

(ii) $12 \times (-32)$

(iii) $7 \times (-22)$

અત્યાર સુધી, આપણે (ધન પૂર્ણાંક) $\times$ (ઋણ પૂર્ણાંક) એ રીતે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર કર્યો. :

ચાલો હવે, તેના ગુણાકાર (ઋણ પૂર્ણાંક) $\times$ (ધન પૂર્ણાંક) પ્રમાણે કરીએ.

આપણે પ્રથમ $(-3) \times 5$ શોધીએ.

તે શોધવા માટે નીચેની પેટર્ન જુઓ.

હવે આપણે $3 \times 5 = 15$

$2 \times 5 = 10 = 15 - 5$

$1 \times 5 = 5 = 10 - 5$

$0 \times 5 = 0 = 5 - 5$

એટલે કે, $(-1) \times 5 = 0 - 5 = (-5)$

$(-2) \times 5 = -5 - 5 = (-10)$

$(-3) \times 5 = -10 - 5 = (-15)$

આપણી પાસે પહેલેથી જ, $3 \times (-5) = -15$ છે.

તેથી આપણને $(-3) \times 5 = -15 = 3 \times (-5)$

આ પેટર્નનો ઉપયોગ કરીને $(-5) \times 4 = (-20) = 5 \times (-4)$ મળે.

આ રીતનો ઉપયોગ કરીને શોધો : $(-4) \times 8$, $(-3) \times 7$, $(-6) \times 5$ અને $(-2) \times 9$

ચકાસો કે, $(-4) \times 8 = 4 \times (-8)$, $(-3) \times 7 = 3 \times (-7)$, $(-6) \times 5 = 6 \times (-5)$

અને $(-2) \times 9 = 2 \times (-9)$

આનો ઉપયોગ કરીને, $(-33) \times 5 = 33 \times (-5) = -165$ મળે.

આમ, આપણે ધન પૂર્ણાંક અને ઋણ પૂર્ણાંકનો ગુણાકાર શોધવા, પૂર્ણ સંખ્યાનો ગુણાકાર કરી એ પછી જે જવાબ મળે છે તેની આગળ ઋણનું ચિહ્ન (–) મૂકીએ છીએ. એટલે આપણને ઋણ પૂર્ણાંક મળે છે.

પ્રયત્ન કરો

1. શોધો (a) $15 \times (-16)$ (b) $21 \times (-32)$ (c) $(-42) \times 12$ (d) -55×15

2. ચકાસો (a) $25 \times (-21) = (-25) \times 21$ (b) $(-23) \times 20 = 23 \times (-20)$

આવાં અન્ય પાંચ ઉદાહરણો લખો.

વ્યાપક રીતે, કોઈ પણ બે ધન પૂર્ણાંકો a અને b માટે કહી શકીએ કે,

$$\boxed{a \times (-b) = (-a) \times b = -(a \times b)}$$

1.4.2 બે ઋણ પૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર (Multiplication of two Negative Integers)

શું તમે $(-3) \times (-2)$નો જવાબ શોધી શકો છો ?

નીચેની ગણતરી જુઓ.

$-3 \times 4 = -12$

$-3 \times 3 = -9 = -12 - (-3)$

$-3 \times 2 = -6 = -9 - (-3)$

$-3 \times 1 = -3 = -6 - (-3)$

$-3 \times 0 = 0 = -3 - (-3)$

$-3 \times -1 = 0 - (-3) = 0 + 3 = 3$

$-3 \times -2 = 3 - (-3) = 3 + 3 = 6$

શું તમને આમાં કોઈ પેટર્ન દેખાય છે ? જવાબ કેવી રીતે બદલાય છે તે જુઓ.

અવલોકનના આધારે નીચેનું પૂર્ણ કરો :

$$-3 \times -3 = \_\_\_\_\_, \quad -3 \times -4 = \_\_\_\_\_$$

હવે, આ જવાબોના અવલોકનના આધારે ખાલી જગ્યા પૂરો :

$-4 \times 4 = -16$

$-4 \times 3 = -12 = -16 + 4$

$-4 \times 2 = \_\_\_\_\_\_\_\_ = -12 + 4$

$-4 \times 1 = \_\_\_\_\_\_\_\_$

$-4 \times 0 = \_\_\_\_\_\_\_\_$

$-4 \times (-1) = \_\_\_\_\_\_\_\_$

$-4 \times (-2) = \_\_\_\_\_\_\_\_$

$-4 \times (-3) = \_\_\_\_\_\_\_\_$

પ્રયત્ન કરો

(i) $(-5) \times 4$ થી શરૂ કરીને $(-5) \times (-6)$ શોધો.

(ii) $(-6) \times 3$ થી શરૂ કરીને $(-6) \times (-7)$ શોધો.

આ રીતથી આપણે અવલોકન કરીએ છીએ કે,

$(-3) \times (-1) = 3 = 3 \times 1$

$(-3) \times (-2) = 6 = 3 \times 2$

$(-3) \times (-3) = 9 = 3 \times 3$

અને $(-4) \times (-1) = 4 = 4 \times 1$

તેથી, $(-4) \times (-2) = 4 \times 2 = \_\_\_\_\_\_\_\_$

$(-4) \times (-3) = \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_$

તેથી, આ જવાબોના અવલોકન પરથી આપણે કહી શકીએ છીએ કે બે ઋણ પૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર ધન પૂર્ણાંક થાય છે. આપણે બે ઋણ પૂર્ણાંકોને પૂર્ણ સંખ્યા માનીને ગુણાકાર કરતાં જે જવાબ મળે તેની આગળ ધન ચિહ્ન મૂકીએ છીએ.

એટલે, આપણે $(-10) \times (-12) = +\,120 = 120$

એ જ રીતે $(-15) \times (-6) = +\,90 = 90$

વ્યાપક રીતે, કોઈ પણ બે ધન પૂર્ણાંકો a અને b માટે,

$$\boxed{(-a) \times (-b) = a \times b}$$

પ્રયત્ન કરો **શોધો :** $(-31) \times (-100)$, $(-25) \times (-72)$, $(-83) \times (-28)$

રમત 1

(i) આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે (–104) થી 104 સુધી અંકિત થયેલું એક બૉર્ડ લો.

(ii) બે વાદળી અને બે લાલ પાસાં ધરાવતી બૅગ લો. વાદળી પાસાં પર બિંદુઓની સંખ્યા ધન પૂર્ણાંક દર્શાવે છે અને લાલ પાસાં પર બિંદુઓની સંખ્યા ઋણ પૂર્ણાંકો દર્શાવે છે.

(iii) દરેક ખેલાડી પોતાના કાઉન્ટરને શૂન્ય પર મૂકશે.

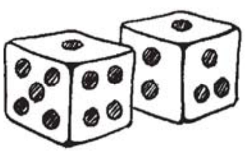
(iv) પ્રત્યેક ખેલાડી બૅગમાંથી એકસાથે બે પાસાં કાઢીને ઉછાળશે.

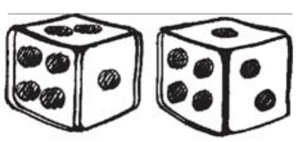
104	103	102	101	100	99	98	97	96	95	94
83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93
82	81	80	79	78	77	76	75	74	73	72
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
60	59	58	57	56	55	54	53	52	51	50
39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6
–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
–6	–7	–8	–9	–10	–11	–12	–13	–14	–15	–16
–27	–26	–25	–24	–23	–22	–21	–20	–19	–18	–17
–28	–29	–30	–31	–32	–33	–34	–35	–36	–37	–38
–49	–48	–47	–46	–45	–44	–43	–42	–41	–40	–39
–50	–51	–52	–53	–54	–55	–56	–57	–58	–59	–60
–71	–70	–69	–68	–67	–66	–65	–64	–63	–62	–61
–72	–73	–74	–75	–76	–77	–78	–79	–80	–81	–82
–93	–92	–91	–90	–89	–88	–87	–86	–85	–84	–83
–94	–95	–96	–97	–98	–99	–100	–101	–102	–103	–104

(v) પાસાંઓને ઉછાળ્યા બાદ ખેલાડીએ પાસાં પર અંકિત સંખ્યાઓનો ગુણાકાર કરવાનો છે.

(vi) જો જવાબ ધન હશે તો તે ખેલાડી તેના કાઉન્ટરને 104 તરફ ખસેડશે અને જો જવાબ ઋણ પૂર્ણાંક હોય તો તે ખેલાડી તેના કાઉન્ટરને (–104) તરફ ખસેડશે.

(vii) જે ખેલાડી (–104) અથવા 104 પર પહેલો પહોંચશે તે વિજેતા ગણાશે.





1.4.3 ત્રણ કે તેથી વધુ ઋણ પૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર (Product of three or more Nagative Integers)

> Euler ઑઇલર સૌ પ્રથમ એવા ગણિતશાસ્ત્રી હતા જેમણે તેના પુસ્તક Ankitung Zur Algebra (1770)માં $(-1) \times (-1) = 1$ થાય એમ સાબિત કરવાનો પ્રયત્ન કર્યો હતો.

આપણે જોયું કે બે ઋણ પૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર ધન પૂર્ણાંક આવે છે તો ત્રણ ઋણ પૂર્ણાંકનો ગુણાકાર શું આવશે ? ચાર ઋણ પૂર્ણાંકો માટે શું?

ચાલો આપણે ઉદાહરણો જોઈએ :

(a) $(-4) \times (-3) = 12$

(b) $(-4) \times (-3) \times (-2) = [(-4) \times (-3)] \times (-2) = 12 \times (-2) = -24$

(c) $(-4) \times (-3) \times (-2) \times (-1) = [(-4) \times (-3) \times (-2)] \times (-1) = (-24) \times (-1)$

(d) $(-5) \times [(-4) \times (-3) \times (-2) \times (-1)] = (-5) \times 24 = -120$

ઉપરોક્ત જવાબ પરથી આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે

(a) બે ઋણ પૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર એક ધન પૂર્ણાંક છે.

(b) ત્રણ ઋણ પૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર એક ઋણ પૂર્ણાંક છે.

(c) ચાર ઋણ પૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર એક ધન પૂર્ણાંક છે.

(d) પાંચ ઋણ પૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર શું થશે ?

તો, છ ઋણ પૂર્ણાંકનો ગુણાકાર શું થશે ?

આ ઉપરાંત આપણે એ પણ જોઈ શકીએ છીએ કે ઉપરોક્ત (a) અને (c) ઋણ પૂર્ણાંકોનો બેકી સંખ્યામાં (ક્રમશઃ બે, ચાર) ગુણાકાર કરતાં (a) અને (c) નો જવાબ ધન પૂર્ણાંકમાં મળે છે. (b) અને (d) માં ઋણ પૂર્ણાંકો એકી સંખ્યામાં છે, તેથી તેમના ગુણાકારોના જવાબો ઋણ પૂર્ણાંકોમાં મળે છે.

> **એક વિશેષ સ્થિતિ**
>
> આપેલાં વિધાનોના મળેલ ગુણાકાર પર વિચાર કરો :
>
> $(-1) \times (-1) = +1$
>
> $(-1) \times (-1) \times (-1) = -1$
>
> $(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = +1$
>
> $(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$
>
> એનો અર્થ એ થાય છે કે પૂર્ણાંક (–1)નો બેકી સંખ્યામાં ગુણાકાર કરતાં જવાબ (+1) મળે છે અને પૂર્ણાંક (–1) ને એકી સંખ્યામાં ગુણાકાર કરતાં (–1) જવાબ મળે છે. તમે (–1)ની જોડી બનાવી આ વિધાનને ચકાસી શકો છો. પૂર્ણાંક સંખ્યાના ગુણાકાર મેળવવા માટે આ ઉપયોગી થશે.

આપણે જોયું કે ઋણ પૂર્ણાંકોની સંખ્યા બેકી હોય તો ગુણાકાર ધન પૂર્ણાંક મળશે અને જો ઋણ પૂર્ણાંકની સંખ્યા એકી હોય તો ગુણાકાર ઋણ પૂર્ણાંક મળશે.

દરેકને ચકાસવા માટે અન્ય પાંચ વધુ ઉદાહરણો આપો.

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

(i) $(-9) \times (-5) \times (-6) \times (-3)$ નો જવાબ ધન છે જ્યારે $(-9) \times (-5) \times 6 \times (-3)$ નો જવાબ ઋણ છે. શા માટે ?

(ii) આપેલી સંખ્યાઓનો ગુણાકાર કરતાં મળતાં જવાબનું ચિહ્ન શું થશે ?

(a) 8 ઋણ પૂર્ણાંકો અને 3 ધન પૂર્ણાંકો

(b) 5 ઋણ પૂર્ણાંકો અને 4 ધન પૂર્ણાંકો

(c) (–1), બાર વખત ?

(d) (–1), $2m$ વખત, m એ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.

1.5 પૂર્ણાંક સંખ્યાઓના ગુણાકાર વિશેના ગુણધર્મો (Properties of Multipli cation of Integers)

1.5.1 ગુણાકાર વિશે સંવૃતતા (Closure under Multiplication)

3A4JUF

1. નીચેનું કોષ્ટક ધ્યાનપૂર્વક જુઓ અને તેને પૂર્ણ કરો :

વિધાન	તારણ
$(-20) \times (-5) = 100$	જવાબ પૂર્ણાંક છે
$(-15) \times 17 = -255$	જવાબ પૂર્ણાંક છે
$(-30) \times 12 =$ ______	
$(-15) \times (-23) =$ ______	
$(-14) \times (-13) =$ ______	
$12 \times (-30) =$ ______	

તમે શું નિરીક્ષણ કર્યું ? શું તમે એવી પૂર્ણાંક સંખ્યાની જોડી શોધી શકો છો જેનો ગુણાકાર પૂર્ણાંક નથી ? ના, એનાથી આપણને એવું માલૂમ પડે છે કે બે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર કરવાથી ફરીથી એક પૂર્ણાંક સંખ્યા જ મળે છે. તેથી આપણે કહી શકીએ છીએ કે ગુણાકાર માટે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ સંવૃત છે.

વ્યાપક રીતે,

બધી પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ a અને b માટે $a \times b$ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.

પાંચ વધુ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓની જોડી બનાવી અને ઉપરોક્ત વિધાનને ચકાસો.

1.5.2 ગુણાકાર માટેનો ક્રમનો ગુણધર્મ (Commutativity of Multiplication)

આપણે જાણીએ છીએ કે પૂર્ણ સંખ્યાઓ માટે ગુણાકાર સમક્રમી છે. શું આપણે કહી શકીએ કે પૂર્ણાંક સંખ્યા માટે પણ ગુણાકાર સમક્રમી છે.

નીચેના કોષ્ટકને ધ્યાનપૂર્વક જુઓ અને તેને પૂર્ણ કરો.

વિધાન-1	વિધાન-1	તારણ
$3 \times (-4) = -12$	$(-4) \times 3 = -12$	$3 \times (-4) = (-4) \times 3$
$(-30) \times 12 =$ ______	$12 \times (-30) =$ ______	
$(-15) \times (-10) = 150$	$(-10) \times (-15) = 150$	
$(-35) \times (-12) =$ ______	$(-12) \times (-35) =$ ______	
$(-17) \times 0 =$ ______		
______ = ______	$(-1) \times (-15) =$ ______	

તમે શું અવલોકન કરી શક્યા ? ઉપરોક્ત ઉદાહરણો સૂચવે છે કે ગુણાકાર પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ માટે સમક્રમી છે. વધુ પાંચ ઉદાહરણો લખો અને ચકાસો.

વ્યાપક રીતે કોઈપણ બે પૂર્ણાંકો a અને b માટે,

$$\boxed{a \times b = b \times a}$$

1.5.3 શૂન્ય વડે ગુણાકાર (Multiplication by Zero)

આપણે જાણીએ છીએ કે જ્યારે કોઈ પણ પૂર્ણ સંખ્યાને શૂન્ય વડે ગુણવામાં આવે છે ત્યારે તેનો જવાબ શૂન્ય આવે છે. નીચે આપેલ ઋણ પૂર્ણાંક અને શૂન્ય વચ્ચે થતાં ગુણાકાર જુઓ. આ અગાઉ અભ્યાસ કરેલી પેટર્ન પરથી,

$(-3) \times 0 = 0$

$0 \times (-4) = 0$

$(-5) \times 0 =$ ______

$0 \times (-6) =$ ______

એ દર્શાવે છે કે ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યા અને શૂન્ય વચ્ચે ગુણાકાર કરવામાં આવે તો જવાબ શૂન્ય મળે છે.

વ્યાપક રીતે કોઈ પણ પૂર્ણાંક સંખ્યા a માટે,

$$\boxed{a \times 0 = 0 \times a = 0}$$

1.5.4 ગુણાકારની તટસ્થ સંખ્યા (Multiplicative Identity)

આપણે જાણીએ છે કે 1 એ ગુણાકારમાં પૂર્ણ સંખ્યાઓ માટે તટસ્થ સંખ્યા છે. ચકાસણી કરીએ કે 1 એ ગુણાકારમાં પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ માટે પણ તટસ્થ સંખ્યા છે. નીચે આપેલ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓના 1 સાથે ગુણાકાર કરતાં મળતાં જવાબો જુઓ.

$(-3) \times 1 = -3$	$1 \times 5 = 5$
$(-4) \times 1 =$ ______	$1 \times 8 =$ ______
$1 \times (-5) =$ ______	$3 \times 1 =$ ______
$1 \times (-6) =$ ______	$7 \times 1 =$ ______

આ દર્શાવે છે કે કોઈ પણ પૂર્ણાંક સંખ્યાનો 1 સાથે ગુણાકાર કરતાં પરિણામ તેની તે જ પૂર્ણાંક સંખ્યા મળે.

વ્યાપક રીતે, કોઈ પણ પૂર્ણાંક સંખ્યા a માટે,

$$\boxed{a \times 1 = 1 \times a = a}$$

જ્યારે આપણે કોઈ પણ પૂર્ણાંક સંખ્યાને (–1) વડે ગુણીએ ત્યારે શું થશે ? નીચે આપેલ ખાલી જગ્યા પૂર્ણ કરો.

$(-3) \times (-1) = 3$

$3 \times (-1) = -3$

$(-6) \times (-1) =$ ______

$(-1) \times 13 =$ ______

$(-1) \times (-25) =$ ______

$18 \times (-1) =$ ______

> 0 એ સરવાળા માટે તટસ્થ સંખ્યા છે, જ્યારે 1 એ ગુણાકાર માટે તટસ્થ સંખ્યા છે. કોઈપણ સંખ્યાની વિરોધી સંખ્યા શોધવા માટે તેને (–1) વડે ગુણવામાં આવે છે.
>
> ઉદાહરણ : $a \times (-1) = (-1) \times a = -a$

તમે શું જોયું ?

શું આપણે કહી શકીએ છે કે (–1) એ પૂર્ણાંક સંખ્યા માટે ગુણાકાર માટેની તટસ્થ સંખ્યા છે ? ના.

1.5.5 ગુણાકાર માટે જૂથનો નિયમ (Associativity for Multiplication)

–3, –2 અને 5 લો.

$[(-3) \times (-2)] \times 5$ અને $(-3) \times [(-2) \times 5]$ નું અવલોકન કરો.

પહેલા જૂથમાં (–3) અને (–2) બંને સાથે છે અને બીજા જૂથમાં (–2) અને 5 બંને સાથે છે.

જુઓ કે $[(-3) \times (-2)] \times 5 = 6 \times 5 = 30$

અને $(-3) \times [(-2) \times 5] = (-3) \times (-10) = 30$

આમ, આપણને બંને ઉદાહરણોમાં સરખો જવાબ મળ્યો.

તેથી, $[(-3) \times (-2)] \times 5 = (-3) \times [(-2) \times 5]$

નીચે આપેલ ખાલી જગ્યા પૂર્ણ કરો :

$[(7) \times (-6)] \times 4 = \_\_\_\_\_\_ \times 4 = \_\_\_\_\_\_$

$7 \times [(-6) \times 4] = 7 \times \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

શું $[7 \times (-6)] \times 4 = 7 \times [(-6) \times 4]$?

શું પૂર્ણાંકોનાં જૂથ બદલવાથી ગુણાકાર બદલાય છે ? ના.

વ્યાપક રીતે, કોઈ પણ ત્રણ પૂર્ણાંક a, b અને c માટે,

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

a, b અને c માટે કોઈ પણ પાંચ કિંમત લો અને તેના ગુણધર્મો ચકાસો.

તેથી, પૂર્ણ સંખ્યાની જેમ, ત્રણ પૂર્ણાંક સંખ્યાનો ગુણાકાર તેમના જૂથ પર આધારિત નથી. તેથી તેને પૂર્ણાંક સંખ્યાઓના ગુણાકાર માટે જૂથનો ગુણધર્મ કહે છે.

1.5.6 વિભાજનનો ગુણધર્મ (Distributive Property) :

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$16 \times (10 + 2) = (16 \times 10) + (16 \times 2)$ [ગુણાકારનું સરવાળા પર વિભાજન]

ચાલો, જોઈએ કે આ પૂર્ણાંક સંખ્યા માટે પણ સાચું છે કે નહિ.

નીચેનાં ઉદાહરણ જુઓ.

(a) $(-2) \times (3 + 5) = -2 \times 8 = -16$

અને $[(-2) \times 3] + [(-2) \times 5] = (-6) + (-10) = -16$

તેથી, $(-2) \times (3 + 5) = [(-2) \times 3] + [(-2) \times 5]$

(b) $(-4) \times [(-2) + 7] = (-4) \times 5 = -20$

અને $[(-4) \times (-2)] + [(-4) \times 7] = 8 + (-28) = -20$

તેથી, $(-4) \times [(-2) + 7] = [(-4) \times (-2)] + [(-4) \times 7]$

(c) $(-8) \times [(-2) + (-1)] = (-8) \times (-3) = 24$

અને $[(-8) \times (-2)] + [(-8) \times (-1)] = 16 + 8 = 24$

તેથી, $(-8) \times [(-2) + (-1)] = [(-8) \times (-2)] + [(-8) \times (-1)]$

શું આપણે કહી શકીએ કે, સરવાળા પર ગુણાકારનું વિભાજન એ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ માટે પણ સાચું છે ? હા. વ્યાપક રીતે, કોઈ પણ પૂર્ણાંક a, b અને c માટે,

$$\boxed{a \times (b + c) = a \times b + a \times c}$$

કોઈ પણ પાંચ જુદી-જુદી કિંમતો a, b અને c માટે ઉપરોક્ત વિભાજનના ગુણધર્મના આધારે ચકાસો.

પ્રયત્ન કરો

(i) શું $10 \times [6 + (-2)] = 10 \times 6 + 10 \times (-2)$?

(ii) શું $(-15) \times [(-7) + (-1)] = (-15) \times (-7) + (-15) \times (-1)$?

હવે, આ ચકાસો :

શું આપણે કહી શકીએ કે $4 \times (3 - 8) = 4 \times 3 - 4 \times 8$?

ચાલો ચકાસીએ :

$$4 \times (3 - 8) = 4 \times (-5) = -20$$

$$4 \times 3 - 4 \times 8 = 12 - 32 = -20$$

તેથી, $4 \times (3 - 8) = 4 \times 3 - 4 \times 8$

હવે, નીચેનાને ચકાસો :

$$(-5) \times [(-4) - (-6)] = (-5) \times 2 = -10$$

$$[(-5) \times (-4)] - [(-5) \times (-6)] = 20 - 30 = -10$$

તેથી, $(-5) \times [(-4) - (-6)] = [(-5) \times (-4)] - [(-5) \times (-6)]$

હવે, $(-9) \times [10 - (-3)]$ અને $[(-9) \times 10] - [(-9) \times (-3)]$ ચકાસો.

તમે જોશો કે આ બંને પણ સરખા જ છે.

વ્યાપક રીતે, કોઈ પણ ત્રણ પૂર્ણાંક સંખ્યા a, b અને c માટે,

$$\boxed{a \times (b - c) = a \times b - a \times c}$$

કોઈ પણ પાંચ જુદી જુદી કિંમતો a, b અને c માટે લો અને તેના ગુણધર્મો ચકાસો.

પ્રયત્ન કરો

(i) શું $10 \times [6 - (-2)] = 10 \times 6 - 10 \times (-2)$?

(ii) શું $(-15) \times [(-7) - (-1)] = (-15) \times (-7) - (-15) \times (-1)$?

1.5.7 ગુણાકારને સરળ બનાવવા (Making Multiplication Easier) :

નીચેનાને ચકાસો :

(i) આપણે $(-25) \times 37 \times 4$, ની ગણતરી કરીએ.

$$[(-25) \times 37] \times 4 = (-925) \times 4 = -3700$$

અથવા, હવે આ રીતે ગણીએ.

$(-25) \times 37 \times 4 = (-25) \times 4 \times 37 = [(-25) \times 4] \times 37 = (-100) \times 37 = -3700$

કયું સરળ છે ?

ખરેખર બીજી રીત સરળ છે. કારણ કે, (-25) અને 4 નો ગુણાકાર -100 છે જેને 37 વડે ગુણવાનું સરળ છે, અહીં નોંધ લેશો કે બીજી રીત પૂર્ણાંક સંખ્યાના ક્રમના નિયમ અને જૂથના નિયમને સમાવે છે. તેથી, આપણે જોયું કે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓના ક્રમનો, જૂથનો અને વિભાજનનો ગુણધર્મ આપણી ગણતરીને સરળ બનાવવામાં મદદ કરે છે. ચાલો, થોડા વધુ ઉદાહરણોમાં જોઈએ કે આ ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરીને ગણતરી કેવી રીતે સરળ બનાવી શકાય.

(ii) શોધો 16×12

16×12 ને નીચેની રીતે પણ લખી શકીએ $16 \times (10 + 2)$.

$16 \times 12 = 16 \times (10 + 2) = 16 \times 10 + 16 \times 2 = 160 + 32 = 192$

(iii) $(-23) \times 48 = (-23) \times [50 - 2] = (-23) \times 50 - (-23) \times 2 = (-1150) - (-46) = -1104$

(iv) $(-35) \times (-98) = (-35) \times [(-100) + 2] = (-35) \times (-100) + (-35) \times 2 = 3500 + (-70) = 3430$

(v) $52 \times (-8) + (-52) \times 2$

$(-52) \times 2$ ને આ રીતે પણ લખી શકાય $52 \times (-2)$.

તેથી, $52 \times (-8) + (-52) \times 2 = 52 \times (-8) + 52 \times (-2)$

$= 52 \times [(-8) + (-2)] = 52 \times [(-10)] = -520$

પ્રયત્ન કરો

વિભાજનના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરી શોધો : $(-49) \times 18$; $(-25) \times (-31)$; $70 \times (-19) + (-1) \times 70$

ઉદાહરણ 2 નીચે આપેલ દરેક દાખલાની ગણતરી કરો :

(i) $(-18) \times (-10) \times 9$ (ii) $(-20) \times (-2) \times (-5) \times 7$

(iii) $(-1) \times (-5) \times (-4) \times (-6)$

જવાબ

(i) $(-18) \times (-10) \times 9 = [(-18) \times (-10)] \times 9 = 180 \times 9 = 1620$

(ii) $(-20) \times (-2) \times (-5) \times 7 = (-20) \times [(-2) \times (-5)] \times 7 = [-20 \times 10] \times 7 = -1400$

(ii) $(-1) \times (-5) \times (-4) \times (-6) = [(-1) \times (-5)] \times [(-4) \times (-6)] = 5 \times 24 = 120$

ઉદાહરણ 3 ચકાસો : $(-30) \times [13 + (-3)] = [(-30) \times 13] + [(-30) \times (-3)]$

જવાબ $(-30) \times [13 + (-3)] = (-30) \times 10 = -300$

$[(-30) \times 13] + [(-30) \times (-3)] = -390 + 90 = -300$

તેથી, $(-30) \times [13 + (-3)] = [(-30) \times (13)] + [(-30) \times (-3)]$

ઉદાહરણ 4 વર્ગકસોટીપત્રમાં 15 સવાલ છે, દરેક સાચા જવાબ માટે 4 ગુણ અને દરેક ખોટા જવાબના (–2) ગુણ છે.

(i) મીના બધા સવાલો લખે છે, પરંતુ તેના 9 જવાબો જ સાચા છે, તેના કુલ ગુણ કેટલા હશે ?

(ii) તેના એક મિત્રના ફક્ત 5 જવાબો જ સાચા છે. તો તેના મિત્રના ગુણ કેટલા હશે ?

જવાબ

(i) એક સાચા જવાબના ગુણ = 4

તેથી, 9 સાચા જવાબના ગુણ $= 4 \times 9 = 36$

એક ખોટા જવાબના ગુણ $= -2$

તેથી, 6 $(= 15 - 9)$ ખોટા જવાબના ગુણ $= (-2) \times 6 = -12$

તેથી, મીનાના કુલ ગુણ $= 36 + (-12) = 24$

(ii) એક સાચા જવાબના ગુણ = 4

તેથી, 5 સાચા જવાબના ગુણ $= 4 \times 5 = 20$

એક ખોટા જવાબના ગુણ $= -2$

તેથી, 10 $(= 15 - 5)$ ખોટા જવાબના ગુણ $= (-2) \times 10 = -20$

તેથી, તેના મિત્રના કુલ ગુણ $= 20 + (-20) = 0$

ઉદાહરણ 5 ધારો કે આપણે જમીનથી ઉપરનું અંતર ધન પૂર્ણાંક સંખ્યામાં અને જમીનથી નીચેનું અંતર ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યામાં લઈએ, તો નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(i) એક લિફ્ટ (એલિવેટર) 5 મીટર પ્રતિ મિનિટના દરે ખાણમાં ઊતરે છે, તો એક કલાક પછી તેની સ્થિતિ શું હશે ?

(ii) જો એ જમીનથી 15 મીટર ઉપરથી ઊતરતી હોય તો 45 મિનિટ પછી એની સ્થિતિ શું હશે ?

જવાબ

(i) જે રીતે લિફ્ટ (એલિવેટર) નીચે ઊતરતી જાય છે, તો તેના દ્વારા કપાતું અંતર ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યા વડે દર્શાવાય છે.

એલિવેટરની 1 મિનિટમાં બદલાતી સ્થિતિ $= -5$ મી

60 મિનિટ પછી એલિવેટરની સ્થિતિ $= (-5) \times 60 = -300$ મી એટલે કે એલિવેટરની શરૂઆતની સ્થિતિથી 300 મી નીચે હશે.

(ii) 45 મિનિટ પછી એલિવેટરની બદલાતી સ્થિતિ $= (-5) \times 45 = -225$ મી $\therefore$ 225 મીટર નીચે ઊતરે છે.

તેથી, એલિવેટરની અંતિમ સ્થિતિ $= -225 + 15 = -210$ મી એટલે કે 210 મીટર જમીનથી નીચે હશે.

સ્વાધ્યાય 1.3

1. નીચે આપેલ દરેકના જવાબ લખો :
   (a) $3 \times (-1)$ (b) $(-1) \times 225$
   (c) $(-21) \times (-30)$ (d) $(-316) \times (-1)$
   (e) $(-15) \times 0 \times (-18)$ (f) $(-12) \times (-11) \times 10$
   (g) $9 \times (-3) \times (-6)$ (h) $(-18) \times (-5) \times (-4)$
   (i) $(-1) \times (-2) \times (-3) \times 4$ (j) $(-3) \times (-6) \times (-2) \times (-1)$
2. નીચેનાને ચકાસો :
   (a) $18 \times [7 + (-3)] = [18 \times 7] + [18 \times (-3)]$
   (b) $(-21) \times [(-4) + (-6)] = [(-21) \times (-4)] + [(-21) \times (-6)]$
3. (i) કોઈ પણ પૂર્ણાંક સંખ્યા a માટે, $(-1) \times a$ બરાબર શું થાય?
   (ii) નીચેની પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો (-1) સાથેનો ગુણાકાર શું થશે ?
   (a) -22 (b) 37 (c) 0
4. $(-1) \times 5$ થી શરૂ કરીને, નિશ્ચિત પેટર્ન વડે વિવિધ ગુણાકારો લઈને દર્શાવો કે $(-1) \times (-1) = 1$ થાય.
5. યોગ્ય ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરીને જવાબ શોધો :
   (a) $26 \times (-48) + (-48) \times (-36)$ (b) $8 \times 53 \times (-125)$
   (c) $15 \times (-25) \times (-4) \times (-10)$ (d) $(-41) \times 102$
   (e) $625 \times (-35) + (-625) \times 65$ (f) $7 \times (50 - 2)$
   (g) $(-17) \times (-29)$ (h) $(-57) \times (-19) + 57$
6. ઠંડું કરવાની પ્રક્રિયા માટે ઓરડાના તાપમાનને 40°C થી શરૂ કરીને 5°C પ્રતિ કલાકના દરે ઘટાડવું જરૂરી છે. પ્રક્રિયા ચાલુ કર્યાના 10 કલાક પછી ઓરડાનું તાપમાન કેટલું હશે ?
7. વર્ગ કસોટીપત્રમાં કુલ 10 પ્રશ્નો છે. દરેક સાચા જવાબના 5 ગુણ અને દરેક ખોટા જવાબના (-2) ગુણ છે અને પ્રશ્નનો જવાબ નહિ લખવાના 0 ગુણ આપવામાં આવે છે.
   (i) મોહનના 4 સાચા અને 6 ખોટા જવાબ છે, તો તેના ગુણ કેટલા હશે ?
   (ii) રેશ્માના 5 સાચા અને 5 ખોટા જવાબ છે, તો તેના ગુણ કેટલા હશે ?
   (iii) હીના 7 જવાબો લખે છે, જેમાંથી 2 સાચા અને 5 ખોટા જવાબો છે, તો તેના ગુણ કેટલા હશે ?
8. એક સિમેન્ટકંપનીને સફેદ સિમેન્ટની એક ગુણ વેચતાં 8 રૂપિયા નફો મળે છે અને એક ગુણ રાખોડી સિમેન્ટની વેચતાં 5 રૂપિયાની ખોટ થાય છે.
   (a) કંપનીએ એક મહિનામાં 3000 ગુણ સફેદ સિમેન્ટની અને 5000 ગુણ રાખોડી સિમેન્ટની વેચી છે તો તે કંપનીને કેટલો નફો કે ખોટ થઈ હશે ?

(b) જો રાખોડી સિમેન્ટની 6400 ગુણ વેચાઈ હોય, તો સફેદ સિમેન્ટની કેટલી ગુણ વેચાય તો નફો પણ ન થાય અને ખોટ પણ ન જાય ?

9. ખાલી જગ્યાને પૂર્ણાંક સંખ્યા વડે પૂરી સાચું વિધાન બનાવો.

(a) $(-3) \times$ ________ $= 27$ (b) $5 \times$ ________ $= -35$

(c) ________ $\times (-8) = -56$ (d) ________ $\times (-12) = 132$

1.6 પૂર્ણાંકોનો ભાગાકાર (Division of Integers)

3ADFW3

આપણે જાણીએ છીએ કે ભાગાકાર એ ગુણાકારથી ઊલટી (વ્યસ્ત) પ્રક્રિયા છે. પૂર્ણ સંખ્યાઓ માટે એક ઉદાહરણ જોઈએ,

જુઓ $3 \times 5 = 15$

તેથી $15 \div 5 = 3$ અને $15 \div 3 = 5$

એ જ રીતે, $4 \times 3 = 12$ તેથી $12 \div 4 = 3$ અને $12 \div 3 = 4$ મળે.

તેથી આપણે કહી શકીએ છીએ કે ગુણાકારના દરેક વિધાન માટે આપણે ભાગાકારનાં બે વિધાન બનાવી શકીએ છીએ.

શું તમે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ માટે ગુણાકારનું વિધાન અને તેને લગતાં ભાગાકારના વિધાન લખી શકશો ?

- આપેલ કોષ્ટકનું અવલોકન કરો અને પૂર્ણ કરો :

ગુણાકારનું વિધાન	ભાગાકારનું અનુરૂપ વિધાન	
$2 \times (-6) = (-12)$	$(-12) \div (-6) = 2$,	$(-12) \div 2 = (-6)$
$(-4) \times 5 = (-20)$	$(-20) \div (5) = (-4)$,	$(-20) \div (-4) = 5$
$(-8) \times (-9) = 72$	$72 \div$ ______ $=$ ______ ,	$72 \div$ ______ $=$ ______
$(-3) \times (-7) =$ ______	______ $\div (-3) =$ ______ ,	__________
$(-8) \times 4 =$ ______	__________ ,	__________
$5 \times (-9) =$ ______	__________ ,	__________
$(-10) \times (-5) =$	__________ ,	__________

ઉપરના કોષ્ટક પરથી આપણે જોયું કે,

$(-12) \div 2 = (-6)$

$(-20) \div 5 = (-4)$

$(-32) \div 4 = (-8)$

$(-45) \div 5 = (-9)$

પ્રયત્ન કરો

શોધો :

(a) $(-100) \div 5$ (b) $(-81) \div 9$

(c) $(-75) \div 5$ (d) $(-32) \div 2$

આપણે જોયું કે જ્યારે આપણે ઋણ સંખ્યાનો ધન સંખ્યા વડે ભાગાકાર કરીએ છીએ ત્યારે આપણે તેનો પૂર્ણ સંખ્યા વડે ભાગાકાર કરી પછી જવાબમાં ઋણ (–) ચિહ્ન મૂકીએ છીએ. આમ, આપણને ઋણ પૂર્ણાંક મળે છે.

- આપણે એ પણ જોયું કે,

$72 \div (-8) = -9$ અને $50 \div (-10) = -5$

$72 \div (-9) = -8$ $\quad$ $50 \div (-5) = -10$

તેથી કહી શકાય કે જ્યારે આપણે ધન પૂર્ણાંક સંખ્યાનો ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યા વડે ભાગાકાર કરીએ છીએ ત્યારે પહેલાં આપણે તેમને પૂર્ણ સંખ્યા માનીને ભાગીએ છીએ અને પછી જવાબમાં ઋણ (–) ચિહ્ન મૂકીએ છીએ. વ્યાપક રીતે, કોઈ પણ બે ધન પૂર્ણાંક a અને b માટે

$a \div (-b) = (-a) \div b$ જ્યાં $b \neq 0$

શું આપણે કહી શકીએ કે
$(-48) \div 8 = 48 \div (-8)$?
ચાલો ચકાસણી કરીએ,
આપણે જાણીએ છીએ કે,
$(-48) \div 8 = -6$
અને $48 \div (-8) = -6$
તેથી $(-48) \div 8 = 48 \div (-8)$
નીચેના માટે તપાસો :
(i) $90 \div (-45)$ અને $(-90) \div 45$
(ii) $(-136) \div 4$ અને $136 \div (-4)$

પ્રયત્ન કરો

શોધો : (a) $125 \div (-25)$ (b) $80 \div (-5)$ (c) $64 \div (-16)$

- છેલ્લે આપણે જોયું કે,

$(-12) \div (-6) = 2$; $(-20) \div (-4) = 5$; $(-32) \div (-8) = 4$; $(-45) \div (-9) = 5$

તેથી આપણે કહી શકીએ છીએ કે જ્યારે આપણે ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યાને ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યા વડે ભાગીએ છીએ ત્યારે આપણે પહેલા તેમને પૂર્ણ સંખ્યા માનીને ભાગીએ છીએ અને ત્યાર પછી જવાબમાં ધન (+) ચિહ્ન મૂકીએ છીએ.

વ્યાપક રીતે, કોઈ પણ બે ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા a અને b માટે,

$(-a) \div (-b) = a \div b$ જ્યાં $b \neq 0$

પ્રયત્ન કરો

શોધો : (a) $(-36) \div (-4)$ (b) $(-201) \div (-3)$ (c) $(-325) \div (-13)$

1.7 પૂર્ણાંકના ભાગાકારના ગુણધર્મો (Properties of Division of Integers) :

નીચેનું કોષ્ટક જુઓ અને પૂર્ણ કરો :

વિધાન	તારણ	વિધાન	તારણ
$(-8) \div (-4) = 2$	જવાબ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.	$(-8) \div 3 = \frac{-8}{3}$	________
$(-4) \div (-8) = \frac{-4}{-8}$	જવાબ પૂર્ણાંક સંખ્યા નથી.	$3 \div (-8) = \frac{3}{-8}$	________

તમે શું જોયું ? આપણે જોયું કે પૂર્ણાંકો ભાગાકાર માટે સંવૃત નથી.

તમારાં પોતાનાં પાંચ ઉદાહરણ લઈ ખાતરી કરો.

- આપણે જાણીએ છીએ કે પૂર્ણ સંખ્યાઓ માટે ભાગાકાર સમક્રમી નથી. ચાલો પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ માટે ચકાસીએ.

તમે કોષ્ટક પરથી જોયું કે $(-8) \div (-4) \neq (-4) \div (-8)$

શું $(-9) \div 3$ અને $3 \div (-9)$ સરખાં છે ?

શું $(-30) \div (-6)$ અને $(-6) \div (-30)$ સરખાં છે ?

શું આપણે કહી શકીએ કે પૂર્ણાંક સંખ્યા માટે ભાગાકાર સમક્રમી છે ? ના.

તમે વધુ પાંચ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓની જોડ લઈ એને ચકાસો.

- પૂર્ણ સંખ્યાની જેમ કોઈ પણ પૂર્ણાંક સંખ્યાનો શૂન્ય વડે ભાગાકાર કરવો અર્થહીન છે અને શૂન્યને શૂન્ય સિવાયની કોઈ પણ પૂર્ણાંક સંખ્યા વડે ભાગાકાર કરતાં શૂન્ય મળે છે, એટલે કે કોઈ પણ પૂર્ણાંક સંખ્યા a માટે $a \div 0$ એવું વ્યાખ્યાયિત નથી, પરંતુ $0 \div a = 0$ જ્યાં $a \neq 0$.
- જ્યારે આપણે પૂર્ણ સંખ્યાને 1 વડે ભાગીએ છીએ ત્યારે તેનો જવાબ તે જ પૂર્ણ સંખ્યા મળે છે, ચાલો જોઈએ કે આ ઋણ પૂર્ણાંક માટે પણ સાચું છે કે નહિ.

જુઓ :

$(-8) \div 1 = (-8)$ $\quad$ $(-11) \div 1 = -11$ $\quad$ $(-13) \div 1 = -13$

$(-25) \div 1 =$ ______ $\quad$ $(-37) \div 1 =$ ______ $\quad$ $(-48) \div 1 =$ ______

ઉપરોક્ત દર્શાવે છે કે કોઈ પણ ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યાને 1 વડે ભાગાકાર કરતાં તે જ ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યા મળે છે, તેથી કોઈ પણ પૂર્ણાંક સંખ્યાને 1 વડે ભાગાકાર કરતાં એની એ જ પૂર્ણાંક સંખ્યા મળે છે.

વ્યાપક રીતે કોઈ પણ પૂર્ણાંક a માટે,

$$\boxed{a \div 1 = a}$$

- જ્યારે આપણે કોઈ પણ પૂર્ણાંક સંખ્યાનો (-1) વડે ભાગાકાર કરીએ તો શું થાય ?

નીચેની ખાલી જગ્યા પૂર્ણ કરો :

$(-8) \div (-1) = 8$ $\quad$ $11 \div (-1) = -11$ $\quad$ $13 \div (-1) =$ ______

$(-25) \div (-1) =$ ______ $\quad$ $(-37) \div (-1) =$ ______ $\quad$ $(-48) \div (-1) =$ ______

તમે શું જોયું ?

આપણે જોયું કે જો કોઈ પૂર્ણાંક સંખ્યાને (-1) વડે ભાગીએ તો એની એ પૂર્ણાંક સંખ્યા મળતી નથી.

પ્રયત્ન કરો

શોધો :

(i) $1 \div a = 1$?

(ii) કોઈ પણ પૂર્ણાંક સંખ્યા a માટે.

$a \div (-1) = -a$? aની જુદી-જુદી કિંમત લઈ ચકાસણી કરો.

- શું આપણે કહી શકીએ, $[(-16) \div 4] \div (-2)$ અને $(-16) \div [4 \div (-2)]$ બંને સરખાં છે ?

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$[(-16) \div 4] \div (-2) = (-4) \div (-2) = 2$

અને $\quad (-16) \div [4 \div (-2)] = (-16) \div (-2) = 8$

તેથી $\quad [(-16) \div 4] \div (-2) \neq (-16) \div [4 \div (-2)]$

શું તમે કહી શકો કે ભાગાકાર એ પૂર્ણાંક સંખ્યા માટે જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે ? ના.

તમારાં પોતાનાં વધુ પાંચ ઉદાહરણો લઈ ચકાસો.

ઉદાહરણ 6 એક પરીક્ષામાં બધા સાચા જવાબો માટે +5 ગુણ અને બધા ખોટા જવાબો માટે (-2) ગુણ આપવામાં આવે છે. (i) રાધિકાએ બધા પ્રશ્નોના જવાબ આપ્યા અને 30 ગુણ મેળવ્યા,

કેમકે તેના 10 જવાબો સાચા હતા. (ii) જયે પણ બધા પ્રશ્નોના જવાબ લખ્યા અને (–12) ગુણ મેળવ્યા, કેમ કે તેના 4 જવાબો સાચા હતા. તો તે બંનેએ કેટલા ખોટા જવાબો આપ્યા હતા ?

જવાબ

(i) એક સાચા જવાબ માટે આપવામાં આવતા ગુણ = 5

તેથી 10 સાચા જવાબો માટે આપવામાં આવતા ગુણ $= 5 \times 10 = 50$

રાધિકાએ મેળવલ ગુણ = 30

ખોટા જવાબો માટે મેળવેલ ગુણ $= 30 - 50 = -20$

એક ખોટા જવાબ માટે આપવામાં આવતા ગુણ = (–2)

તેથી, ખોટા જવાબોની સંખ્યા $= (-20) \div (-2) = 10$

(ii) 4 સાચા જવાબો માટે આપવામાં આવતા ગુણ $= 5 \times 4 = 20$

જયના ગુણ = –12

ખોટા જવાબો માટે મેળવેલ ગુણ $= -12 - 20 = -32$

એક ખોટા જવાબ માટે આપવામાં આવતા ગુણ = (–2)

તેથી ખોટા જવાબોની સંખ્યા $= (-32) \div (-2) = 16$

ઉદાહરણ 7 એક દુકાનદારને એક પેન વેચવાથી 1 ₹નો નફો થાય છે, જ્યારે તેના પેન્સિલના જૂના જથ્થામાંથી પેન્સિલ વેચતાં તેને 40 પૈસા પ્રતિ પેન્સિલ ખોટ જાય છે.

(i) કોઈ એક મહિનામાં તેમને ₹ 5 ની ખોટ જાય છે. તે મહિના દરમિયાન તેઓ 45 પેન વેચે છે, તો તેમણે તે મહિના દરમિયાન કેટલી પેન્સિલ વેચી હશે ?

(ii) પછીના મહિનામાં તેને નફો પણ નથી થતો કે ખોટ પણ નથી જતી. જો તે 70 પેન વેચે તો તેણે કેટલી પેન્સિલ વેચી હશે ?

જવાબ

(i) 1 પેન વેચવાથી મળતો નફો = ₹ 1

45 પેન વેચવાથી મળતો નફો = ₹ 45 જેને આપણે +45 વડે દર્શાવીશું.

કુલ આવેલી ખોટ = ₹ 5, જેને આપણે –5 વડે દર્શાવીશું.

મળેલ નફો + થયેલ ખોટ = કુલ ખોટ

તેથી, થયેલ ખોટ = કુલ ખોટ – મળેલ નફો

= ₹ (–5 –45) = ₹ (–50) = –5000 પૈસા

1 પેન્સિલ વેચવાથી થયેલ ખોટ = 40 પૈસા. જેને આપણે –40 વડે દર્શાવીશું.

તેથી, વેચાયેલી પેન્સિલની સંખ્યા $= (-5000) \div (-40) = 125$

(ii) તે પછીના મહિનામાં તેમને નફો કે ખોટ થતી નથી.

તેથી, મળેલ નફો + થયેલ ખોટ = 0

એટલે કે મળેલ નફો = – થયેલ ખોટ

હવે, 70 પેન વેચવાથી મળેલ નફો = ₹ 70

તેથી, પેન્સિલ વેચવાથી થયેલ ખોટ = ₹ 70 જેને આપણે ₹ –70 અથવા – 7,000 પૈસા વડે દર્શાવીશું.

કુલ વેચાયેલી પેન્સિલની સંખ્યા = (–7000) ÷ (–40) = 175 પેન્સિલ.

સ્વાધ્યાય 1.4

1. નીચે આપેલ દરેકના જવાબ લખો :

   (a) (–30) ÷ 10 (b) 50 ÷ (–5) (c) (–36) ÷ (–9)

   (d) (–49) ÷ (49) (e) 13 ÷ [(–2) + 1] (f) 0 ÷ (–12)

   (g) (–31) ÷ [(–30) + (–1)] (h) [(–36) ÷ 12] ÷ 3 (i) [(–6) + 5)] ÷ [(–2) + 1]

2. નીચેના દરેક a, b અને c ની કિંમતો માટે $a \div (b + c) \neq (a \div b) + (a \div c)$ ને ચકાસો.

   (a) $a = 12, b = -4, c = 2$ (b) $a = (-10), b = 1, c = 1$

3. ખાલી જગ્યા પૂરો :

   (a) 369 ÷ _________ = 369 (b) (–75) ÷ _________ = –1

   (c) (–206) ÷ _________ = 1 (d) –87 ÷ _________ = 87

   (e) _________ ÷ 1 = –87 (f) _________ ÷ 48 = –1

   (g) 20 ÷ _________ = –2 (h) _________ ÷ (4) = –3

4. પૂર્ણાંક સંખ્યા (a, b) ની પાંચ જોડ લખો જેથી $a \div b = -3$ થાય. આવી એક જોડ (6, –2) છે કારણ કે 6 ÷ (–2) = (–3).

5. બપોરે 12 વાગ્યાનું તાપમાન શૂન્યથી ઉપર 10°C છે. જો એ 2°C પ્રતિ કલાકના દરે મધ્યરાત્રિ સુધી ઓછું થતું જાય તો કયા સમયે તાપમાન શૂન્યથી નીચે 8°C હોય ? મધ્યરાત્રિનું તાપમાન શું હોય ?

6. વર્ગપરીક્ષામાં (+3) દરેક સાચા જવાબ માટે અને (–2) દરેક ખોટા જવાબ માટે આપવામાં આવે છે અને કોઈ પણ સવાલના જવાબ માટે જો પ્રયત્ન ન કરવામાં આવે તો તેનો એક પણ ગુણ આપવામાં આવતો નથી.

   (i) રાધિકાએ 20 ગુણ મેળવ્યા. જો તેણે 12 સાચા જવાબો આપ્યા હોય, તો તેના કેટલા જવાબો ખોટા છે ?

   (ii) મોહિનીએ આ પરીક્ષામાં (–5) ગુણ મેળવ્યા. જો કે તેના 7 સાચા જવાબો હતા તો તેણે કેટલા ખોટા જવાબો લખ્યા ?

7. એક લિફ્ટ (એલિવેટર) 6 મીટર પ્રતિ મિનિટના દરે ખાણમાં ઊતરે છે. જો તે જમીનથી 10 મીટર ઉપરથી નીચે ઊતરતી હોય તો (–350) મીટર સુધી પહોંચતાં તેને કેટલો સમય લાગશે ?

આપણે શું ચર્ચા કરી ?

1. પૂર્ણાંક સંખ્યા એ સંખ્યાઓનો મોટો સમૂહ છે જેમાં પૂર્ણ સંખ્યાઓ અને તેમની ઋણ સંખ્યાઓનો સમાવેશ થાય છે. જેનો અભ્યાસ આપણે ધોરણ 6માં કરી ચૂક્યાં છીએ.
2. અગાઉના ધોરણમાં આપણે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનું સંખ્યારેખા પર નિરૂપણ કરવું અને તેના સરવાળા અને બાદબાકી વિશે અભ્યાસ કરી ચૂક્યાં છીએ.
3. આપણે હમણાં સરવાળા અને બાદબાકી દ્વારા પાલન થતા ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કર્યો છે.
   (a) પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ સરવાળા અને બાદબાકી બંને વિશે સંવૃતતા ધરાવે છે. અર્થાત્ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ a અને b માટે $a + b$ અને $a - b$ મેળવતાં પૂર્ણાંક સંખ્યા મળે છે.
   (b) પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો સરવાળો સમક્રમી એટલે કે બધી જ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ a અને b માટે $a + b = b + a$.
   (c) પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ માટે સરવાળો જૂથનો નિયમ ધરાવે છે. એટલે કે, બધી જ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ a, b અને c માટે $(a + b) + c = a + (b + c)$.
   (d) પૂર્ણાંક સંખ્યા 0 એ સરવાળા માટે તટસ્થ સંખ્યા છે. એટલે કે, દરેક પૂર્ણાંક સંખ્યા a માટે $a + 0 = 0 + a = a$.
4. અભ્યાસ કર્યા પછી આપણને એ જાણવા મળ્યું છે કે ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા અને ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યાનો ગુણાકાર કરવાથી ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યા મળે છે, જ્યારે બે ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર કરવાથી ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા મળે છે. ઉદાહરણ, $-2 \times 7 = -14$ અને $-3 \times -8 = 24$.
5. ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો બેકી સંખ્યામાં ગુણાકાર કરતાં જવાબ ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા મળે છે, જ્યારે ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો એકી સંખ્યામાં ગુણાકાર કરતાં જવાબ ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યા મળે છે.
6. પૂર્ણાંક સંખ્યાઓના ગુણાકાર વિશેના કેટલાક ગુણધર્મો :
   (a) પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ ગુણાકાર વિશે સંવૃતતા ધરાવે છે. અર્થાત્ કોઈ પણ બે પૂર્ણાંક સંખ્યા a અને b માટે $a \times b$ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.
   (b) પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર સમક્રમી છે. અર્થાત્ કોઈ પણ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ માટે $a \times b = b \times a$.
   (c) પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ માટે ગુણાકાર જૂથનો નિયમ ધરાવે છે. એટલે કે, કોઈ પણ ત્રણ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ a, b અને c માટે $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.
   (d) પૂર્ણાંક સંખ્યા 1 એ ગુણાકાર માટે તટસ્થ સંખ્યા છે. એટલે કે, કોઈ પણ પૂર્ણાંક સંખ્યા a માટે $1 \times a = a \times 1 = a$.
7. સરવાળા અને ગુણાકાર હેઠળ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ વિભાજનનો ગુણધર્મ ધરાવે છે. અર્થાત્ કોઈ પણ ત્રણ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ a, b અને c માટે $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.

8. સરવાળા અને ગુણાકારમાં ક્રમનો ગુણધર્મ, જૂથનો ગુણધર્મ અને વિભાજનનો ગુણધર્મ આપણી ગણતરી સરળ બનાવવામાં મદદ કરે છે.
9. આપણે એ પણ શીખી ગયાં છીએ કે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો કઈ રીતે ભાગાકાર થાય. આપણે જોયું કે,
   (a) જ્યારે ધન પૂર્ણાંક સંખ્યાનો અન્ય ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યા વડે ભાગાકાર કરવામાં આવે કે ઋણ પૂર્ણાંકનો ધન પૂર્ણાંક વડે ભાગાકાર કરવામાં આવે ત્યારે ઋણ સંખ્યા પ્રાપ્ત થાય છે.
   (b) ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યાનો અન્ય ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યા વડે ભાગાકાર કરવામાં આવે છે ત્યારે ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા પ્રાપ્ત થાય છે.
10. કોઈ પણ પૂર્ણાંક સંખ્યા a માટે,
   (a) $a \div 0$ એ વ્યાખ્યાયિત નથી.
   (b) $a \div 1 = a$

પ્રકરણ 2

અપૂર્ણાંક અને દશાંશ સંખ્યાઓ

D2D1EC

2.1 પરિચય

તમે અગાઉના ધોરણમાં અપૂર્ણાંક અને દશાંશ વિશે શીખી ગયા છો. અપૂર્ણાંકના અભ્યાસમાં શુદ્ધ, અશુદ્ધ અને મિશ્ર અપૂર્ણાંકો તેમજ તેમના સરવાળા અને બાદબાકીનો સમાવેશ થાય છે. આપણે અપૂર્ણાંકોની સરખામણી સમ અપૂર્ણાંક, સંખ્યારેખા પર અપૂર્ણાંકોનું નિરૂપણ અને અપૂર્ણાંકોના ક્રમનો પણ અભ્યાસ કર્યો.

આપણા દશાંશના અભ્યાસમાં તેમની સરખામણી, તેમનું સંખ્યારેખા પર નિરૂપણ અને તેમના સરવાળા-બાદબાકીનો સમાવેશ કરવામાં આવ્યો છે.

હવે, આપણે અપૂર્ણાંકો અને દશાંશના ગુણાકાર અને ભાગાકાર વિશે શીખીશું.

2.2 અપૂર્ણાંક વિશે તમે કઈ-કઈ બાબતો શીખ્યા છો ?

શુદ્ધ અપૂર્ણાંક એ એક એવો અપૂર્ણાંક છે જે પૂર્ણના કેટલાક ભાગને રજૂ કરે છે. શું $\frac{7}{4}$ એ શુદ્ધ અપૂર્ણાંક છે ? અહીં અંશ મોટો છે કે છેદ ?

અશુદ્ધ અપૂર્ણાંક એ પૂર્ણ અને શુદ્ધ અપૂર્ણાંકનું મિશ્રણ છે. શું $\frac{7}{4}$ એ અશુદ્ધ અપૂર્ણાંક છે ? અહીં અંશ મોટો છે કે છેદ ?

અશુદ્ધ અપૂર્ણાંક $\frac{7}{4}$ ને $1\frac{3}{4}$ પણ લખી શકાય. આ મિશ્ર અપૂર્ણાંક છે. શું તમે શુદ્ધ, અશુદ્ધ અને મિશ્ર અપૂર્ણાંકો દરેકનાં પાંચ પાંચ ઉદાહરણો લખી શકશો ?

ઉદાહરણ 1 $\frac{3}{5}$ના પાંચ સમ અપૂર્ણાંક લખો.

ઉકેલ $\frac{3}{5}$નો એક સમ અપૂર્ણાંક $\frac{3}{5} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10}$ છે. અન્ય ચાર શોધો.

ઉદાહરણ 2 રમેશે એક સ્વાધ્યાયનો $\frac{2}{7}$ ભાગ ઉકેલ્યો જ્યારે સીમાએ તે જ સ્વાધ્યાયનો $\frac{4}{5}$ ભાગ ઉકેલ્યો. આ બંનેમાંથી કોણે ઓછો ભાગ ઉકેલ્યો, તે શોધો.

ઉકેલ કોણે સ્વાધ્યાયનો ઓછો ભાગ ઉકેલ્યો તે જાણવા માટે આપણે $\frac{2}{7}$ અને $\frac{4}{5}$ ની સરખામણી કરીશું.

સરખા છેદવાળા અપૂર્ણાંકમાં રૂપાંતર કરતાં આપણે $\frac{2}{7} = \frac{10}{35}, \frac{4}{5} = \frac{28}{35}$ મેળવીએ છીએ.

અહીં, $10 < 28$ આથી $\frac{10}{35} < \frac{28}{35}$

આથી, $\frac{2}{7} < \frac{4}{5}$

રમેશે સીમા કરતાં ઓછા ભાગનો ઉકેલ મેળવ્યો છે.

ઉદાહરણ 3 સમીરાએ $3\frac{1}{2}$ કિગ્રા સફરજન અને $4\frac{3}{4}$ કિગ્રા સંતરાં ખરીદ્યાં. તેણે ખરીદેલ ફળોનું કુલ વજન કેટલું થશે ?

ઉકેલ ફળોનું કુલ વજન $= \left(3\frac{1}{2} + 4\frac{3}{4}\right)$ કિગ્રા

$= \left(\frac{7}{2} + \frac{19}{4}\right)$ કિગ્રા $= \left(\frac{14}{4} + \frac{19}{4}\right)$ કિગ્રા

$= \frac{33}{4}$ કિગ્રા $= 8\frac{1}{4}$ કિગ્રા

ઉદાહરણ 4 સુમન દરરોજ $5\frac{2}{3}$ કલાક અભ્યાસ કરે છે. આ સમયના $2\frac{4}{5}$ કલાક વિજ્ઞાન અને ગણિત માટે ફાળવે છે. બીજા વિષયો માટે તે કેટલો સમય ફાળવતી હશે ?

ઉકેલ સુમનનો કુલ અભ્યાસનો સમય $= 5\frac{2}{3}$ કલાક $= \frac{17}{3}$ કલાક

સુમને વિજ્ઞાન અને ગણિત વિષય માટે ફાળવેલો સમય $= 2\frac{4}{5} = \frac{14}{5}$ કલાક

આમ, અન્ય વિષયો માટે તેણે ફાળવેલો સમય $= \left(\frac{17}{3} - \frac{14}{5}\right)$ કલાક

$= \left(\frac{17 \times 5}{15} - \frac{14 \times 3}{15}\right)$ કલાક $= \left(\frac{85 - 42}{15}\right)$ કલાક

$= \frac{43}{15}$ કલાક $= 2\frac{13}{15}$ કલાક

સ્વાધ્યાય 2.1

1. ઉકેલો

(i) $2 - \frac{3}{5}$ (ii) $4 + \frac{7}{8}$ (iii) $\frac{3}{5} + \frac{2}{7}$ (iv) $\frac{9}{11} - \frac{4}{15}$

(v) $\frac{7}{10} + \frac{2}{5} + \frac{3}{2}$ (vi) $2\frac{2}{3} + 3\frac{1}{2}$ (vii) $8\frac{1}{2} - 3\frac{5}{8}$

2. નીચેનાને ઊતરતા ક્રમમાં ગોઠવો :

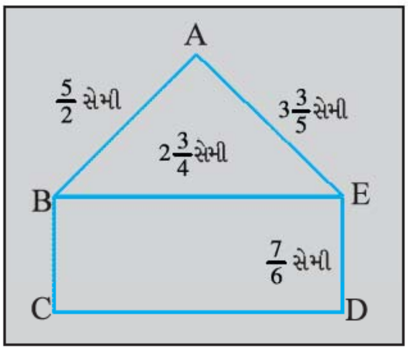
(i) $\frac{2}{9}, \frac{2}{3}, \frac{8}{21}$ (ii) $\frac{1}{5}, \frac{3}{7}, \frac{7}{10}$

3. ''જાદુઈ ચોરસ''માં દરેક આડી હરોળ, ઊભી હરોળ અને ત્રાંસી હરોળની સંખ્યાઓનો સરવાળો સમાન આવે છે. શું આ એક જાદુઈ ચોરસ છે ?

$\frac{4}{11}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{2}{11}$
$\frac{3}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{7}{11}$
$\frac{8}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{6}{11}$

(પ્રથમ આડી હરોળ અનુસાર $\frac{4}{11} + \frac{9}{11} + \frac{2}{11} = \frac{15}{11}$)

4. એક લંબચોરસ કાગળની લંબાઈ $12\frac{1}{2}$ સેમી અને પહોળાઈ $10\frac{2}{3}$ સેમી છે. તેની પરિમિતિ શોધો.



5. આપેલ આકૃતિમાં (i) ΔABE (ii) લંબચોરસ BCDEની પરિમિતિ શોધો. કોની પરિમિતિ વધારે છે ?

6. સલીલ એક ચિત્રને ફ્રેમમાં મૂકવા માંગે છે. ચિત્રની પહોળાઈ $7\frac{3}{5}$ સેમી છે. ફ્રેમમાં વ્યવસ્થિત લગાવવા માટે ચિત્રની પહોળાઈ $7\frac{3}{10}$ સેમીથી વધુ ન હોવી જોઈએ. ચિત્રને કેટલું કાપવું પડશે ?

7. રીતુએ એક સફરજનનો $\frac{3}{5}$ ભાગ ખાધો અને બાકીનો બચેલો ભાગ એના ભાઈ સોમુએ ખાધો. સફરજનનો કેટલો ભાગ સોમુએ ખાધો ? કોનો ભાગ વધારે હતો ? કેટલો વધારે હતો ?

8. મનોજે એક ચિત્રમાં રંગ પૂરવાનું કામ $\frac{7}{12}$ કલાકમાં પૂર્ણ કર્યું. વૈભવે તે જ ચિત્રમાં રંગ પૂરવાનું કાર્ય $\frac{3}{4}$ કલાકમાં પૂર્ણ કર્યું. કોણે વધુ સમય કાર્ય કર્યું ? આ સમય કેટલો વધારે હતો ?

2.3 અપૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર (Multiplication of Fraction) :

તમે જાણો જ છો કે એક લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ કેવી રીતે શોધી શકાય. એ લંબાઈ $\times$ પહોળાઈના બરાબર હોય છે. જો કોઈ લંબચોરસની લંબાઈ તથા પહોળાઈ અનુક્રમે 7 સેમી અને 4 સેમી હોય તો એનું ક્ષેત્રફળ શું થશે ? આનું ક્ષેત્રફળ $7 \times 4 = 28$ સેમી^{2} થશે.

જો લંબચોરસની લંબાઈ તથા પહોળાઈ અનુક્રમે $7\frac{1}{2}$ સેમી અને $3\frac{1}{2}$ સેમી છે, તો એનું ક્ષેત્રફળ શું થશે ? તમે કહેશો કે એ $7\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2} = \frac{15}{2} \times \frac{7}{2}$ સેમી^{2} છે. સંખ્યા $\frac{15}{2}$ અને $\frac{7}{2}$ અપૂર્ણાંક છે. આપેલ લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે એ જાણવું ખૂબ જરૂરી છે કે અપૂર્ણાંકના ગુણાકાર કેવી રીતે કરી શકાય. આપણે હવે એ વિશે શીખીશું.

2.3.1 અપૂર્ણાંકનો પૂર્ણ સંખ્યા સાથેનો ગુણાકાર (Multiplication of a Fraction by a Whole Number) :

આકૃતિ 2.1

ડાબી બાજુની આકૃતિનું અવલોકન કરો (આકૃતિ 2.1). દરેક છાયાંકિત ભાગ વર્તુળનો $\frac{1}{4}$ ભાગ છે. બે છાયાંકિત ભાગ મળીને વર્તુળના કેટલા ભાગને રજૂ કરશે ? તેને $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2 \times \frac{1}{4}$ વડે દર્શાવી શકાય.

બે છાયાંકિત ભાગોનું મિશ્રણ આપણને આકૃતિ 2.2 મળે છે. આકૃતિ 2.2માં છાયાંકિત ભાગ વર્તુળના કેટલા ભાગને દર્શાવે છે ? તે વર્તુળના $\frac{2}{4}$ ભાગને દર્શાવે છે.

આકૃતિ 2.2

આકૃતિ 2.1માં છાયાંકિત ભાગને એકસાથે લેવામાં આવે તો આકૃતિ 2.2ના છાયાંકિત ભાગ જેટલો સરખો જ થાય. એટલે કે આપણને આકૃતિ 2.3 મળે છે.

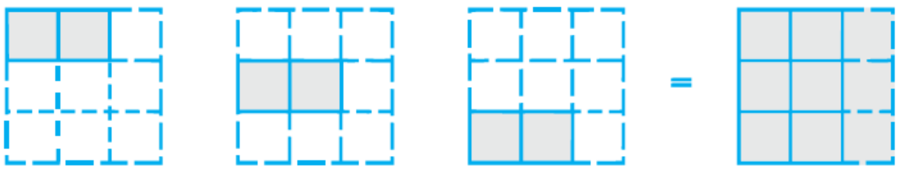
આકૃતિ 2.3

અથવા $2 \times \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$

હવે તમે કહી શકો છો કે આ ચિત્ર શું રજૂ કરે છે ? (આકૃતિ 2.4)

આકૃતિ 2.4

અને આ ? (આકૃતિ 2.5)



આકૃતિ 2.5

હવે આપણે $3 \times \frac{1}{2}$ શોધીશું

આપણી પાસે $3 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

આપણી પાસે $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+1+1}{2} = \frac{3 \times 1}{2} = \frac{3}{2}$

તેથી $3 \times \frac{1}{2} = \frac{3 \times 1}{2} = \frac{3}{2}$

તેવી જ રીતે $\frac{2}{3} \times 5 = \frac{2 \times 5}{3} = ?$

તમે કહી શકો : $3 \times \frac{2}{7} = ?$ $4 \times \frac{3}{5} = ?$

આપણે અત્યાર સુધી જે અપૂર્ણાંકો જોયા જેમ કે, $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{7}$ અને $\frac{3}{5}$; એ શુદ્ધ અપૂર્ણાંક હતા.

અશુદ્ધ અપૂર્ણાંક માટે પણ આપણી પાસે,

$$2 \times \frac{5}{3} = \frac{2 \times 5}{3} = \frac{10}{3} \text{ છે.}$$

પ્રયત્ન કરો, $3 \times \frac{8}{7} = ?$ $4 \times \frac{7}{5} = ?$

આમ, પૂર્ણ સંખ્યા સાથે શુદ્ધ અથવા અશુદ્ધ અપૂર્ણાંકનો ગુણાકાર કરવા માટે આપણે પૂર્ણ સંખ્યાનો અપૂર્ણાંકના અંશ સાથે ગુણાકાર કરીએ છીએ અને છેદને એમના એમ રહેવા દઈએ છીએ.

પ્રયત્ન કરો

1. શોધો : (a) $\frac{2}{7} \times 3$ (b) $\frac{9}{7} \times 6$ (c) $3 \times \frac{1}{8}$ (d) $\frac{13}{11} \times 6$

   જો તેનો જવાબ અશુદ્ધ અપૂર્ણાંક છે તો તેને મિશ્ર અપૂર્ણાંકમાં રજૂ કરો.

2. ચિત્રાત્મક રજૂઆત કરો : $2 \times \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$

પ્રયત્ન કરો

શોધો :(i) $5 \times 2\frac{3}{7}$

(ii) $1\frac{4}{9} \times 6$

મિશ્ર અપૂર્ણાંકનો પૂર્ણ સંખ્યા સાથે ગુણાકાર કરવા માટે પ્રથમ મિશ્ર અપૂર્ણાંકને અશુદ્ધ અપૂર્ણાંકમાં ફેરવો અને પછી ગુણાકાર કરો.

તેથી, $3 \times 2\frac{5}{7} = 3 \times \frac{19}{7} = \frac{57}{7} = 8\frac{1}{7}$

તેવી જ રીતે $2 \times 4\frac{2}{5} = 2 \times \frac{22}{5} = ?$

અપૂર્ણાંક- "સંખ્યાનો ... ભાગ" તરીકે

આ આકૃતિનું અવલોકન કરો (આકૃતિ 2.6).

આ બે ચોરસ સમાન છે.

દરેક છાયાંકિત ભાગ 1નો $\frac{1}{2}$ ભાગ રજૂ કરે છે.

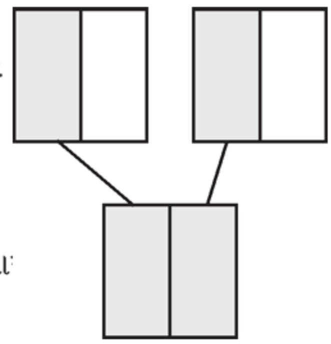
તેથી, બન્ને છાયાંકિત ભાગ સાથે મળીને 2ના $\frac{1}{2}$ ભાગ રજૂ કરે

છાયાંકિત 2 ભાગના $\frac{1}{2}$ ભાગ જે 1 છે.

તેથી, આપણે કહી શકીએ કે 2ના $\frac{1}{2}$ એટલે 1. આપણે તેને આ

પણ મેળવી શકીએ છીએ $\frac{1}{2} \times 2 = 1$.

આમ, 2ના $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$.



આકૃતિ 2.6

વધુમાં, આ સમાન ચોરસ જુઓ (આકૃતિ 2.7).

દરેક છાયાંકિત ભાગ 1નો $\frac{1}{2}$ ભાગ રજૂ કરે છે.

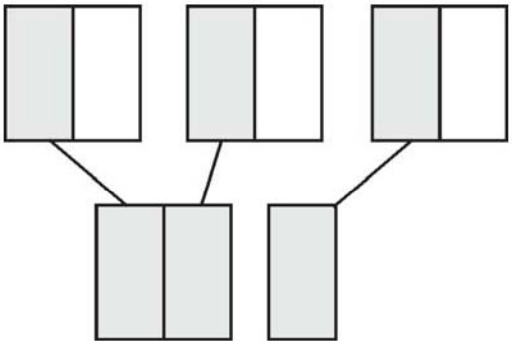
તેથી, ત્રણ છાયાંકિત ભાગ મળીને 3નો $\frac{1}{2}$ ભાગ રજૂ કરે છે.

છાયાંકિત 3 ભાગ ભેગા કરતાં,

તે $1\frac{1}{2}$ દર્શાવે છે. એટલે કે $\frac{3}{2}$

તેથી, 3ના $\frac{1}{2}$ એટલે $\frac{3}{2}$, વળી, $\frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$

આમ, 3ના $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$



આકૃતિ 2.7

તો આપણે જોઈએ છીએ કે 'નો... ભાગ' ગુણાકાર સૂચવે છે.

ફરીદા પાસે 20 લખોટી છે. રેશમા પાસે ફરીદા કરતાં $\frac{1}{5}$ ભાગની લખોટીઓ છે. રેશમા પાસે કેટલી લખોટીઓ હશે ? આપણે જાણીએ છીએ કે 'નો...ભાગ' ગુણાકાર સૂચવે છે. તેથી રેશમા પાસે $\frac{1}{5} \times 20 = 4$ લખોટી હશે. તે જ રીતે, 16નો $\frac{1}{2}$મો ભાગ $= \frac{1}{2} \times 16 = \frac{16}{2} = 8$.

પ્રયત્ન કરો

શું તમે કહી શકો છો (i) 10ના $\frac{1}{2}$ (ii) 16ના $\frac{1}{4}$ (iii) 25ના $\frac{2}{5}$ કેટલા થાય ?

ઉદાહરણ 5 40 વિદ્યાર્થીઓના વર્ગમાં કુલ સંખ્યાના $\frac{1}{5}$ જેટલા વિદ્યાર્થીઓને અંગ્રેજીનો અભ્યાસ પસંદ છે. $\frac{2}{5}$ જેટલા વિદ્યાર્થીઓને ગણિતનો અભ્યાસ પસંદ છે અને બાકીના વિદ્યાર્થીઓને વિજ્ઞાનનો અભ્યાસ પસંદ છે.

(i) કેટલા વિદ્યાર્થીઓને અંગ્રેજીનો અભ્યાસ પસંદ છે ?

(ii) કેટલા વિદ્યાર્થીઓને ગણિતનો અભ્યાસ પસંદ છે ?

(iii) કુલ વિદ્યાર્થીઓના કેટલામા ભાગના વિદ્યાર્થીઓને વિજ્ઞાનનો અભ્યાસ પસંદ છે ?

ઉકેલ વર્ગમાં વિદ્યાર્થીઓની કુલ સંખ્યા = 40.

(i) કુલ વિદ્યાર્થીઓમાંથી $\frac{1}{5}$ જેટલા વિદ્યાર્થીઓને અંગ્રેજીનો અભ્યાસ પસંદ છે.

આમ, જે વિદ્યાર્થીઓને અંગ્રેજીનો અભ્યાસ પસંદ છે તેઓની સંખ્યા = 40 ના $\frac{1}{5} = \frac{1}{5} \times 40 = 8$.

(ii) તમે જાતે પ્રયત્ન કરો.

(ii) જેને અંગ્રેજી અને ગણિતનો અભ્યાસ પસંદ છે તેવા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા = 8 + 16 = 24.

આમ, જે વિદ્યાર્થીઓ વિજ્ઞાન પસંદ કરે છે, તેઓની સંખ્યા = 40 – 24 = 16.

આમ, જરૂરી અપૂર્ણાંક $\frac{16}{40}$ છે.

સ્વાધ્યાય 2.2

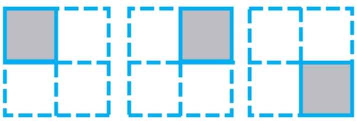
1. (a) થી (d) માં દર્શાવેલી આકૃતિને અનુરૂપ જવાબ (i) થી (iv) માંથી પસંદ કરીને લખો.

(i) $2 \times \frac{1}{5}$ (ii) $2 \times \frac{1}{2}$ (iii) $3 \times \frac{2}{3}$ (iv) $3 \times \frac{1}{4}$

(a)

(b)

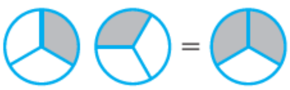
(c)



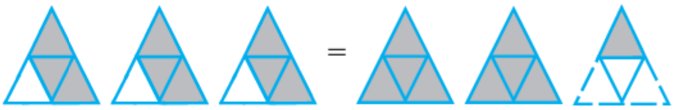
(d)

2. કેટલાંક ચિત્રો (a) થી (c) નીચે આપેલ છે. તેને અનુરૂપ જવાબ (i), (ii), (iii) માંથી પસંદ કરો.

(i) $3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$ (ii) $2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ (iii) $3 \times \frac{3}{4} = 2\frac{1}{4}$



(a)



(b)

(c)

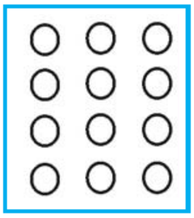
3. ગુણાકાર કરો અને સંક્ષિપ્ત સ્વરૂપમાં ફેરવો અને મિશ્ર અપૂર્ણાંકમાં દર્શાવો

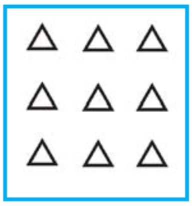
(i) $7 \times \frac{3}{5}$ (ii) $4 \times \frac{1}{3}$ (iii) $2 \times \frac{6}{7}$ (iv) $5 \times \frac{2}{9}$ (v) $\frac{2}{3} \times 4$

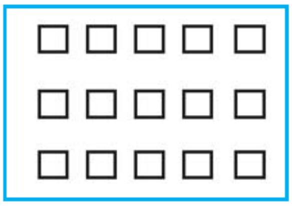
(vi) $\frac{5}{2} \times 6$ (vii) $11 \times \frac{4}{7}$ (viii) $20 \times \frac{4}{5}$ (ix) $13 \times \frac{1}{3}$ (x) $15 \times \frac{3}{5}$

4. છાયાંકિત કરો : (i) ચિત્ર (a)ના $\frac{1}{2}$ ભાગના વર્તુળમાં (ii) ચિત્ર (b)ના $\frac{2}{3}$ ભાગના ત્રિકોણમાં

(iii) ચિત્ર (c)ના $\frac{3}{5}$ ભાગના ચોરસમાં


(a)


(b)


(c)

5. શોધો :

(a) (i) 24 અને (ii) 46 દરેકના $\frac{1}{2}$ (b) (i) 18 અને (ii) 27 દરેકના $\frac{2}{3}$

(c) (i) 16 અને (ii) 36 દરેકના $\frac{3}{4}$ (d) (i) 20 અને (ii) 35 દરેકના $\frac{4}{5}$

6. ગુણાકાર કરી મિશ્ર અપૂર્ણાંકમાં દર્શાવો :

(a) $3 \times 5\frac{1}{5}$ (b) $5 \times 6\frac{3}{4}$ (c) $7 \times 2\frac{1}{4}$

(d) $4 \times 6\frac{1}{3}$ (e) $3\frac{1}{4} \times 6$ (f) $3\frac{2}{5} \times 8$

7. શોધો : (a) (i) $2\frac{3}{4}$ અને (ii) $4\frac{2}{9}$ બંનેના $\frac{1}{2}$ (b) (i) $3\frac{5}{6}$ અને (ii) $9\frac{2}{3}$ બંનેના $\frac{5}{8}$

8. વિદ્યા અને પ્રતાપ પિક્નિક માટે ગયાં. તેમની માતાએ તેમને વૉટર બેગમાં 5 લિટર પાણી ભરીને આપ્યું. તેમાંથી વિદ્યાએ $\frac{2}{5}$ ભાગ પાણી પીધું. પ્રતાપે બાકીનું પાણી પીધું.

(i) વિદ્યાએ કેટલું પાણી પીધું ?

(ii) પ્રતાપે કેટલામા ભાગનું પાણી પીધું ?

2.3.2 અપૂર્ણાંક વડે અપૂર્ણાંકનો ગુણાકાર (Multiplication of a Fraction by a Fraction)

ફરીદા પાસે 9 સેમી લાંબી રીબીન સ્ટ્રિપ હતી. તેણે આ સ્ટ્રિપને ચાર સમાન ભાગોમાં કાપી. તેણે તે કેવી રીતે કર્યું ? તેણે તે સ્ટ્રિપને લંબાઈના સરખા ભાગ થાય તે રીતે બે વખત વાળી. દરેક ટુકડો કુલ લંબાઈનો કેટલામો ભાગ દર્શાવશે ?

દરેક ભાગ $\frac{9}{4}$ સ્ટ્રિપ હશે. તેણે એક ભાગ લીધો અને તેને વચ્ચેથી વાળીને બે સરખા ભાગોમાં વિભાજિત

કર્યો. દરેક ગડી કરેલ ટુકડો શું દર્શાવશે ? તે $\frac{9}{4}$ ના $\frac{1}{2}$ દર્શાવશે અથવા $\frac{1}{2} \times \frac{9}{4}$.

ચાલો હવે જોઈએ કે બે અપૂર્ણાંકોના ગુણાકાર કેવી રીતે કરી શકાય, જેમ કે $\frac{1}{2} \times \frac{9}{4}$.

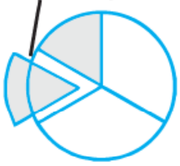
એના માટે પ્રથમ આપણે $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ જેવાનો ગુણાકાર કરતાં શીખીએ.

(વસ્તુ)

આકૃતિ 2.8

(a) આપણને કેવી રીતે વસ્તુનો $\frac{1}{3}$ ભાગ મળે ? આપણે વસ્તુને 3 સરખા ભાગોમાં વહેંચીશું. દરેક ભાગ વસ્તુનો $\frac{1}{3}$ ભાગ રજૂ કરે છે. આ ત્રણ ભાગોમાંથી એક ભાગ લો અને આકૃતિ 2.8 માં બતાવ્યા પ્રમાણે છાયાંકિત કરો.

(વસ્તુ)



આકૃતિ 2.9

(b) તમે છાયાંકિત ભાગનો $\frac{1}{2}$ કેવી રીતે શોધશો ? છાયાંકિત $(\frac{1}{3})$ ભાગને બે સરખા ભાગમાં વહેંચો. દરેક ભાગને $\frac{1}{3}$ના $\frac{1}{2}$ તરીકે દર્શાવી શકાય. ઉદાહરણ $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ (આકૃતિ 2.9).

આ બેમાંથી એક ભાગને 'A' નામ આપો. A એ $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ દર્શાવે છે.

(c) 'A' વસ્તુનો કેટલામો ભાગ છે ? આ માટે દરેક $\frac{1}{3}$ ભાગને પણ બે સરખા ભાગમાં વિભાજિત કરો. હવે તમારી પાસે કેટલા સમાન ભાગ છે ? છ સમાન ભાગ છે. 'A' આ ભાગોમાંનો એક ભાગ છે.

આમ 'A' એ સમગ્ર ભાગનો $\frac{1}{6}$ ભાગ છે. તેથી, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

આપણે કેવી રીતે નક્કી કરી શકીએ કે 'A' એ વસ્તુનો $\frac{1}{6}$ ભાગ છે ? સંપૂર્ણ ભાગ 6 ભાગોમાં વિભાજિત થયો હતો $6 = 2 \times 3$ અને $1 = 1 \times 1$ ભાગ તેમાંથી લેવામાં આવ્યો હતો.

આમ, 'A' આ ભાગોનો એક ભાગ છે.

તેથી, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = \frac{1 \times 1}{2 \times 3}$.

અથવા $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1 \times 1}{2 \times 3}$

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$ નું મૂલ્ય પણ તે જ રીતે મળી શકે છે. વસ્તુને બે સમાન ભાગમાં વિભાજિત કરો અને પછી દરેક ભાગને ત્રણ સમાન ભાગમાં વિભાજિત કરો. આ ભાગમાંથી એક ભાગ લો. આ $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$ એટલે કે $\frac{1}{6}$ દર્શાવશે.

તેથી, આગળ ચર્ચા કરી તે મુજબ $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}=\frac{1\times1}{3\times2}$

તેથી, $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

શોધો : $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}$ અને $\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}$ અને $\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}$ અને નીચે મુજબ મળે છે કે નહિ તે ચકાસો.

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}$$

પ્રયત્ન કરો :

ખાલી જગ્યા પૂરો :

(i) $\frac{1}{2}\times\frac{1}{7}=\frac{1\times1}{2\times7}=\square$ (ii) $\frac{1}{5}\times\frac{1}{7}=\square=\square$

(iii) $\frac{1}{7}\times\frac{1}{2}=\square=\square$ (iv) $\frac{1}{7}\times\frac{1}{5}=\square=\square$

ઉદાહરણ 6 સુશાંત એક કલાકમાં પુસ્તકનો $\frac{1}{3}$ ભાગ વાંચે છે. પુસ્તકનો કેટલો ભાગ તે $2\frac{1}{5}$ કલાકમાં વાંચશે ?

જવાબો સુશાંત દ્વારા 1 કલાકમાં વંચાયેલ પુસ્તકનો ભાગ = $\frac{1}{3}$.

તેથી, $2\frac{1}{5}$ કલાકમાં તેના દ્વારા વાંચવામાં આવેલ પુસ્તકનો ભાગ = $2\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}$.

$$=\frac{11}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{11\times1}{5\times3}=\frac{11}{15}$$

હવે આપણે $\frac{1}{2}\times\frac{5}{3}$ શોધીએ. આપણે જાણીએ છીએ કે $\frac{5}{3}=\frac{1}{3}\times5$.

તેથી, $\frac{1}{2}\times\frac{5}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times5=\frac{1}{6}\times5=\frac{5}{6}$

પણ, $\frac{5}{6} = \frac{1 \times 5}{2 \times 3}$ તેથી, $\frac{1}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{1 \times 5}{2 \times 3} = \frac{5}{6}$

આ નીચે આપેલી આકૃતિ દ્વારા પણ દર્શાવવામાં આવે છે. આ પાંચ સમાન આકાર (આકૃતિ 2.10) દરેક પાંચ સમાન વર્તુળોના ભાગ છે. આવો એક આકાર લો. આ આકાર મેળવવા માટે આપણે એક વર્તુળને ત્રણ સમાન ભાગમાં વહેંચીએ છીએ. હવે એ દરેક ત્રણ ભાગને પણ સમાન બે ભાગમાં વહેંચીએ. તેમાંથી એક ભાગ તે આ આકાર છે. તે શું દર્શાવે છે ?

તે $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ દર્શાવે છે. તે આવા ભાગનો સરવાળો $5 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ હશે.

આકૃતિ 2.10

પ્રયત્ન કરો

શોધો : (i) $\frac{1}{3} \times \frac{4}{5}, \frac{2}{3} \times \frac{1}{5}$

તેવી જ રીતે $\frac{3}{5} \times \frac{1}{7} = \frac{3 \times 1}{5 \times 7} = \frac{3}{35}$

આપણે $\frac{2}{3} \times \frac{7}{5}$ ને પણ આમ શોધી શકીએ છીએ તેથી $\frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{2 \times 7}{3 \times 5} = \frac{14}{15}$

તેથી આપણે શોધ્યું કે બે અપૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર $= \frac{\text{અંશનો ગુણાકાર}}{\text{છેદનો ગુણાકાર}}$

પ્રયત્ન કરો

શોધો : $\frac{8}{3} \times \frac{4}{7}; \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$

ગુણાકારની કિંમત :

તમે જોયું કે બે પૂર્ણ સંખ્યાનો ગુણાકાર તે દરેક પૂર્ણ સંખ્યા કરતાં મોટો હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે $3 \times 4 = 12$ અને $12 > 4$, $12 > 3$. જ્યારે આપણે બે અપૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર કરીએ તો આપણને કેવો જવાબ મળે છે ?

ચાલો, હવે આપણે બે શુદ્ધ અપૂર્ણાંકોના ગુણાકાર અંગે વિચારીએ.

આપણી પાસે,

$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$	$\frac{8}{15} < \frac{2}{3}, \frac{8}{15} < \frac{4}{5}$	ગુણાકાર બન્ને અપૂર્ણાંકો કરતાં નાનો છે.
$\frac{1}{5} \times \frac{2}{7} =$	.........., ...	....
$\frac{3}{5} \times \frac{\square}{8} = \frac{21}{40}$	.........., ...	....
$\frac{2}{\square} \times \frac{4}{9} = \frac{8}{45}$	.........., ...	....

તમે જોશો કે જ્યારે બે શુદ્ધ અપૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર કરવામાં આવે છે, ત્યારે ગુણાકાર દરેક અપૂર્ણાંક કરતાં નાનો મળે છે અથવા આપણે કહી શકીએ કે બે શુદ્ધ અપૂર્ણાંકના ગુણાકારની કિંમત તે દરેક અપૂર્ણાંક કરતાં નાની છે. પાંચ વધુ ઉદાહરણો બનાવી ચકાસો.

ચાલો, હવે આપણે બે અશુદ્ધ અપૂર્ણાંકોના ગુણાકાર વિશે જાણીએ.

$\frac{7}{3}\times\frac{5}{2}=\frac{35}{6}$	$\frac{35}{6}>\frac{7}{3}, \frac{35}{6}>\frac{5}{2}$	ગુણાકાર બન્ને અપૂર્ણાંકો કરતાં મોટો છે.
$\frac{6}{5}\times\frac{\square}{3}=\frac{24}{15}$	....,	....
$\frac{9}{2}\times\frac{7}{\square}=\frac{63}{8}$	.........., ...	....
$\frac{3}{\square}\times\frac{8}{7}=\frac{24}{14}$	.........., ...	....

આપણે શોધી કાઢ્યું છે કે બે અશુદ્ધ અપૂર્ણાંકનો ગુણાકાર દરેક અપૂર્ણાંક કરતાં મોટો છે.

અથવા બે અશુદ્ધ અપૂર્ણાંકના ગુણાકારની કિંમત એ દરેક અશુદ્ધ અપૂર્ણાંક કરતાં વધારે છે.

તમારી જાતે પાંચ ઉદાહરણો બનાવો અને ઉપરનું નિવેદન ચકાસો.

ચાલો, હવે શુદ્ધ અપૂર્ણાંક અને અશુદ્ધ અપૂર્ણાંકનો ગુણાકાર કરીએ જેમકે $\frac{2}{3}$ અને $\frac{7}{5}$.

આપણી પાસે $\frac{2}{3}\times\frac{7}{5}=\frac{14}{15}$

અહીં $\frac{14}{15}<\frac{7}{5}$ અને $\frac{14}{15}>\frac{2}{3}$

પ્રાપ્ત કરેલ કિંમત અશુદ્ધ અપૂર્ણાંક કરતાં નાની છે અને શુદ્ધ અપૂર્ણાંક કરતાં મોટી છે.

$\frac{6}{5}\times\frac{2}{7}, \frac{8}{3}\times\frac{4}{5}$ માટે તપાસો.

સ્વાધ્યાય 2.3

1. શોધો :

(i) દરેકનો $\frac{1}{4}$ શોધો. : (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{3}{5}$ (c) $\frac{4}{3}$

(ii) દરેકનો $\frac{1}{7}$ શોધો. : (a) $\frac{2}{9}$ (b) $\frac{6}{5}$ (c) $\frac{3}{10}$

2. ગુણાકાર કરો અને અતિસંક્ષિપ્ત સ્વરૂપમાં દર્શાવો (જો શક્ય હોય તો) :

(i) $\frac{2}{3} \times 2\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{2}{7} \times \frac{7}{9}$ (iii) $\frac{3}{8} \times \frac{6}{4}$ (iv) $\frac{9}{5} \times \frac{3}{5}$

(v) $\frac{1}{3} \times \frac{15}{8}$ (vi) $\frac{11}{2} \times \frac{3}{10}$ (vii) $\frac{4}{5} \times \frac{12}{7}$

3. ગુણાકાર કરો :

(i) $\frac{2}{5} \times 5\frac{1}{4}$ (ii) $6\frac{2}{5} \times \frac{7}{9}$ (iii) $\frac{3}{2} \times 5\frac{1}{3}$ (iv) $\frac{5}{6} \times 2\frac{3}{7}$

(v) $3\frac{2}{5} \times \frac{4}{7}$ (vi) $2\frac{3}{5} \times 3$ (vii) $3\frac{4}{7} \times \frac{3}{5}$

4. કયું મોટું છે ?

(i) $\frac{3}{4}$ના $\frac{2}{7}$ કે $\frac{5}{8}$ના $\frac{3}{5}$

(ii) $\frac{6}{7}$ના $\frac{1}{2}$ કે $\frac{3}{7}$ના $\frac{2}{3}$

5. શૈલીએ તેના બગીચામાં એક હારમાં 4 છોડ રોપ્યા છે. તેણીએ બે છોડ વચ્ચે $\frac{3}{4}$ મીટરનું અંતર છોડ્યું છે. પ્રથમ અને છેલ્લા છોડ વચ્ચેનું અંતર શોધો.

6. લિપિકા દરરોજ $1\frac{3}{4}$ કલાક એક પુસ્તક વાંચે છે. તે આ પુસ્તક 6 દિવસમાં આખું વાંચે છે. આ પુસ્તક વાંચવા માટે તેણે બધું મળીને કેટલા કલાક ફાળવ્યા હશે ?

7. એક કાર 1 લિટર પેટ્રોલનો ઉપયોગ કરીને 16 કિમી અંતર કાપે છે, તો તે કારે $2\frac{3}{4}$ લિટર પેટ્રોલનો ઉપયોગ કરીને કેટલું અંતર કાપ્યું હશે ?

8. (a) (i) બૉક્સ (ખાના)માં એવી સંખ્યા લખો, જેથી $\frac{2}{3} \times \square = \frac{10}{30}$ થાય.

(ii) $\square$માં મેળવેલ સંખ્યાનું, અતિ સંક્ષિપ્ત સ્વરૂપ ______ છે.

(b) (i) ખાનામાં એવી સંખ્યા લખો જેથી $\frac{3}{5} \times \square = \frac{24}{75}$ થાય.

(ii) $\square$માં મેળવેલ સંખ્યાનું અતિ સંક્ષિપ્ત સ્વરૂપ ______ છે.

2.4 અપૂર્ણાંકોનો ભાગાકાર (Division of Fractions)

3AH7ZD

જ્હૉન પાસે 6 સેમી લાંબીની પેપરની પટ્ટી છે. તેણે આ પટ્ટીમાંથી 2 સેમી લંબાઈની નાની નાની પટ્ટીઓ કાપી. તમે જાણો છો કે તેને $6 \div 2 = 3$ પટ્ટીઓ મળી હશે.

જ્હૉન 6 સેમી લંબાઈની બીજી પટ્ટીને કાપીને $\frac{3}{2}$ સેમી લંબાઈની નાની પટ્ટીઓમાં વિભાજિત કરી હવે તેને કેટલી પટ્ટી મળશે ? તેને $6 \div \frac{3}{2}$ પટ્ટીઓ મળશે.

$\frac{15}{2}$ સેમી લંબાઈની પેપરની પટ્ટીને કાપીને $\frac{3}{2}$ સેમી લંબાઈની નાની પટ્ટીના $\frac{15}{2} \div \frac{3}{2}$ ટુકડાઓ મેળવી શકાય.

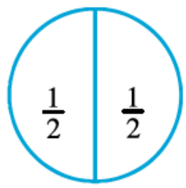
તેથી આપણને પૂર્ણ સંખ્યાને એક અપૂર્ણાંક અથવા એક અપૂર્ણાંકને બીજા અપૂર્ણાંક દ્વારા ભાગવાની જરૂર છે. ચાલો, તે કેવી રીતે કરવું એ જોઈએ.

2.4.1 અપૂર્ણાંક દ્વારા પૂર્ણ સંખ્યાનો ભાગાકાર (Division of Whole Number by a Fraction) :

આપણે $1 \div \frac{1}{2}$ શોધીએ.

આપણે આખા ભાગને સમાન ભાગોમાં વિભાજિત કરીએ છીએ. જેમ કે દરેક ભાગ આખા ભાગનો અડધો છે. આવા અડધા $\left(\frac{1}{2}\right)$ ભાગોની સંખ્યા $1 \div \frac{1}{2}$ હશે. આકૃતિ (2.11)નું અવલોકન કરો. તમે કેટલા અડધા ભાગ જુઓ છો ?

બે અડધા ભાગ છે.



આકૃતિ 2.11

તેથી, $1 \div \frac{1}{2} = 2$. પણ, $1 \times \frac{2}{1} = 1 \times 2 = 2$.

આમ, $1 \div \frac{1}{2} = 1 \times \frac{2}{1}$.

તેવી જ રીતે તેથી, $3 \div \frac{1}{4} =$ 3 સંખ્યાના $\frac{1}{4}$ ભાગ મળે છે. જ્યારે 3 આખા ભાગ $\frac{1}{4}$ સરખા ભાગમાં વિભાજિત થાય છે, ત્યારે $\frac{1}{4}$ સમાન ભાગ = 12 (આકૃતિ 2.12 પરથી)

આકૃતિ 2.12

વળી, $3 \times \frac{4}{1} = 3 \times 4 = 12$, તેથી $3 \div \frac{1}{4} = 3 \times \frac{4}{1} = 12$નું પણ અવલોકન કરો.

તેવી જ રીતે શોધો : $3 \div \frac{1}{2}$ અને $3 \times \frac{2}{1}$

અપૂર્ણાંકનો વ્યસ્ત (Reciprocal of a Fraction)

$\frac{1}{2}$ ના અંશ અને છેદની અદલાબદલી કરતાં $\frac{2}{1}$ મળે છે. તેવી જ રીતે $\frac{1}{3}$ ના $\frac{3}{1}$ મળે છે.

અપૂર્ણાંકને ઉલટાવીને જુઓ અને તેનો ગુણાકાર કરી ખાલી જગ્યા પૂરો.

$7 \times \frac{1}{7} = 1$	$\frac{5}{4} \times \frac{4}{5} =$ ....
$\frac{1}{9} \times 9 =$	$\frac{2}{7} \times$ .... $= 1$
$\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{2 \times 3}{3 \times 2} = \frac{6}{6} = 1$	.... $\times \frac{5}{9} = 1$

આવી બીજી પાંચ જોડ બનાવો.

જે બે શૂન્યેતર સંખ્યાનો ગુણાકાર 1 મળે તે બે સંખ્યાને એકબીજાનો વ્યસ્ત કહે છે.

તેથી $\frac{5}{9}$ નો વ્યસ્ત $\frac{9}{5}$ છે અને $\frac{9}{5}$ નો વ્યસ્ત $\frac{5}{9}$ છે.

$\frac{2}{7}$ અને $\frac{1}{9}$ નો વ્યસ્ત શું છે ?

તેવી જ રીતે $\frac{2}{3}$ નો વ્યસ્ત તેને ઉલટાવવાથી મળશે. તમને $\frac{3}{2}$ મળશે.

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

(i) શું શુદ્ધ અપૂર્ણાંકનો વ્યસ્ત શુદ્ધ અપૂર્ણાંક છે ?

(ii) શું અશુદ્ધ અપૂર્ણાંકનો વ્યસ્ત અશુદ્ધ અપૂર્ણાંક છે ?

તેથી, આપણે કહી શકીએ કે,

$1 \div \frac{1}{2} = 1 \times \frac{2}{1} = 1 \times$ ($\frac{1}{2}$ નો વ્યસ્ત)

$3 \div \frac{1}{4} = 3 \times \frac{4}{1} = 3 \times$ ($\frac{1}{4}$ નો વ્યસ્ત)

$3 \div \frac{1}{2} =$ .... = ...

તેથી, $2 \div \frac{3}{4} = 2 \times$ ($\frac{3}{4}$ નો વ્યસ્ત) $= 2 \times \frac{4}{3}$

$5 \div \frac{2}{9} = 5 \times$ .... $= 5 \times$ ....

આમ, કોઈપણ અપૂર્ણાંક દ્વારા પૂર્ણ સંખ્યાને ભાગવા માટે તે અપૂર્ણાંકના વ્યસ્ત દ્વારા ગુણાકાર કરો.

પ્રયત્ન કરો

શોધો : (i) $7 \div \frac{2}{5}$ (ii) $6 \div \frac{4}{7}$ (iii) $2 \div \frac{8}{9}$

- મિશ્ર અપૂર્ણાંક દ્વારા પૂર્ણ સંખ્યાને ભાગવા માટે પ્રથમ મિશ્ર અપૂર્ણાંકને અશુદ્ધ પૂર્ણાંકમાં રૂપાંતર કરો અને ત્યાર પછી તેને પૂર્ણાંક સંખ્યા સાથે ભાગો.

આમ, $4 \div 2\frac{2}{5} = 4 \div \frac{12}{5} = ?$

અને, $5 \div 3\frac{1}{3} = 5 \div \frac{10}{3} = ?$

પ્રયત્ન કરો

શોધો : (i) $6 \div 5\frac{1}{3}$

(ii) $7 \div 2\frac{4}{7}$

2.4.2 પૂર્ણ સંખ્યા દ્વારા અપૂર્ણાંકનો ભાગાકાર (Divisison of a Fraction by a Whole Number)

- $\frac{3}{4} \div 3$ નો જવાબ શું મળે ?

અગાઉના અવલોકન પરથી, $\frac{3}{4} \div 3 = \frac{3}{4} \div \frac{3}{1} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

તેથી, $\frac{2}{3} \div 7 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{7} = ...$ $\frac{5}{7} \div 6$ અને $\frac{2}{7} \div 8$ શું થાય ?

- પૂર્ણ સંખ્યા દ્વારા મિશ્ર અપૂર્ણાંકને ભાગતી વખતે, મિશ્ર અપૂર્ણાંકનું અશુદ્ધ અપૂર્ણાંકમાં રૂપાંતર કરો.

$2\frac{2}{3} \div 5 = \frac{8}{3} \div 5 = ...$; $4\frac{2}{5} \div 3 = ... = ...$; $2\frac{3}{5} \div 2 = ... = ...$

2.4.3 અપૂર્ણાંક દ્વારા અન્ય અપૂર્ણાંકનો ભાગાકાર

હવે આપણે આ શોધીએ $\frac{1}{3} \div \frac{5}{6}$

$\frac{1}{3} \div \frac{5}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{5}{6}$નો વ્યસ્ત $= \frac{1}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{2}{5}$

તેવી જ રીતે, $\frac{8}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{8}{5} \times \frac{2}{3}$નો વ્યસ્ત $= ?$ અને $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = ?$

પ્રયત્ન કરો

શોધો : (i) $\frac{3}{5} \div \frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2} \div \frac{3}{5}$ (iii) $2\frac{1}{2} \div \frac{3}{5}$ (iv) $5\frac{1}{6} \div \frac{9}{2}$

સ્વાધ્યાય 2.4

1. શોધો :

(i) $12 \div \frac{3}{4}$ (ii) $14 \div \frac{5}{6}$ (iii) $8 \div \frac{7}{3}$ (iv) $4 \div \frac{8}{3}$

(v) $3 \div 2\frac{1}{3}$ (vi) $5 \div 3\frac{4}{7}$

2. નીચે આપેલ દરેક અપૂર્ણાંકનો વ્યસ્ત શોધો. મેળવેલ વ્યસ્ત સંખ્યાઓનું શુદ્ધ અપૂર્ણાંક, અશુદ્ધ અપૂર્ણાંક, અને પૂર્ણ સંખ્યાઓમાં વર્ગીકરણ કરો.

(i) $\frac{3}{7}$ (ii) $\frac{5}{8}$ (iii) $\frac{9}{7}$ (iv) $\frac{6}{5}$

(v) $\frac{12}{7}$ (vi) $\frac{1}{8}$ (vii) $\frac{1}{11}$

3. શોધો :

(i) $\frac{7}{3} \div 2$ (ii) $\frac{4}{9} \div 5$ (iii) $\frac{6}{13} \div 7$ (iv) $4\frac{1}{3} \div 3$

(v) $3\frac{1}{2} \div 4$ (vi) $4\frac{3}{7} \div 7$

4. શોધો :

(i) $\frac{2}{5} \div \frac{1}{2}$ (ii) $\frac{4}{9} \div \frac{2}{3}$ (iii) $\frac{3}{7} \div \frac{8}{7}$ (iv) $2\frac{1}{3} \div \frac{3}{5}$

(v) $3\frac{1}{2} \div \frac{8}{3}$ (vi) $\frac{2}{5} \div 1\frac{1}{2}$ (vii) $3\frac{1}{5} \div 1\frac{2}{3}$ (viii) $2\frac{1}{5} \div 1\frac{1}{5}$

2.5 તમે દશાંશ સંખ્યા વિશે ખૂબ સારી રીતે શીખ્યા છો

તમે આગળના ધોરણમાં દશાંશ સંખ્યાઓ વિશે શીખ્યા છો. આપણે તે ફરીથી ટૂંકમાં યાદ કરીએ. નીચેનું કોષ્ટક જુઓ અને ખાલી જગ્યા પૂરો.

સો (100)	દશક (10)	એકમ (1)	દશાંશ $\left(\frac{1}{10}\right)$	શતાંશ $\left(\frac{1}{100}\right)$	સહસ્ત્રાંશ $\left(\frac{1}{1000}\right)$	સંખ્યા
2	5	3	1	4	7	253.147
6	2	9	3	2	1	....
0	4	3	1	9	2	....
....	1	4	2	5	1	514. 251
2	....	6	5	1	2	236.512
....	2	....	5	....	3	724.503
6	....	4	....	2	....	614.326
0	1	0	5	3	0	....

આપેલ કોષ્ટકમાં તમે સ્થાન-કિંમતના વિસ્તૃત સ્વરૂપને આધારે દશાંશ સંખ્યા લખી. એને ઊલટું પણ કરી શકાય છે. એટલે કે સંખ્યાને તેના વિસ્તૃત સ્વરૂપમાં લખી શકાય છે.

ઉદાહરણ : $253.417 = 2 \times 100 + 5 \times 10 + 3 \times 1 + 4 \times \left(\frac{1}{10}\right) + 1 \times \left(\frac{1}{100}\right) + 7 \times \left(\frac{1}{1000}\right)$.

જહૉન પાસે ₹ 15.50 અને સલમા પાસે ₹ 15.75 છે. કોની પાસે વધુ પૈસા છે ? આ શોધવા માટે આપણે દશાંશ સંખ્યાઓ 15.50 અને 15.75 ની તુલના કરવાની જરૂર છે. તે માટે આપણે પ્રથમ દશાંશચિહ્નની ડાબી બાજુના અંકોની તુલના કરીએ છીએ, જે ડાબી બાજુથી શરૂ થાય છે. અહીં અંકો 1 અને 5 એ દશાંશ ચિહ્નની ડાબી બાજુ બંને રકમમાં સમાન છે. હવે, દશાંશ ચિહ્નની જમણી બાજુએ આવેલા અંકોની તુલના કરીએ. અહીં $5 < 7$ છે તેથી એમ કહી શકાય, $15.50 < 15.75$. આમ, સલમા પાસે જહૉન કરતા વધુ પૈસા છે.

જો દશાંશના સ્થાનોના અંકો એક જ હોય, તો શતાંશના સ્થાને તેની તુલના કરવી.

હવે, ઝડપથી સરખામણી કરો, 35.63 અને 35.67; 20.1 અને 20.01, 19.36 અને 29.36.

પૈસા, લંબાઈ અને વજનના નાના એકમોને તેમના મોટા એકમોમાં રૂપાંતરિત કરતી વખતે દશાંશ સંખ્યાનો ઉપયોગ કરવો જરૂરી છે. ઉદાહરણ તરીકે, 3 પૈસા = ₹ $\frac{3}{100}$ = ₹ 0.03 , 5 ગ્રામ = $\frac{5}{1000}$ કિલોગ્રામ = 0.005 કિલોગ્રામ, 7 સેમી = 0.07 મીટર

લખો : 75 પૈસા = _____ રૂપિયા, 250 ગ્રામ = _____ કિ.ગ્રા 85 સેમી = _____ મીટર

આપણે જાણીએ છીએ કે કેવી રીતે દશાંશોને ઉમેરવા અને બાદ કરવા. 21.36 + 37.35 માટે,

$$\begin{array}{r} 21.36 \\ +\ 37.35 \\ \hline 58.71 \end{array}$$

0.19 + 2.3ની કિંમત શી છે ?

29.35 – 4.56 નો તફાવત

$$\begin{array}{r} 29.35 \\ -\ 04.56 \\ \hline 24.79 \end{array}$$

હવે, 39.87 – 21.98 ની કિંમત શોધો.

સ્વાધ્યાય 2.5

1. કઈ સંખ્યા મોટી છે તે જણાવો :

(i) 0.5 કે 0.05 (ii) 0.7 કે 0.5 (iii) 7 કે 0.7

(iv) 1.37 કે 1.49 (ii) 2.03 કે 2.30 (iii) 0.8 કે 0.88

2. દશાંશનો ઉપયોગ કરીને રૂપિયામાં રૂપાંતર કરો :

(i) 7 પૈસા (ii) 7 રૂપિયા 7 પૈસા (iii) 77 રૂપિયા 77 પૈસા

(iv) 50 પૈસા (v) 235 પૈસા

3. (i) 5 સેમીને મીટર અને કિલોમીટરમાં ફેરવો. (ii) 35 મીમી ને સેમી, મીટર અને કિલોમીટરમાં ફેરવો.

4. કિલોગ્રામમાં દર્શાવો :

   (i) 200 ગ્રામ (ii) 3470 ગ્રામ (iii) 4 કિલોગ્રામ 8 ગ્રામ

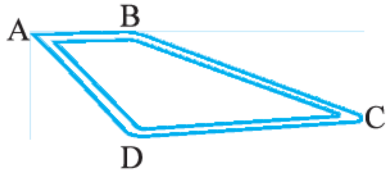
5. નીચે આપેલ દશાંશ સંખ્યાને વિસ્તૃત સ્વરૂપમાં લખો :

   (i) 20.03 (ii) 2.03 (iii) 200.03 (iv) 2.034

6. નીચે આપેલ દશાંશ સંખ્યામાં 2 ની સ્થાનકિંમત લખો :

   (i) 2.56 (ii) 21.37 (iii) 10.25 (iv) 9.42 (v) 63.352

7. દિનેશ સ્થળ A પરથી સ્થળ B તરફ જાય છે અને ત્યાંથી તે સ્થળ C તરફ જાય છે. A નું અંતર B થી 7.5 કિમી છે. B થી C નું અંતર 12.7 કિમી છે અયુબ સ્થળ A પરથી સ્થળ D તરફ જાય છે અને ત્યાંથી તે સ્થળ C તરફ જાય છે. D નું A થી અંતર 9.3 કિમી છે અને C નું D થી અંતર 11.8 કિમી છે, તો કોણ વધુ મુસાફરી કરશે અને કેટલી ?



8. શ્યામ 5 કિલોગ્રામ 300 ગ્રામ સફરજન અને 3 કિલોગ્રામ 250 ગ્રામ કેરી ખરીદે છે. સરલા 4 કિલોગ્રામ 800 ગ્રામ સંતરા અને 4 કિલોગ્રામ 150 ગ્રામ કેળાં ખરીદે છે. કોણે વધુ ફળ ખરીદ્યાં ?

9. 42.6 કિમી કરતાં 28 કિમી કેટલું ઓછું છે ?

2.6 દશાંશ સંખ્યાઓના ગુણાકાર (Multiplication of Decimal Numbers)

રેશમા 8.50 પ્રતિ કિલોગ્રામના ભાવે 1.5 કિલોગ્રામ શાકભાજી ખરીદે છે તો રેશમા કેટલા રૂપિયા ચૂકવશે ? ચોક્કસપણે તે ₹ (8.50×1.50) હશે. 8.5 અને 1.5 એ બંને દશાંશ સંખ્યા છે તેથી એવી પરિસ્થિતિમાં આવ્યા છીએ કે જ્યાં આપણે બે દશાંશ સંખ્યાનો ગુણાકાર કેવી રીતે કરવો તે જાણવાની જરૂર છે. તો ચાલો આપણે બે દશાંશ સંખ્યાનો કેવી રીતે ગુણાકાર કરવો તેના વિશે અભ્યાસ કરીએ.

પહેલાં આપણે 0.1×0.1 શોધીએ.

હવે, $0.1 = \frac{1}{10}$

તેથી, $0.1 \times 0.1 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1 \times 1}{10 \times 10} = \frac{1}{100} = 0.01.$

3MAGFX

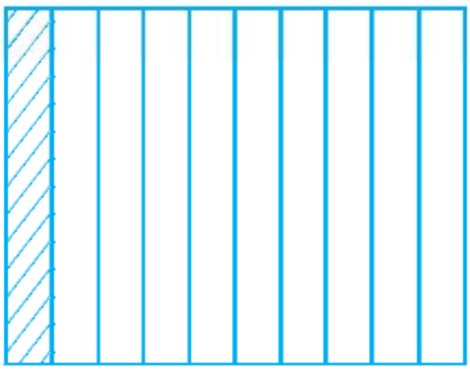
ચાલો, હવે આપણે તેને ચિત્રાત્મક રીતે રજૂ કરીએ. (આકૃતિ 2.13)

અપૂર્ણાંક $\frac{1}{10}$ એ સરખા 10 ભાગમાંથી 1 ભાગ રજૂ કરે છે.

આકૃતિમાંનો છાયાંકિત ભાગ $\frac{1}{10}$ ભાગ રજૂ કરે છે.

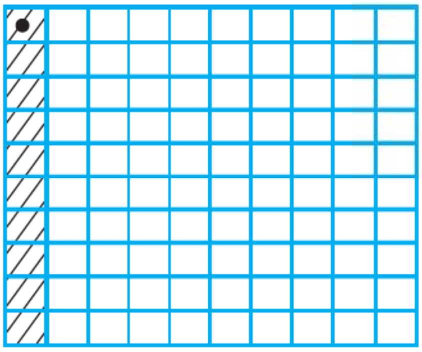
આપણે જાણીએ છીએ કે,

$\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$ નો અર્થ $\frac{1}{10}$ ના $\frac{1}{10}$ થાય. તેથી $\frac{1}{10}$ ભાગના 10 સરખા ભાગ કરી તેનો એક ભાગ લો.



આકૃતિ 2.13

(જુઓ આકૃતિ 2.14)



આકૃતિ 2.14

આમ, આપણી પાસે ટપકું કરેલ ચોરસ એ $\frac{1}{10}$ નો $\frac{1}{10}$ મો ભાગ છે. એ રીતે તે $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$ કે 0.1×0.1. ની રજૂઆત કરે છે. શું ચોરસમાં રહેલ ટપકાંને બીજી કોઈ રીતે દર્શાવી શકાય છે ?

આકૃતિ 2.14 માં આવા કેટલા નાના ચોરસ શોધી શકો છો ?

ત્યાં, 100 નાના ચોરસ છે. **તેથી ટપકું કરેલ ચોરસ** 100 ચોરસમાંનો 1 છે એટલે કે 0.01 છે.

આથી, $0.1 \times 0.1 = 0.01$.

અહીં નોંધ કરો કે 0.1 એ જવાબમાં બે વખત જોવા મળે છે. 0.1 માં દશાંશચિહ્નની જમણી બાજુએ એક અંક છે. 0.01 માં દશાંશચિહ્નની જમણી બાજુએ બે અંકો (એટલે કે 1+1) છે.

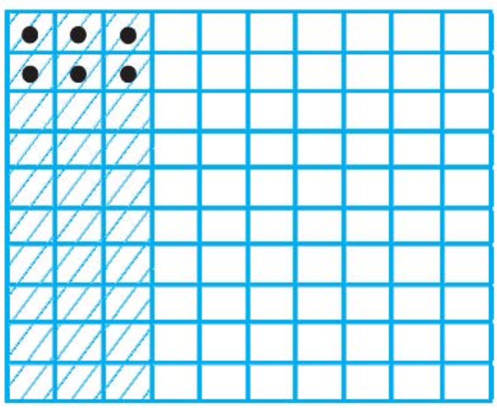
ચાલો, હવે આપણે 0.2×0.3 શોધીએ.

આપણી પાસે, $0.2 \times 0.3 = \frac{2}{10} \times \frac{3}{10}$.

જેમ આપણે $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$ માટે કર્યું તે જ રીતે આપણે $\frac{3}{10}$ મેળવવા માટે ચોરસને 10 સમાન ભાગોમાં વિભાજિત કરીને તેમાંથી 3 સમાન ભાગ લઈએ. ફરીથી, ત્રણ સરખા ભાગોમાંના દરેકને 10 સરખા ભાગોમાં વિભાજિત કરીએ અને તેમાંથી બે ભાગ લઈએ. હવે, આપણને $\frac{2}{10} \times \frac{3}{10}$ મળે છે.

આકૃતિ 2.15 માં ટપકાંવાળા ચોરસ $\frac{2}{10} \times \frac{3}{10}$ અથવા 0.2×0.3 રજૂ કરે છે.

અહીં, 100 માંથી 6 ચોરસ ટપકાંવાળાં છે તેથી તેઓ પણ 0.06 દર્શાવે છે.



આકૃતિ 2.15

આમ, $0.2 \times 0.3 = 0.06$,

અહીં નોંધ લો કે, $2 \times 3 = 6$ અને 0.06માં દશાંશચિહ્નની જમણી બાજુએ અંકોની સંખ્યા 2 $(= 1 + 1)$ છે.

આ નિયમ 0.1×0.1 પર પણ લાગુ પડે છે તે ચકાસો. આ અવલોકનો પરથી 0.2×0.4 શોધો.

0.1×0.1 અને 0.2×0.3 શોધતી વખતે નોધ્યું હશે કે પ્રથમ આપણે તેને દશાંશચિહ્નોને અવગણીને પૂર્ણ સંખ્યા તરીકે ગુણાકાર કર્યો.

તેથી, 0.1×0.1 માં 01×01 અથવા 1×1, તે જ રીતે 0.2×0.3 માં આપણને 02×03 અથવા $2 \times 3 = 6$ મળે.

પછી આપણે જમણી બાજુ છેલ્લે આવેલા અંકથી ડાબી તરફ દશાંશ સ્થળ સુધી બંને સંખ્યામાં આવેલા અંકોની ગણતરી કરીએ. ગણતરીમાં મળેલી સંખ્યા મુજબ સાદા ગુણાકારથી મળેલ જવાબમાં જમણી બાજુથી શરૂ કરીને તેટલા દશાંશ સ્થળ ગણીને દશાંશચિહ્ન મૂકવું.

ચાલો હવે, 1.2×2.5 શોધીએ,

12 અને 25 નો ગુણાકાર કરતાં 300 મળે છે. 1.2 અને 2.5 બંનેમાં દશાંશચિહ્નની જમણી બાજુ 1 અંક છે. તેથી 300 માં જમણા અંક(એટલે કે 0)થી $1 + 1 = 2$ અંકોની ગણતરી કરીએ અને ડાબી તરફ બે અંક ખસીને દશાંશચિહ્ન મૂકતાં 3.00 અથવા 3 મળશે.

તે જ રીતે, 1.5×1.6, 2.4×4.2 શોધો.

2.5 અને 1.25નો ગુણાકાર કરતી વખતે પ્રથમ 25 અને 125 નો ગુણાકાર કરો ત્યારબાદ ગુણનફળમાં દશાંશ ચિહ્ન મૂકવા માટે તમે જમણી બાજુના છેલ્લા અંકથી $1 + 2 = 3$ (કેવી રીતે ?) અંક ડાબી તરફ ખસી ત્યાં દશાંશ ચિહ્ન મૂકવું. આમ, $0.5 \times 1.25 = 3.225$.

શોધો : 2.7×1.35.

પ્રયત્ન કરો

1. શોધો : (i) 2.7×4 (ii) 1.8×1.2 (iii) 2.3×4.35
2. પ્રશ્ન 1ના મળેલ જવાબને ઊતરતા ક્રમમાં ગોઠવો.

ઉદાહરણ 7 સમભુજ (સમબાજુ) ત્રિકોણની બાજુની લંબાઈ 3.5 સેમી છે. તો તેની પરિમિતિ શોધો.

ઉકેલ સમભુજ ત્રિકોણની તમામ બાજુઓ સરખી હોય છે, તેથી દરેક બાજુની લંબાઈ 3.5 સેમી થાય,

આમ, પરિમિતિ $= 3 \times 3.5$ સેમી

$= 10.5$ સેમી

ઉદાહરણ 8 એક લંબચોરસની લંબાઈ 7.1 સેમી છે. અને તેની પહોળાઈ 2.5 સેમી છે. તો એ લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ લંબચોરસની લંબાઈ = 7.1 સેમી

લંબચોરસની પહોળાઈ = 2.5 સેમી

તેથી, લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ $= 7.1 \times 2.5$ સેમી^{2}

$= 17.75$ સેમી^{2}

2.6.1 દશાંશ સંખ્યાના 10, 100, 1000 વડે ગુણાકાર

રેશમાએ અવલોકન કર્યું, $2.3 = \frac{23}{10}$ થાય. જ્યારે, $2.35 = \frac{235}{100}$ થાય.

આમ, તેણે તેના આધારે નક્કી કર્યું કે દશાંશચિહ્નની સ્થિતિ પરથી દશાંશ સંખ્યા 10 અથવા 100 છેદ સાથે અપૂર્ણાંકમાં ફેરવી શકાય છે.

દશાંશ સંખ્યાને 10 અથવા 100 અથવા 1000 વડે ગુણવામાં આવે તો શું થાય ?

ચાલો, આપણે 10 કે 100 અથવા 1000 વડે ગુણાકારની રીત શોધીએ.

નીચે આપેલ કોષ્ટકને જુઓ અને ખાલી જગ્યા ભરો :

$1.76 \times 10 = \frac{176}{100} \times 10 = 17.6$	$2.35 \times 10 =$ ____	$12.356 \times 10 =$ ____
$1.76 \times 100 = \frac{176}{100} \times 100 = 176$ અથવા 176.0	$2.35 \times 100 =$ ____	$12.356 \times 100 =$ ____
$1.76 \times 1000 = \frac{176}{100} \times 1000 = 1760$ અથવા 1760. 0	$2.35 \times 1000 =$ ____	$12.356 \times 1000 =$ ____
$0.5 \times 10 = \frac{5}{10} \times 10 = 5$; $0.5 \times 100 =$ ____ ; $0.5 \times 1000 =$ ____		

ઉપર બતાવેલ કોષ્ટકમાં દશાંશચિહ્નનું અવલોકન કરો. અહીં, સંખ્યાઓનો 10, 100 અને 1000 થી ગુણાકાર થાય છે. $1.76 \times 10 = 17.6$ અહીં અંકો સરખા છે એટલે કે, 1, 7 અને 6. શું આવું તમે બીજા ગુણાકારમાં પણ જોયું ? 1.76 અને 17.6. નું અવલોકન કરો. કઈ બાજુએ દશાંશચિહ્ન સ્થાનાંતરિત થાય છે, જમણી કે ડાબી બાજુએ ? અહીં દશાંશચિહ્ન એક સ્થાન જમણે ખસેડાય છે. નોંધ લો કે, 10માં 1ની પાછળ એક શૂન્ય છે.

$1.76 \times 100 = 176.0$ માં 1.76 અને 176.0 નું અવલોકન કરો. કઈ બાજુએ અને કેટલા અંક દશાંશ ચિહ્ન ખસેડાય છે ? દશાંશચિહ્ન જમણી બાજુએ બે સ્થળ ખસેડાય છે. અહીં નોંધ લો કે, 100 માં 1 પછી બે શૂન્યો છે.

શું તમે અન્ય ગુણાકારમાં પણ આવું જ અવલોકન કરો છો ? તેથી, આપણે કહીએ છીએ જ્યારે દશાંશ સંખ્યાનો 10, 100 અથવા 1000 વડે ગુણાકાર કરવામાં આવે છે, ત્યારે અંકો એના એ જ હોય છે. પરંતુ ગુણાકારના જવાબમાં દશાંશચિહ્ન 1 (એક)ની પાછળ જેટલાં શૂન્ય હોય તેટલાં સ્થાન જમણી બાજુએ ખસે છે.

આ અવલોકનો પરથી આપણે કહી શકીએ,

$0.07 \times 10 = 0.7, 0.07 \times 100 = 7$ અને $0.07 \times 1000 = 70$

શું તમે કહી શકો છો કે, $2.97 \times 10 = ?$ $2.97 \times 100 = ?$

$2.97 \times 1000 = ?$

પ્રયત્ન કરો

શોધો : (i) 0.3×10

(ii) 1.2×100

(iii) 56.3×1000

શું તમે રેશમાને કુલ રકમ શોધવામાં મદદ કરશો ? તેણે ₹ 8.50×1.50 ચૂકવવાના છે.

સ્વાધ્યાય 2.6

1. શોધો :
   (i) 0.2×6 (ii) 8×4.6 (iii) 2.71×5 (iv) 20.1×4
   (v) 0.05×7 (vi) 211.02×4 (vii) 2×0.86
2. લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ શોધો જેની લંબાઈ 5.7 સેમી અને પહોળાઈ 3 સેમી છે.
3. શોધો :
   (i) 1.3×10 (ii) 36.8×10 (iii) 153.7×10 (iv) 168.07×10
   (v) 31.1×100 (vi) 156.1×100 (vii) 3.62×100 (viii) 43.07×100
   (ix) 0.5×10 (x) 0.08×10 (xi) 0.9×100 (xii) 0.03×1000
4. એક મોટરસાઈકલ 1 લિટર પેટ્રોલમાં 55.3 કિમી અંતર કાપે છે, તો તે 10 લિટર પેટ્રોલમાં કેટલું અંતર કાપશે ?
5. શોધો :
   (i) 2.5×0.3 (ii) 0.1×51.7 (iii) 0.2×316.8 (iv) 1.3×3.1
   (v) 0.5×0.05 (vi) 11.2×0.15 (vii) 1.07×0.02
   (viii) 10.05×1.05 (ix) 101.01×0.01 (x) 100.01×1.1

2.7 દશાંશ સંખ્યાઓના ભાગાકાર (Division of Decimal Numbers)

3MJCHK

સવિતા તેના વર્ગખંડની સજાવટ માટે ડિઝાઈન તૈયાર કરી રહી હતી. તે માટે તેને 1.9 સેમી લંબાઈવાળી રંગીન પેપર પટ્ટીઓ જોઈએ. તેની પાસે 9.5 સેમી લંબાઈની રંગીન પેપરપટ્ટી છે. તેને પટ્ટીમાંથી જરૂરી લંબાઈના કેટલા ટુકડા મળશે ? તે વિચારે છે કે $\frac{9.5}{1.9}$ હોઈ શકે. શું તે સાચી છે ? 9.5 અને 1.9 બન્ને દશાંશ સંખ્યા છે. તો આપણે જાણવાની જરૂર છે કે દશાંશ સંખ્યાઓનો ભાગાકાર પણ થાય છે !

2.7.1 10, 100 અને 1000 વડે ભાગાકાર (Division by 10, 100 and 1000)

તો ચાલો આપણે 10, 100, 1000 વડે દશાંશ સંખ્યાઓનો ભાગાકાર કરીએ.

વિચારીએ $31.5 \div 10$

$$31.5 \div 10 = \frac{315}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{315}{100} = 3.15$$

એ જ રીતે, $31.5 \div 100 = \frac{315}{10} \times \frac{1}{100} = \frac{315}{1000} = 0.315$

ચાલો, આપણે સંખ્યાને 10, 100, 1000 વડે ભાગાકાર કરવાની પેટર્ન શોધીએ. એ આપણને 10, 100, 1000 વડે ભાગવાની ટૂંકી રીત શોધવામાં મદદરૂપ થઈ શકે.

$31.5 \div 10 = 3.15$	$231.5 \div 10 =$ ____	$1.5 \div 10 =$ ____	$29.36 \div 10 =$ ____
$31.5 \div 100 = 0.315$	$231.5 \div 100 =$ ____	$1.5 \div 100 =$ ____	$29.36 \div 100 =$ ____
$31.5 \div 1000 = 0.0315$	$231.5 \div 1000 =$ ____	$1.5 \div 1000 =$ ____	$29.36 \div 1000 =$ ____

$31.5 \div 10 = 3.15$ લો. અહીં 31.5 અને 3.15 માં આંકડાઓ સમાન છે જેમ કે, 3, 1 અને 5 પણ ભાગફળમાં દશાંશચિહ્ન બદલાય છે. કઈ બાજુ અને કેટલા અંક ? અહીં દશાંશચિહ્ન એક સ્થાન ડાબી તરફ ખસે છે. નોંધો કે 10 માં એક શૂન્ય છે.

પ્રયત્ન કરો

શોધો : (i) $235.4 \div 10$
(ii) $235.4 \div 100$
(iii) $235.4 \div 1000$

હવે ધ્યાનમાં લો $31.5 \div 100 = 0.315$, 31.5 અને 0.315 માં આંકડાઓ સમાન છે પણ ભાગફળમાં દશાંશ બિંદુ વિશે શું છે ? તે બે સ્થળ ડાબી બાજુએ ખસેડાયું છે. નોંધ લો કે 100 માં 1 ની પાછળ બે શૂન્ય છે.

તો આપણે કહી શકીએ કે **જ્યારે આપણે 10, 100 કે 1000 વડે ભાગાકાર કરતી વખતે સંખ્યાના અને ભાગફળના આંકડા સમાન હોય છે. પણ ભાગફળમાં દશાંશચિહ્ન ડાબી બાજુએ 1 પછી જેટલાં શૂન્ય છે તેટલાં સ્થાન ખસે છે.** તો ચાલો આપણે આ અવલોકનનો ઉપયોગ કરી ઝડપથી શોધીએ. $2.38 \div 10 = 0.238$, $2.38 \div 100 = 0.0238$, $2.38 \div 1000 = 0.00238$.

પ્રયત્ન કરો

શોધો : (i) $35.7 \div 3 = ?$
(ii) $25.5 \div 3 = ?$

2.7.2 દશાંશ સંખ્યાનો પૂર્ણ સંખ્યા વડે ભાગાકાર (Division of a Desimal number by a whole number)

ચાલો આપણે $\frac{6.4}{2}$ શોધીએ. યાદ રાખો આ પ્રક્રિયાને આપણે $6.4 \div 2$ની રીતે પણ લખી શકીએ.

તેથી, $6.4 \div 2 = \frac{64}{10} \div 2 = \frac{64}{10} \times \frac{1}{2}$ ('અપૂર્ણાંક'માં શીખ્યા મુજબ)

$$= \frac{64 \times 1}{10 \times 2} = \frac{1 \times 64}{10 \times 2} = \frac{1}{10} \times \frac{64}{2} = \frac{1}{10} \times 32 = \frac{32}{10} = 3.2$$

અથવા પહેલા 64 ને 2 વડે ભાગો તો 32 મળે છે. 6.4માં દશાંશચિહ્નની જમણી બાજુએ એક અંક છે. હવે 32 માં એવી રીતે દશાંશચિહ્ન મૂકો કે જેથી તેની જમણી બાજુ એક અંક હોય. આમ આપણને 3.2 મળશે.

$19.5 \div 5$ શોધવા માટે સૌ પ્રથમ $195 \div 5$ શોધવું. આપણને 39 મળે છે. 19.5માં દશાંશચિહ્નની જમણી બાજુએ એક અંક છે. હવે 39 માં પણ એવી રીતે દશાંશચિહ્ન મૂકીએ કે જેથી તેની જમણી બાજુએ એક અંક હોય. આપણને 3.9 મળશે.

પ્રયત્ન કરો

શોધો : (i) $43.15 \div 5 = ?$;
(ii) $82.44 \div 6 = ?$

હવે, $12.96 \div 4 = \frac{1296}{100} \div 4 = \frac{1296}{100} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{100} \times \frac{1296}{4} = \frac{1}{100} \times 324 = 3.24$

અથવા 1296ને 4 વડે ભાગતાં, આપણને 324 મળે છે. આથી 12.96 માં દશાંશચિહ્નની જમણી બાજુ બે અંક છે, તેથી 324માં એવી રીતે દશાંશચિહ્ન મૂકીએ કે જેથી દશાંશ પછી બે અંક હોય. આપણને 3.24 મળે છે.

યાદ રાખો કે હવે બીજા વિભાગમાં આપણે માત્ર એવા ભાગાકાર લઈશું કે જેમાં દશાંશચિહ્ન અવગણીને ભાગાકાર કરતાં શેષ શૂન્ય મળતી હોય. જેમ કે $19.5 \div 5$ નું પરિણામ મેળવવા 195 ને 5 વડે ભાગીશું, છેલ્લે શેષ શૂન્ય મળશે.

જો કે એવું સંભવ છે કે એક સંખ્યા, બીજી સંખ્યા વડે વિભાજ્ય ન પણ હોય એટલે કે શેષ શૂન્ય મળે જ નહિ. દા.ત. $195 \div 7$. આવા ભાગાકાર અંગે હવે પછીના ધોરણમાં વિચારીશું.

પ્રયત્ન કરો

શોધો : (i) $15.5 \div 5$
(ii) $126.35 \div 7$

ઉદાહરણ 9 4.2, 3.8 અને 7.6 ની સરેરાશ શોધો.

જવાબો 4.2, 3.8 અને 7.6 ની સરેરાશ = $\frac{4.2+3.8+7.6}{3} = \frac{15.6}{3} = 5.2$

2.7.3 દશાંશ સંખ્યાનો બીજી દશાંશ સંખ્યા સાથેનો ભાગાકાર

ચાલો, આપણે $\frac{25.5}{0.5}$ શોધીએ એટલે કે, $25.5 \div 0.5$

આપણી પાસે, $25.5 \div 0.5 = \frac{255}{10} \div \frac{5}{10} = \frac{255}{10} \times \frac{10}{5} = 51$. આમ, $25.5 \div 0.5 = 51$

તમે શું અવલોકન કર્યું ? $\frac{25.5}{0.5}$ માટે આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, 25.5 અને 0.5 બંનેમાં દશાંશચિહ્ન પછી એક અંક છે તેથી બંનેનું અપૂર્ણાંકમાં રૂપાંતર કરતાં દરેકના છેદમાં 10 આવશે. 10 ને 10 વડે ભાગતાં 1 આવે અને 255 ને 5 વડે ભાગતાં 51 આવે.

અથવા બંનેમાં દશાંશચિહ્ન જમણી તરફ એક સ્થળ ખસેડતાં $\frac{255}{5} = 51$ મળે.

આમ, $22.5 \div 1.5 = \frac{22.5}{1.5} = \frac{225}{15} = 15$

એ જ રીતે $\frac{20.3}{0.7}$ અને $\frac{15.2}{0.8}$ શોધો.

પ્રયત્ન કરો

શોધો : (i) $\frac{7.75}{0.25}$ (ii) $\frac{42.8}{0.02}$ (iii) $\frac{5.6}{1.4}$

ચાલો આપણે $20.55 \div 1.5$ શોધીએ

ઉપર ચર્ચા કર્યા મુજબ આપણે એને આ રીતે લખી શકીએ $205.5 \div 15$ અને આપણને 13.7 મળશે.

શોધો $\frac{3.96}{0.4}$, $\frac{2.31}{0.3}$

હવે, ધ્યાનમાં લો કે $\frac{33.725}{0.25}$ ને આપણે $\frac{3372.5}{25}$ લખી શકીએ છીએ (કેમ ?) અને ભાગફળરૂપે આપણને 134.9 મળે. આપણે $\frac{27}{0.03}$ ને કેવી રીતે ગણીશું ? આપણે જાણીએ છીએ કે 27 ને 27.00 ના સ્વરૂપમાં લખી શકાય.

તેથી, $\frac{27}{0.03} = \frac{27.00}{0.03} = \frac{2700}{3} = 900$

ઉદાહરણ 10 નિયમિત બહુકોણની દરેક બાજુની લંબાઈ 2.5 સેમી છે. બહુકોણની પરિમિતિ 12.5 સેમી છે, તો બહુકોણ કેટલી બાજુઓ ધરાવે છે ?

જવાબ નિયમિત બહુકોણની પરિમિતિ એ તેની તમામ બાજુઓની લંબાઈનો સરવાળો = 12.5 સેમી છે. દરેક બાજુની લંબાઈ 2.5 સેમી છે. આમ, બાજુઓની સંખ્યા $= \frac{12.5}{2.5} = \frac{125}{25} = 5$

$\therefore$ બહુકોણને પાંચ બાજુઓ છે.

ઉદાહરણ 11 એક કાર 2.2 કલાકમાં 89.1 કિલોમીટરનું અંતર કાપે છે, તો તેણે 1 કલાકમાં સરેરાશ કેટલું અંતર કાપ્યું કહેવાય ?

જવાબ કાર દ્વારા કપાતું અંતર = 89.1 કિમી.

આ અંતર કાપવા માટે જોઈતો સમય = 2.2 કલાક

તેથી, 1 કલાકમાં કપાતું અંતર = $\frac{89.1}{2.2} = \frac{891}{22}$ = 40.5 કિમી.

સ્વાધ્યાય 2.7

1. શોધો :
   (i) $0.4 \div 2$ (ii) $0.35 \div 5$ (iii) $2.48 \div 4$ (iv) $65.4 \div 6$
   (v) $651.2 \div 4$ (vi) $14.49 \div 7$ (vii) $3.96 \div 4$ (viii) $0.80 \div 5$
2. શોધો :
   (i) $4.8 \div 10$ (ii) $52.5 \div 10$ (iii) $0.7 \div 10$ (iv) $33.1 \div 10$
   (v) $272.23 \div 10$ (vi) $0.56 \div 10$ (vii) $3.97 \div 10$
3. શોધો :
   (i) $2.7 \div 100$ (ii) $0.3 \div 100$ (iii) $0.78 \div 100$
   (iv) $432.6 \div 100$ (v) $23.6 \div 100$ (vi) $98.53 \div 100$
4. શોધો :
   (i) $7.9 \div 1000$ (ii) $26.3 \div 1000$ (iii) $38.53 \div 1000$
   (iv) $128.9 \div 1000$ (v) $0.5 \div 1000$
5. શોધો :
   (i) $7 \div 3.5$ (ii) $36 \div 0.2$ (iii) $3.25 \div 0.5$ (iv) $30.94 \div 0.7$
   (v) $0.5 \div 0.25$ (vi) $7.75 \div 0.25$ (vii) $76.5 \div 0.15$ (viii) $37.8 \div 1.4$
   (ix) $2.73 \div 1.3$
6. એક વાહન 2.4 લિટર પેટ્રોલમાં 43.2 કિમીનું અંતર કાપે છે, તો 1 લિટર પેટ્રોલમાં તે વાહન દ્વારા કેટલું અંતર કપાયું હશે ?

આપણે શી ચર્ચા કરી ?

1. આપણે આગળના ધોરણમાં ભણ્યાં એ મુજબ અપૂર્ણાંક અને દશાંશ અપૂર્ણાંકોનાં સરવાળો અને બાદબાકી શીખ્યાં.
2. હવે આપણે અપૂર્ણાંકો અને દશાંશ અપૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર અને ભાગાકાર શીખ્યા.
3. આપણે અપૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર શીખી ગયાં છીએ. બે અપૂર્ણાંકોના ગુણાકારમાં અંશનો ગુણાકાર અંશ સાથે અને છેદનો ગુણાકાર છેદ સાથે કરવામાં આવે છે જેને નીચે મુજબ લખી શકાય.

   $\frac{\text{અંશનો ગુણાકાર}}{\text{છેદનો ગુણાકાર}}$ ઉદાહરણ તરીકે, $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{10}{21}$

4. અપૂર્ણાંક એ ‘‘નો ભાગ’’ ના જેવું કામ કરે છે જેમ કે, 2ના $\frac{1}{2}$ એટલે કે, $2 \times \frac{1}{2} = 1$.

5. (a) બે શુદ્ધ અપૂર્ણાંકનો ગુણાકાર બંને અપૂર્ણાંકો કરતાં ઓછો હોય છે.
   (b) શુદ્ધ અને અશુદ્ધ અપૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર અશુદ્ધ અપૂર્ણાંક કરતાં ઓછો અને શુદ્ધ અપૂર્ણાંક કરતાં વધારે હોય છે.
   (c) બે અશુદ્ધ અપૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર બંને અપૂર્ણાંક કરતાં વધારે હોય છે.
6. અપૂર્ણાંકનો વ્યસ્ત અંશ અને છેદને ઉલટાવતાં મળે છે.
7. આપણે બે અપૂર્ણાંકોના ભાગાકાર કેવી રીતે થાય તે જોયું.
   (a) પૂર્ણ સંખ્યાને અપૂર્ણાંક વડે ભાગવા માટે તે પૂર્ણ સંખ્યાને અપૂર્ણાંકના વ્યસ્ત વડે ગુણવી પડે.
   દાખલા તરીકે, $2 \div \frac{3}{5} = 2 \times \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$
   (b) અપૂર્ણાંકને પૂર્ણ સંખ્યા વડે ભાગવા માટે અપૂર્ણાંકને પૂર્ણ સંખ્યાના વ્યસ્ત સાથે ગુણવું પડે.
   દાખલા તરીકે, $\frac{2}{3} \div 7 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{7} = \frac{2}{21}$
   (c) જ્યારે અપૂર્ણાંકને બીજા અપૂર્ણાંક વડે ભાગવાના હોય ત્યારે પહેલા અપૂર્ણાંકને બીજા અપૂર્ણાંકના વ્યસ્ત સાથે ગુણવું પડે.
   દાખલા તરીકે, $\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$
8. આપણે એ પણ જોયું કે દશાંશ સંખ્યાનો ગુણાકાર કેવી રીતે થાય. આ ગુણાકાર કરવા માટે પહેલા દશાંશ ચિહ્ન અવગણીને સંખ્યાઓનો ગુણાકાર કરો અને પછી કુલ દશાંશ સ્થાન ગણીને, ગુણાકાર પણ તેટલા જ દશાંશ સ્થળ વાળો બને, તેમ દશાંશચિહ્ન મૂકી દો.
   દાખલા તરીકે, $0.5 \times 0.7 = 0.35$.
9. દશાંશ સંખ્યાને 10, 100 અને 1000 વડે ગુણવા માટે દશાંશચિહ્નને 1ની પાછળ જેટલાં શૂન્ય છે તેટલાં સ્થાન જમણી બાજુ ખસેડો.
   આમ, $0.53 \times 10 = 5.3$, $0.53 \times 100 = 53$, $0.53 \times 1000 = 530$.
10. આપણે એ પણ જોયું કે દશાંશ સંખ્યાને કેવી રીતે ભાગી શકાય.
   (a) દશાંશ સંખ્યાને પૂર્ણ સંખ્યા વડે ભાગવા માટે દશાંશચિહ્ન અવગણી પહેલા ભાગાકાર કરો. પછી ભાજ્યમાં દશાંશચિહ્ન પછી જેટલા અંક હોય તેટલા જ અંક ભાગફળમાં પણ હોય એ રીતે ભાગફળમાં દશાંશચિહ્ન મૂકો.
   દાખલા તરીકે, $8.4 \div 4 = 2.1$
   અહીં આપણે શેષ શૂન્ય હોય તેવા ભાગાકારનો વિચાર કરીએ છીએ.
   (b) દશાંશ સંખ્યાને 10, 100 અને 1000 વડે ભાગવા માટે દશાંશચિહ્નને 1ની પાછળ જેટલાં શૂન્ય છે તેટલાં સ્થાન ડાબી બાજુ ખસેડો.
   આમ, $23.9 \div 10 = 2.39$, $23.9 \div 100 = 0.239$, $23.9 \div 1000 = 0.0239$.
   (c) બે દશાંશ સંખ્યાનો ભાગાકાર કરવા માટે ભાજકને પૂર્ણ સંખ્યામાં ફેરવવા માટે દશાંશ ચિહ્નને જેટલા સ્થાન જમણી તરફ ખસેડવું પડે તેટલા જ સ્થાન ભાજ્ય અને ભાજક બંનેમાં ખસેડો (જેથી છેદ પૂર્ણ સંખ્યા બને) હવે (a) પ્રમાણે જવાબ મેળવો. દા.ત., $2.4 \div 0.2 = 24 \div 2 = 12$.

પ્રકરણ 3

માહિતીનું નિયમન

D2LWFZ

3.1 પ્રસ્તાવના

આગળના ધોરણમાં તમે વિવિધ પ્રકારની માહિતી સાથે કામ કર્યું. તમે માહિતીને એકઠી કરવાનું, તેને કોષ્ટકમાં ગોઠવવાનું અને લંબઆલેખ દર્શાવવાનું શીખ્યાં. માહિતીનો સંગ્રહ, આલેખન અને રજૂઆત આપણા અનુભવને સંગઠિત કરી અને પરિણામ તારવવામાં આપણી મદદ કરે છે. આ પ્રકરણમાં તે કેવી રીતે કરી શકાય તે શીખવા તરફ આપણે એક પગલું આગળ વધીશું. તમારી સામે અમુક જુદા પ્રકારની માહિતી અને આલેખ આવશે. તમે સમાચારપત્રો, સામયિકો, ટેલિવિઝન અને બીજાં સ્રોત દ્વારા જુદા-જુદા પ્રકારની માહિતી જોઈ હશે. તમે એ પણ જાણો છો કે બધી માહિતી આપણને કોઈક પ્રકારની સૂચના અવશ્ય આપે છે. ચાલો આપણે માહિતીનાં કેટલાંક એવાં ઉદાહરણો જોઈએ જે આપણી સામે આવે છે.

કોષ્ટક 3.1

શહેરોનું તાપમાન 20-06-2006નું		
શહેર	**મહત્તમ**	**લઘુત્તમ**
અમદાવાદ	38°C	29°C
અમૃતસર	37°C	26°C
બૅંગ્લુરુ	28°C	21°C
ચેન્નાઈ	36°C	27°C
દિલ્હી	38°C	28°C
જયપુર	39°C	29°C
જમ્મુ	41°C	26°C
મુંબઈ	32°C	27°C

કોષ્ટક 3.2

ફૂટબૉલ વર્લ્ડકપ 2006	
યુક્રેને સાઉદી અરબને હરાવ્યું	4 - 0
સ્પેને ટ્યુનિશિયાને હરાવ્યું	3 - 1
સ્વિટ્ઝર્લૅન્ડે ટોગોને હરાવ્યું	2 - 0

કોષ્ટક 3.3

એક વર્ગમાં અઠવાડિયા દરમિયાન ગેરહાજર રહેનારની માહિતી	
સોમવાર	
મંગળવાર	
બુધવાર	–
ગુરુવાર	
શુક્રવાર	
શનિવાર	
	એક વિદ્યાર્થી દર્શાવે છે.

માહિતીનો સંગ્રહ આપણને શું દર્શાવે છે ?

ઉદાહરણ પરથી તમે એ કહી શકો કે 20-6-2006 ના દિવસે જમ્મુનું તાપમાન બીજા શહેરો કરતાં મહત્તમ હતું. (કોષ્ટક 3.1) અને આપણે કહી શકીએ કે બુધવારે કોઈ પણ વિદ્યાર્થી ગેરહાજર ન હતો. (કોષ્ટક 3.3)

શું આપણે આ માહિતીને બીજી કોઈ રીતે પણ સંગઠિત કે રજૂ કરી શકીએ કે જેથી તેનાં વિશ્લેષણ અને અર્થઘટન વધુ સારી રીતે કરી શકાય ? આ પ્રકરણમાં આપણે આ પ્રકારના પ્રશ્નોની ચર્ચા કરીશું.

3.2 માહિતીનો સંગ્રહ (Collecting Data)

3HT8J8

શહેરોનું તાપમાન દર્શાવતી માહિતી (કોષ્ટક 3.1) આપણને ઘણી બાબતો બતાવી શકે છે, પરંતુ આ માહિતી આપણને એ નથી બતાવી શકતી કે આખા વર્ષ દરમિયાન કયા શહેરનું તાપમાન સૌથી વધારે હતું ? આ જાણવા માટે આપણે આ શહેરોમાંથી દરેક શહેરનું સમગ્ર વર્ષ દરમિયાન નોંધવામાં આવેલ મહત્તમ તાપમાન સંબંધિત માહિતી એકઠી કરવી પડે. આ સ્થિતિમાં કોષ્ટક 3.1માં આપેલ વર્ષના કોઈ એક ચોક્કસ દિવસના તાપમાનનો ચાર્ટ પૂરતો નથી.

તેનાથી એ દેખાઈ આવે છે કે કદાચ એકઠી કરેલી માહિતીનો સંગ્રહ આપણને તેના સંબંધિત કોઈ વિશિષ્ટ સૂચના આપી શકે નહિ. તેના માટે આપણે તે વિશિષ્ટ સૂચનાને ધ્યાનમાં રાખીને માહિતીનું એકત્રીકરણ કરવાની જરૂર છે. ઉપરની સ્થિતિમાં આપણને જે વિશિષ્ટ માહિતી જોઈએ તે એ હતી કે સમગ્ર વર્ષ દરમિયાન આ શહેરોનું મહત્તમ તાપમાન શું રહ્યું ? જે આપણને કોષ્ટક 3.1માંથી મળતી નથી.

આ રીતે, **માહિતીનું એકત્રીકરણ કરતાં પહેલાં આપણે એ જાણવું જરૂરી છે કે આપણે તેનો ઉપયોગ શાના માટે કરીશું ?**

નીચે કેટલીક સ્થિતિઓ આપવામાં આવી છે. તેનો અભ્યાસ કરો.

- ગણિતમાં તમારા વર્ગનો દેખાવ
- ફૂટબૉલ અથવા ક્રિકેટમાં ભારતનો દેખાવ
- આપેલ પ્રદેશમાં મહિલા સાક્ષરતાનો દર
- આપની આસપાસનાં કુટુંબોમાં 5 વર્ષથી ઓછી ઉંમરનાં બાળકોની સંખ્યા

ઉપરની સ્થિતિમાં તમારે કયા પ્રકારની માહિતીની જરૂર છે ? જ્યાં સુધી તમે યોગ્ય માહિતી એકઠી નહીં કરો ત્યાં સુધી તમારે જે જોઈએ છે એ પ્રમાણેની જાણકારી પ્રાપ્ત નહીં કરી શકો. દરેક અંગે યોગ્ય માહિતી શી છે ?

તમારા મિત્રો સાથે ચર્ચા કરો અને શોધી કાઢો કે દરેક સ્થિતિમાં કયા પ્રકારની માહિતીની આવશ્યકતા છે. કેટલીક માહિતી ભેગી કરવી સરળ છે અને કેટલીકને ભેગી કરવી મુશ્કેલ છે.

3.3 માહિતીની ગોઠવણી (Organisation of Data)

જ્યારે આપણે માહિતીને એકઠી કરીએ છીએ ત્યારે આપણે તેને નોંધીએ છીએ અને ગોઠવીએ છીએ. આપણને એવું કરવાની શી જરૂર છે ? નીચેનું ઉદાહરણ ચકાસો. વર્ગ શિક્ષિકા, કુ.નીલમ એ જાણવા માગતાં હતાં કે અંગ્રેજી વિષયમાં વિદ્યાર્થીઓનો દેખાવ કેવો રહ્યો ? વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગુણ તેમણે નીચે પ્રમાણે લખ્યા :

23, 35, 48, 30, 25, 46, 13, 27, 32, 38

આ રીતે આપેલા ગુણ સમજવા માટે સરળ નથી. તેમને એ પણ સમજ ન પડી કે વિદ્યાર્થીઓ અંગેની તેમની છાપ અને વિદ્યાર્થીઓનો દેખાવ સુસંગત હતા કે નહીં.

કુ. નીલમબહેનને તેમના એક સહ કર્મચારીએ માહિતીને નીચેના સ્વરૂપમાં ગોઠવવામાં તેને મદદ કરી. (કોષ્ટક 3.4)

કોષ્ટક 3.4

રોલ નંબર	નામ	50 માંથી મેળવેલ ગુણ	રોલ નંબર	નામ	50માંથી મેળવેલ ગુણ
1	અજય	23	6	ગોવિંદ	46
2	અરમાન	35	7	જય	13
3	આશિષ	48	8	કવિતા	27
4	દીપ્તિ	30	9	મનિષા	32
5	ફૈઝાન	25	10	નીરજ	38

આ ઉપરથી કયા વિદ્યાર્થીએ કેટલા ગુણ પ્રાપ્ત કર્યા છે તે કુ. નીલમબહેન સમજી શક્યાં. પરંતુ તેમને કંઈક વધુ માહિતી જાણવી હતી. દીપિકાએ આ માહિતીને બીજી રીતે ગોઠવવાની અલગ રીત દર્શાવી. (કોષ્ટક 3.5)

કોષ્ટક 3.5

રોલ નંબર	નામ	50માંથી મેળવેલ ગુણ	રોલ નંબર	નામ	50માંથી મેળવેલ ગુણ
3	આશિષ	48	4	દીપ્તિ	30
6	ગોવિંદ	46	8	કવિતા	27
10	નીરજ	38	5	ફૈઝાન	25
2	અરમાન	35	1	અજય	23
9	મનીષા	32	7	જય	13

હવે નીલમ માટે એ જાણવું સરળ બની ગયું કે કોણે સૌથી સારો દેખાવ કર્યો છે અને કોને મદદની જરૂર છે.

આપણી સામે આવતી અનેક માહિતી કોષ્ટકસ્વરૂપમાં હોય છે. આપણી શાળાનું રજિસ્ટર, પ્રગતિ અહેવાલ, પાઠ્યપુસ્તકમાં અનુક્રમણિકા, તાપમાનના આંકડા અને બીજી ઘણી માહિતી આ કોષ્ટકસ્વરૂપમાં હોય છે. શું તમે એવી વધારે માહિતી વિચારી શકશો કે જે કોષ્ટકસ્વરૂપમાં હોય ?

જ્યારે આપણે માહિતીને યોગ્ય કોષ્ટકમાં ગોઠવીએ છીએ ત્યારે તેને સમજવી અને તેનું અર્થઘટન કરવું સરળ બને છે.

પ્રયત્ન કરો

તમારી શાળાના ઓછામાં ઓછા 20 વિદ્યાર્થીઓ(છોકરાઓ અને છોકરીઓ)નું વજન (કિલોગ્રામમાં) કરો. મળેલી માહિતીને ગોઠવો અને નીચે આપેલા પ્રશ્નના જવાબ માહિતીને આધારે આપો.

(i) બધાંમાં સૌથી વધુ વજન કોનું છે ? (ii) સૌથી વધુ વખત આવતું હોય તેવું વજન કયું ?

(iii) તમારા અને તમારા ખાસ મિત્રના વજનમાં શું તફાવત છે ?

3.4 પ્રતિનિધિ મૂલ્યો (Representative Values)

તમે **સરેરાશ** શબ્દથી પરિચિત હશો જ તથા તમારા રોજિંદા જીવનમાં **સરેરાશ** શબ્દ સાથે સંકળાયેલ નીચે લખેલા વિધાનો ચોક્કસ સાંભળ્યાં કે વાંચ્યાં હશે :

- ઈશા દરરોજ સરેરાશ 5 કલાકનો સમય પોતાના અભ્યાસ માટે ફાળવે છે.

- વર્ષના આ સમય દરમ્યાન સરેરાશ તાપમાન 40 ડિગ્રી સેલ્સિયસ છે.
- મારા વર્ગના વિદ્યાર્થીઓની સરેરાશ ઉંમર 12 વર્ષ છે.
- એક શાળામાં વાર્ષિક પરીક્ષા સમયે વિદ્યાર્થીઓની સરેરાશ હાજરી 98 ટકા હતી.

આ પ્રકારનાં ઘણાં વિધાનો થઈ શકે છે. ઉપર આપેલાં વિધાનો વિશે વિચારો.

શું આપ વિચારો છો કે પહેલા વિધાનમાં દર્શાવેલ વિદ્યાર્થી દરરોજ બરાબર 5 કલાક ભણે છે ? અથવા શું કોઈ ચોક્કસ સમયે આપવામાં આવેલ સ્થળનું તાપમાન કાયમ 40 ડિગ્રી રહે છે ? અથવા શું વર્ગના દરેક વિદ્યાર્થીની ઉંમર 12 વર્ષ છે ? સ્પષ્ટ છે કે 'ના'.

તો આ વિધાનો તમને શું દર્શાવે છે ? સરેરાશથી આપણે સમજીએ છીએ કે ઈશા દરરોજ સામાન્ય રીતે 5 કલાક ભણે છે. કોઈ દિવસ તે 5 કલાકથી ઓછા કલાક ભણે છે અને કેટલાક દિવસ 5થી વધુ કલાક ભણે છે.

આ રીતે, 40 ડિગ્રી સરેરાશ તાપમાનનો અર્થ એ છે કે વર્ષના તે સમયે તાપમાન 40° ડિગ્રી સેલ્સિયસની આસપાસ રહે છે, ક્યારેક તે 40°C થી ઓછું રહે છે અને ક્યારેક તે 40°C થી વધુ રહે છે.

આ રીતે, આપણે એ અનુભવ કરી શકીએ કે સરેરાશ એક એવી સંખ્યા છે કે જે અવલોકનો અથવા માહિતીના સમૂહની મધ્યવર્તી સ્થિતિ દર્શાવે છે. કારણ કે સરેરાશ એ સૌથી વધારે તથા સૌથી ઓછું મૂલ્ય દર્શાવતી માહિતીની વચ્ચે હોય છે. એટલા માટે આપણે કહી શકીએ કે સરેરાશ એ માહિતીના સમૂહની મધ્યવર્તી સ્થિતિ છે. જુદા જુદા પ્રકારની માહિતીને સમજવા માટે જુદા જુદા પ્રકારના પ્રતિનિધિ મૂલ્ય કે કેન્દ્રવર્તી માપની જરૂર પડે છે. તેમાંનું એક પ્રતિનિધિ માપ **અંકગણિતીય સરાસરી** છે. પ્રકરણના પાછળના ભાગમાં આપણે બીજા પ્રતિનિધિ માપનો અભ્યાસ કરીશું.

3.5 અંકગણિતીય સરાસરી (Arithmetic Mean)

3N34KV

માહિતીના એક સમૂહ માટે મહત્તમ ઉપયોગમાં લેવાતું એક પ્રતિનિધિ માપ અંકગણિતીય સરાસરી છે. તેને સારી રીતે સમજવા માટે આવો નીચેનું એક ઉદાહરણ સમજીએ.

બે વાસણમાં ક્રમશઃ 20 લિટર અને 60 લિટર દૂધ છે. હવે જો બંને વાસણોમાં એક સરખું દૂધ રાખવામાં આવે તો પ્રત્યેક વાસણમાં કેટલું દૂધ હશે ?

જ્યારે આપણે આ પ્રકારનો પ્રશ્ન પૂછીએ છીએ ત્યારે આપણને અંકગણિતીય સરાસરી શોધવાથી જવાબ મળી શકે.

ઉપરની સ્થિતિમાં સરાસરી અથવા અંકગણિતીય સરાસરી.

$$\frac{\text{દૂધનો કુલ જથ્થો}}{\text{વાસણની સંખ્યા}} = \frac{20+60}{2} \text{ લિટર} = 40 \text{ લિટર}$$

આ રીતે દરેક વાસણમાં 40 લિટર દૂધ હશે.

સરાસરી અથવા અંકગણિતીય સરાસરી (A.M.) અથવા સામાન્ય સરાસરીને નીચે લખ્યા પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે.

$$\text{સરાસરી} = \frac{\text{બધાં અવલોકનોનો સરવાળો}}{\text{અવલોકનોની સંખ્યા}}$$

નીચે આપેલાં ઉદાહરણો જુઓ.

ઉદાહરણ 1 આશિષ સતત ત્રણ દિવસ ક્રમશઃ 4 કલાક, 5 કલાક અને 3 કલાક અભ્યાસ કરે છે. તો તેનો દરરોજ અભ્યાસનો સરાસરી સમય કેટલો હશે ?

ઉકેલ : આશિષનો સરેરાશ અભ્યાસનો સમય

$$= \frac{\text{અભ્યાસ માટે ફાળવેલો કુલ સમય}}{\text{અભ્યાસ કરેલ દિવસોની સંખ્યા}} = \frac{4+5+3}{3} \text{ કલાક} = 4 \text{ કલાક પ્રતિ દિવસ}$$

આમ, આપણે કહી શકીએ કે આશિષ 4 કલાકની સરેરાશથી અભ્યાસ કરે છે.

ઉદાહરણ 2 એક બેટ્સમેને 6 દાવમાં નીચે પ્રમાણે રન બનાવ્યા, તો એક દાવમાં તેના દ્વારા બનાવવામાં આવેલા રનની સરાસરી શોધો.

36, 35, 50, 46, 60, 55

ઉકેલ : કુલ રન = 36 + 35 + 50 + 46 + 60 + 55 = 282

સરાસરી શોધવા માટે આપણે બધાં અવલોકનોનો સરવાળો શોધી તેને અવલોકનોની કુલ સંખ્યા વડે ભાગીએ છીએ.

આમ, આ સ્થિતિમાં સરાસરી = $\frac{282}{6}$ = 47. આમ, એક દાવમાં તેના દ્વારા બનાવવામાં આવેલા રનની સરાસરી 47 છે.

પ્રયત્ન કરો

આખા અઠવાડિયા દરમિયાન તમારા ભણવાના કલાકની સરાસરી તમે કેવી રીતે શોધી શકશો ?

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો.

ઉપરોક્ત ઉદાહરણોમાં આપેલ માહિતીને ગણતરીમાં લો તથા નીચેના વિશે વિચારો.

- શું સરાસરી દરેક અવલોકનથી મોટી છે ?
- શું સરાસરી દરેક અવલોકનથી નાની છે ?

તમારા મિત્ર સાથે ચર્ચા કરો. આ પ્રકારનું બીજું એક ઉદાહરણ બનાવો અને આ જ પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો. તમે શોધી શકશો કે સરાસરી એ મહત્તમ અને લઘુત્તમ અવલોકનોની વચ્ચે આવેલી છે. વિશેષ રીતે બે સંખ્યાઓની સરાસરી, તે બે સંખ્યાઓની વચ્ચે આવેલી હોય છે.

ઉદાહરણ તરીકે 5 અને 11 ની સરાસરી $\frac{5+11}{2} = 8$ છે. જે 5 અને 11 ની વચ્ચે આવેલી છે.

આ વિચારનો ઉપયોગ કરી તમે બતાવી શકશો કે બે ભિન્ન અપૂર્ણાંક સંખ્યાઓની વચ્ચે ઘણી બધી અપૂર્ણાંક સંખ્યાઓ (જેટલી ઇચ્છો તેટલી) આવેલી છે.

ઉદાહરણ તરીકે $\frac{1}{2}$ તથા $\frac{1}{4}$ની વચ્ચે તમને તેની સરાસરી $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{2} = \frac{3}{8}$ મળશે. વળી, તમને $\frac{1}{2}$ અને $\frac{3}{8}$ ની વચ્ચે તેમની સરાસરી $\frac{7}{16}$ મળશે વગેરે.

પ્રયત્ન કરો

1. એક અઠવાડિયા દરમિયાનના તમારા ઊંઘવાના કલાકની સરાસરી શોધો.
2. $\frac{1}{2}$ અને $\frac{1}{3}$ વચ્ચેની ઓછામાં ઓછી 5 સંખ્યા શોધો.

3.5.1 વિસ્તાર (Range)

મહત્તમ અને લઘુતમ અવલોકનોના તફાવતથી આપણને અવલોકનોના વિસ્તારનો ખ્યાલ આવે છે. તેને મહત્તમ અવલોકનમાંથી લઘુતમ અવલોકનની બાદબાકી કરી શોધી શકાય. આપણે આ પરિણામને અવલોકનોનો **વિસ્તાર** કહીશું. નીચેનું ઉદાહરણ જુઓ :

ઉદાહરણ 3 એક શાળાના 10 શિક્ષકોની વર્ષમાં ઉંમર નીચે મુજબ છે :

32, 41, 28, 54, 35, 26, 23, 33, 38, 40

(i) સૌથી વધુ ઉંમરવાળા તથા સૌથી ઓછી ઉંમરવાળા શિક્ષકની ઉંમર કેટલી છે ?

(ii) શિક્ષકોની ઉંમરનો વિસ્તાર કયો છે ?

(iii) આ શિક્ષકોની સરાસરી ઉંમર કેટલી છે ?

ઉકેલ

(i) ઉંમરને ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવતાં આપણને મળે છે

23, 26, 28, 32, 33, 35, 38, 40, 41, 54

આપણે જાણી શકીએ છીએ કે મહત્તમ ઉંમરવાળા શિક્ષકની ઉંમર 54 વર્ષ છે તથા લઘુતમ ઉંમરવાળા શિક્ષકની ઉંમર 23 વર્ષ છે.

(ii) શિક્ષકોની ઉંમરનો વિસ્તાર = (54 – 23) વર્ષ = 31 વર્ષ

(iii) શિક્ષકોની ઉંમરની સરાસરી

$$= \frac{23+26+28+32+33+35+38+40+41+54}{10} \text{ વર્ષ}$$

$$= \frac{350}{10} = 35 \text{ વર્ષ}$$

સ્વાધ્યાય 3.1

1. તમારા વર્ગના કોઈ પણ દશ વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈનો વિસ્તાર શોધો.
2. કોઈ વર્ગના એક મૂલ્યાંકનમાં મેળવેલ નીચે દર્શાવેલ ગુણને કોષ્ટકમાં દર્શાવો.

   4, 6, 7, 5, 3, 5, 4, 5, 2, 6, 2, 5, 1, 9, 6, 5, 8, 4, 6, 7

   (i) સૌથી વધારે ગુણ કેટલા છે ? (ii) સૌથી ઓછા ગુણ કેટલા છે ?

   (iii) માહિતીનો વિસ્તાર શો છે ? (iv) અંકગણિતીય સરાસરી શોધો.
3. પ્રથમ 5 પૂર્ણ સંખ્યાઓની સરાસરી શોધો.
4. એક ક્રિકેટરે 8 દાવમાં નીચે મુજબ રન બનાવ્યા :

   58, 76, 40, 35, 46, 45, 0, 100.

   તો તેનો સરાસરી સ્કોર (રન) શોધો.

5. નીચે દર્શાવેલ કોષ્ટક દરેક ખેલાડીએ ચાર રમતમાં મેળવેલા અંક દર્શાવે છે :

ખેલાડી	રમત 1	રમત 2	રમત 3	રમત 4
A	14	16	10	10
B	0	8	6	4
C	8	11	રમ્યા નહિ	13

નીચે આપેલા પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(i) દરેક રમતમાં A વડે મેળવેલ અંકની સરાસરી શોધો.

(ii) દરેક રમતમાં C વડે કરાયેલ રનનો સરાસરી અંક જાણવા માટે તમે કુલ સંખ્યાને 3 વડે ભાગશો કે 4 વડે ? શા માટે ?

(iii) B ચારેય રમતમાં રમ્યો છે. તમે તેની સરાસરી કેવી રીતે શોધશો ?

(iv) કોનો દેખાવ સૌથી સારો છે ?

6. વિજ્ઞાનની એક કસોટીમાં વિદ્યાર્થીઓના એક સમૂહે (100 માંથી) પ્રાપ્ત કરેલ ગુણ 85, 76, 90, 85, 39, 48, 56, 95, 81 અને 75 છે.

(i) વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલ સૌથી વધુ અને સૌથી ઓછા ગુણ

(ii) મેળવેલા ગુણનો વિસ્તાર

(iii) સમૂહ દ્વારા મેળવાયેલા ગુણની સરાસરી શોધો.

7. સળંગ છ વર્ષોમાં એક શાળામાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા નીચે પ્રમાણે હતી :

1555, 1670, 1750, 2013, 2540 અને 2820.

આ સમયગાળા દરમિયાન શાળાના વિદ્યાર્થીઓની સરાસરી સંખ્યા શોધો.

8. એક શહેરમાં કોઈ ચોક્કસ અઠવાડિયામાં પડેલ વરસાદ (મિમીમાં) નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે નોંધવામાં આવ્યો છે :

દિવસ	સોમવાર	મંગળવાર	બુધવાર	ગુરુવાર	શુક્રવાર	શનિવાર	રવિવાર
વરસાદ (મિમી)	0.0	12.2	2.1	0.0	20.5	5.5	1.0

(i) ઉપરની માહિતીને આધારે વરસાદનો વિસ્તાર શોધો.

(ii) આ અઠવાડિયામાં પડેલ વરસાદની સરાસરી શોધો.

(iii) કેટલા દિવસોમાં વરસાદ સરાસરી વરસાદ કરતાં ઓછો પડ્યો છે ?

9. 10 છોકરીઓની ઊંચાઈ સેમીમાં માપવામાં આવી અને નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે પરિણામ મળેલ છે :
135, 150, 139, 128, 151, 132, 146, 149, 143, 141

(i) સૌથી વધુ ઊંચાઈ ધરાવતી છોકરીની ઊંચાઈ કેટલી છે ?

(ii) સૌથી ઓછી ઊંચાઈ ધરાવતી છોકરીની ઊંચાઈ કેટલી છે ?

(iii) આ માહિતીનો વિસ્તાર કેટલો છે ?

(iv) છોકરીઓની સરાસરી ઊંચાઈ કેટલી છે ?

(v) કેટલી છોકરીઓની ઊંચાઈ સરાસરી ઊંચાઈ કરતાં વધુ છે ?

3.6 બહુલક (Mode)

અગાઉ આપણે જે જાણ્યું એમ કેવળ સરાસરી જ મધ્યવર્તી સ્થિતિનું માપ કે પ્રતિનિધિ માપ નથી. જુદા જુદા પ્રકારની જરૂરિયાત અનુસાર બીજા મધ્યવર્તી સ્થિતિના માપનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

નીચે આપેલ ઉદાહરણ જુઓ :

જુદાં જુદાં માપના શર્ટની અઠવાડિક માંગ જાણવા માટે એક દુકાનદાર 90 સેમી, 95 સેમી, 100 સેમી, 105 સેમી અને 110 સેમી માપનાં શર્ટ વેચવાનો રેકોર્ડ રાખે છે. એક સપ્તાહનો રેકોર્ડ આ પ્રકારે છે :

માપ (સેમીમાં)	90 સેમી	95 સેમી	100 સેમી	105 સેમી	110 સેમી	કુલ
વેચવામાં આવેલ શર્ટની સંખ્યા	8	22	32	37	6	105

જો વેચવામાં આવેલાં શર્ટની સંખ્યાની સરાસરી શોધીએ, તો શું તમને લાગે છે કે તે નિર્ણય લઈ શકશે કે કયા માપનાં શર્ટ સ્ટૉકમાં રાખવામાં આવે ?

$$\text{વેચવામાં આવેલાં શર્ટની સરાસરી} = \frac{\text{વેચવામાં આવેલાં કુલ શર્ટ}}{\text{જુદાં જુદાં શર્ટના માપની સંખ્યા}} = \frac{105}{5} = 21$$

શું તે દરેક માપનાં 21 શર્ટ રાખશે ? જો તે આમ કરે તો તે શું તેના ગ્રાહકોની જરૂરિયાત પૂરી કરી શકશે ?

ઉપરનો રેકોર્ડ જોઈને દુકાનદાર 95 સેમી, 100 સેમી અને 105 સેમી માપના શર્ટ મંગાવવાનો નિર્ણય લે છે. તૈયાર કપડાં વેચનાર અન્ય માપનાં શર્ટ ખરીદવાનો નિર્ણય તેના ઓછા ખરીદદારો જોઈને મોકૂફ રાખે છે.

બીજું એક ઉદાહરણ જુઓ :

તૈયાર કપડાં વેચનાર એક દુકાનદાર કહે છે કે મારા વડે વેચવામાં આવેલ શર્ટનું પ્રચલિત માપ 90 સેમી હતું.

જુઓ કે અહીં પણ દુકાનદારની રુચિ જુદા જુદા માપના વેચવામાં આવેલ શર્ટની સંખ્યામાં છે. તેમ છતાં તે શર્ટના તે માપને જુએ છે કે જે સૌથી વધુ વેચાય છે. તે માહિતીનું બીજું એક પ્રતિનિધિ માપ છે. સૌથી વધારે વેચાણ **90 સેમી** માપના શર્ટનું છે. આ પ્રતિનિધિ માપને આપેલ માહિતીનો **બહુલક** કહે છે.

આપેલાં અવલોકનોના સમૂહમાંથી સૌથી વધારે વખત આવનાર અવલોકનને તે સમૂહનો બહુલક કહેવાય.

ઉદાહરણ 4 નીચે આપેલી સંખ્યાઓનો બહુલક શોધો.

1, 1, 2, 4, 3, 2, 1, 2, 2, 4

ઉકેલ આપેલી સંખ્યાઓમાંથી સમાન મૂલ્યવાળી સંખ્યાઓ સાથે ગોઠવતાં,

1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4

આપેલી માહિતીનો બહુલક 2 છે, કારણ કે બીજા અવલોકનોની સરખામણીમાં તે વધુ વખત આવે છે.

3.6.1 વિસ્તૃત માહિતીનો બહુલક (Mode of Large Data)

જ્યારે અવલોકનોની સંખ્યા વિસ્તૃત હોય તો તેમને સમાન મૂલ્યવાળા અવલોકનના રૂપમાં વ્યવસ્થિત ગોઠવવું અને પછી તેને ગણવું એટલું સરળ નથી હોતું. આવી સ્થિતિમાં આપણે માહિતીને કોષ્ટકમાં ગોઠવીએ છીએ જે આપણે આગળના ધોરણમાં ભણી ગયાં છીએ. માહિતીનું કોષ્ટક બનાવવાનું કાર્ય આવૃત્તિ ચિહ્નથી શરૂ કરી અવલોકનોની આવૃત્તિ શોધી પૂરું કરવામાં આવે છે.

નીચેનું ઉદાહરણ જુઓ :

ઉદાહરણ 5 નીચે ફૂટબૉલની એક લીગમાં બે ટીમના ગોલના તફાવતની માહિતી દર્શાવવામાં આવેલ છે.

1, 3, 2, 5, 1, 4, 6, 2, 5, 2, 2, 2, 4, 1, 2, 3, 1, 1, 2, 3, 2,
6, 4, 3, 2, 1, 1, 4, 2, 1, 5, 3, 3, 2, 3, 2, 4, 2, 1, 2

આ માહિતીનો બહુલક શોધો :

ઉકેલ ચાલો આપણે, આ આંકડાઓને કોષ્ટકના સ્વરૂપમાં ગોઠવીએ.

ગોલનો તફાવત	આવૃત્તિ ચિહ્ન	મેચની સંખ્યા
1	~~||||~~ ||||	9
2	~~||||~~ ~~||||~~ ||||	14
3	~~||||~~ ||	7
4	~~||||~~	5
5	|||	3
6	||	2
	કુલ	40

આ કોષ્ટક જોઈને આપણે ઝડપથી કહી શકીએ છીએ કે બહુલક 2 છે. કારણ કે 2 સૌથી વધુ વખત આવે છે. આમ, મોટા ભાગની રમત 2 ગોલના અંતરથી જીતી શકાઈ છે.

પ્રયત્ન કરો

નીચેનાનો બહુલક શોધો

(i) 2, 6, 5, 3, 0, 3, 4, 3, 2, 4, 5, 2, 4

(ii) 2, 14, 16, 12, 14, 14, 16, 14, 10, 14, 18, 14

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

શું આપેલી માહિતીસમૂહને એક કરતાં વધુ બહુલક હોઈ શકે ?

ઉદાહરણ 6 નીચેની સંખ્યાઓનો બહુલક શોધો. 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 8

ઉકેલ અહીં, 2 અને 5 બંને ત્રણ વખત આવે છે. તેથી તે બંને માહિતીના બહુલક છે.

આ કરો

1. તમારા વર્ગના વિદ્યાર્થીઓની ઉંમર વર્ષમાં લખો. તેને કોષ્ટકમાં ગોઠવી બહુલક શોધો.
2. તમારા સહાધ્યાયીઓની ઊંચાઈ સેન્ટિમીટરમાં માપો અને તેનો બહુલક શોધો.

પ્રયત્ન કરો

1. નીચેની માહિતીનો બહુલક શોધો :

12, 14,12, 16, 15, 13, 14, 18, 19, 12, 14, 15, 16, 15, 16, 16, 15,
17, 13, 16, 16, 15, 15, 13, 15, 17, 15, 14, 15, 13, 15, 14

2. નીચે 25 બાળકોની ઊંચાઈ (સેમીમાં) આપેલ છે :

168, 165, 163, 160, 163, 161, 162, 164, 163, 162, 164, 163, 160, 163, 160,

165, 163, 162, 163,164, 163, 160, 165, 163, 162

તેમની ઊંચાઈનો બહુલક કેટલો હશે ? અહીંયા બહુલકથી આપણે શું સમજીએ છીએ ?

સરાસરી આપણને બધાં જ અવલોકનોની સરેરાશ આપે છે, જ્યારે બહુલક એ માહિતીમાં સહુથી વધુ વખત આવતાં અવલોકનને દર્શાવે છે.

આવો, નીચે આપેલાં ઉદાહરણો અંગે વિચારીએ.

(a) તમારે એક જમણવારમાં આમંત્રિત 25 વ્યક્તિઓ માટે જરૂરી રોટલીની સંખ્યા અંગે નિર્ણય લેવાનો છે.

(b) શર્ટ વેચવાવાળા દુકાનદારે ફરીથી સ્ટોક ભરવાનો નિર્ણય કરવાનો છે.

(c) આપણે આપણા ઘર માટે જરૂરી દરવાજાની ઊંચાઈ જાણવી છે.

(d) એક પિક્નિક પર જતી વખતે, જો દરેક માટે માત્ર એક જ ફળ ખરીદવાનું હોય, તો આપણને કયું ફળ મળશે ?

આમાંથી કઈ પરિસ્થિતિમાં આપણે બહુલકનો બહુ જ સારી રીતે ઉપયોગ કરી શકીશું ?

પહેલા વિધાન પર વિચાર કરીએ. ધારો કે દરેક વ્યક્તિ માટે જરૂરી રોટલીની સંખ્યા

2, 3, 2, 3, 2, 1,2, 3, 2, 2, 4, 2, 2, 3, 2, 4, 4, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 3, 5 છે.

આ અવલોકનોનો બહુલક 2 રોટલી છે. જો આપણે બહુલકનો પ્રતિનિધિ મૂલ્યના સ્વરૂપમાં ઉપયોગ કરીએ તો આપણને પ્રત્યેક વ્યક્તિની 2 રોટલી પ્રમાણે 25 વ્યક્તિ માટે 50 રોટલીની જરૂર પડે, પરંતુ કુલ રોટલી બધા વ્યક્તિઓ માટે પૂરતી નથી. શું અહીં સરાસરી યોગ્ય પ્રતિનિધિમાપ છે ?

ત્રીજા વિધાન માટે દરવાજાની ઊંચાઈ એ વ્યક્તિઓ સાથે સંબંધ ધરાવે છે કે જે તેનો ઉપયોગ કરે છે. ધારો કે 5 બાળકો અને 4 પુખ્ત વયના લોકો તેનો ઉપયોગ કરે છે. 5 બાળકોમાંથી દરેકની ઊંચાઈ 135 સેમીની આસપાસ છે. ઊંચાઈનો બહુલક 135 સેમી છે. શું આપણે એક એવો દરવાજો લેવો જોઈએ કે જેની ઊંચાઈ 144 સેમી હોય ? શું પુખ્તવયના બધા લોકો આ દરવાજામાંથી પસાર થઈ શકશે ? એ સ્પષ્ટ છે કે આ માહિતી માટે બહુલક એ યોગ્ય પ્રતિનિધિ માપ નથી. શું અહીં સરાસરી એ એક યોગ્ય પ્રતિનિધિ માપ છે ?

શા માટે નહીં ? દરવાજાની ઊંચાઈ વિશે નિર્ણય લેવા માટે ક્યા પ્રતિનિધિ માપનો ઉપયોગ કરવો જોઈએ ?

આ પ્રકારે બાકીનાં વિધાનોનું વિશ્લેષણ કરો અને આ સ્થિતિ માટે ઉપયોગી પ્રતિનિધિ માપ શોધી કાઢો.

પ્રયત્ન કરો

તમારા મિત્રો સાથે ચર્ચા કરો અને જવાબ આપો

(a) એવી બે સ્થિતિ આપો કે જ્યાં સરાસરીનો યોગ્ય પ્રતિનિધિ મૂલ્યના સ્વરૂપે ઉપયોગ થતો હોય.

(b) એવી બે સ્થિતિ આપો કે જેમાં બહુલકના મૂલ્યનો યોગ્ય પ્રતિનિધિ મૂલ્યના સ્વરૂપે ઉપયોગ થતો હોય.

3.7 મધ્યસ્થ (Median)

આપણે જોઈ ગયાં કે કેટલીક પરિસ્થિતિમાં અંકગણિતીય સરાસરી એ મધ્યવર્તી સ્થિતિનું એક યોગ્ય માપ છે. તથા કેટલીક પરિસ્થિતિમાં મધ્યવર્તી સ્થિતિનું યોગ્ય માપ બહુલક છે.

ચાલો, હવે એક ઉદાહરણ જોઈએ. 17 વિદ્યાર્થીઓના એક સમૂહના દરેક વિદ્યાર્થીની ઊંચાઈ (સેમીમાં) નીચે આપેલ છે : 106, 110, 123, 125, 117, 120, 112, 115, 110, 120, 115, 102, 115, 115, 109, 115, 101.

રમતના શિક્ષક વર્ગને એવા બે સમૂહમાં વિભાજિત કરવા માગે છે કે દરેક સમૂહમાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા સરખી હોય તથા એક સમૂહના વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈ એક ચોક્કસ ઊંચાઈથી ઓછી હોય અને બીજા સમૂહના વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈ આ ચોક્કસ ઊંચાઈ કરતાં વધુ હોય. તે આવું કેવી રીતે કરશે ? આવો, તેની પાસે જુદા જુદા વિકલ્પો છે તે જોઈએ.

(i) તે સરાસરી શોધશે :

$$\text{સરાસરી} = \frac{106+110+123+125+117+120+112+115+110+120+115+102+115+115+109+115+101}{17}$$

$$= \frac{1930}{17} = 113.5$$

તેથી, જો શિક્ષક વર્ગના વિદ્યાર્થીઓને એવા બે સમૂહમાં વિભાજિત કરે કે જેમાંથી એક સમૂહમાં સરાસરી ઊંચાઈથી ઓછી ઊંચાઈવાળા અને બીજા સમૂહમાં સરાસરી ઊંચાઈથી વધુ ઊંચાઈવાળા વિદ્યાર્થીઓ હોય, તો એ સમૂહ અસમાન સંખ્યાના થશે. કારણ કે એકમાં 7 સભ્ય અને બીજામાં 10 સભ્ય થશે.

(ii) તેની પાસે બીજો વિકલ્પ છે કે તે બહુલક શોધે. સૌથી વધારેવાર આવતું અવલોકન 115 સેમી છે જેને બહુલક તરીકે લેવામાં આવશે.

અહીં 7 વિદ્યાર્થીઓ બહુલકથી ઓછી અને 10 વિદ્યાર્થીઓ બહુલક જેટલી કે તેથી વધુ ઊંચાઈ ધરાવનાર છે અને તેથી આપણે સમૂહને બે સરખા ભાગમાં વિભાજિત કરી શકીએ નહિ.

એટલા માટે ચાલો, વધુ એક પ્રતિનિધિ માપ અથવા મધ્યવર્તી સ્થિતિના માપ વિષે વિચારીએ. આ કરવા માટે આપણે વિદ્યાર્થીઓની આપેલી ઊંચાઈ (સેમીમાં) જોઈએ અને તેને ચડતા ક્રમમાં ગોઠવતાં નીચે પ્રમાણેના અવલોકન થશે :

101, 102, 106, 109, 110, 110, 112, 115, 115, 115, 115, 115, 117, 120, 120, 123, 125

અહીં આ માહિતીની મધ્યમાં આવતી કિંમત 115 છે, કારણ કે આ કિંમત વિદ્યાર્થીઓને બે સમાન સમૂહમાં વિભાજિત કરે છે કે જેમાંથી દરેકમાં 8 વિદ્યાર્થીઓ હોય. આ કિંમતને **મધ્યસ્થ** કહે છે. મધ્યસ્થ એવું માપ દર્શાવે છે કે જે માહિતીમાં મધ્યમાં આવેલું હોય (જ્યારે ગોઠવણી ચઢતા કે ઊતરતા ક્રમમાં હોય) તથા અડધાં અવલોકનો તેનાથી વધારે હોય અને બીજા અડધાં તેનાથી નીચે હોય. રમતના શિક્ષક વચ્ચેના વિદ્યાર્થીને આ રમતના નિર્ણાયક બનાવી શકે છે.

અહીં આપણે ફક્ત એવી સ્થિતિઓ લઈશું કે જ્યાં અવલોકનો એકી સંખ્યામાં હોય.

આ પ્રકારે આપેલ માહિતીને ચઢતા કે ઊતરતા ક્રમમાં ગોઠવ્યા પછી તેનું મધ્યમાં આવેલું અવલોકન આપણને મધ્યસ્થ આપે છે.

નોંધો કે સામાન્ય રીતે આપણને મધ્યસ્થ અને બહુલકનું મૂલ્ય સમાન ન પણ મળે.

પ્રયત્ન કરો

તમારા મિત્ર આપેલ માહિતીનો મધ્યસ્થ અને બહુલક શોધે છે. તમારા મિત્રની કોઈ ભૂલ થઈ હોય તો દર્શાવો અને સુધારો :

35, 32, 35, 42, 38, 32, 34

મધ્યસ્થ = 42, બહુલક = 32

આમ, આપણે કહી શકીશું કે સરાસરી, બહુલક અને મધ્યસ્થ એ એવી સંખ્યાઓ છે કે જે આપેલાં અવલોકનો અથવા સમૂહનું પ્રતિનિધિ મૂલ્ય છે. તે માહિતીના સૌથી વધારે અને સૌથી ઓછાં મૂલ્યોની વચ્ચે છે. તેને મધ્યવર્તી સ્થિતિનું માપ કહેવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ 7 આપેલી માહિતીનો મધ્યસ્થ શોધો : 24, 36, 46, 17, 18, 25, 35

ઉકેલ : આપણે અવલોકનોને ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવીશું તો આપણને. 17, 18, 24, 25, 35, 36, 46 મળશે. મધ્યસ્થ એ વચ્ચેનું અવલોકન છે. તેથી 25 એ મધ્યસ્થ છે.

સ્વાધ્યાય 3.2

1. ગણિતની એક પરીક્ષામાં (25 ગુણમાંથી) 15 વિદ્યાર્થીઓના ગુણ નીચે દર્શાવેલ છે :
   19, 25, 23, 20, 9, 20, 15, 10, 5, 16, 25, 20, 24, 12, 20
   આ માહિતીના બહુલક અને મધ્યસ્થ શોધો. આ બંને સમાન છે ?
2. એક ક્રિકેટ મેચમાં 11 ખેલાડીઓએ બનાવેલ રન નીચે પ્રમાણે છે :
   6, 15, 120, 50, 100, 80, 10, 15, 8, 10, 15
   આ માહિતીના સરાસરી, બહુલક અને મધ્યસ્થ શોધો.
   આ ત્રણેય સમાન છે ?
3. એક વર્ગના 15 વિદ્યાર્થીઓનું વજન (કિગ્રામાં) નીચે મુજબ છે :
   38, 42, 35, 37, 45, 50, 32, 43, 43, 40, 36, 38, 43, 38, 47
   (i) આ માહિતીનો બહુલક અને મધ્યસ્થ શોધો.
   (ii) શું એકથી વધુ બહુલક છે ?
4. નીચેની માહિતીનો બહુલક અને મધ્યસ્થ શોધો :
   13, 16, 12, 14, 19, 12, 14, 13, 14
5. નીચેનાં વિધાનો સાચાં છે કે ખોટાં તે કહો.
   (i) બહુલક એ હંમેશાં માહિતીમાંની સંખ્યા હોય છે.
   (ii) સરાસરી એ માહિતીમાંની એક સંખ્યા હોય છે.
   (iii) મધ્યસ્થ એ હંમેશાં માહિતીમાંની એક સંખ્યા હોય છે.
   (iv) માહિતી 6, 4, 3, 8, 9, 12, 13, 9ની સરાસરી 9 છે.

3.8 જુદા જુદા હેતુઓ માટે લંબ આલેખનો ઉપયોગ

આપણે ગયા વર્ષે શીખી ગયાં છીએ કે એકઠી કરેલ માહિતીને કેવી રીતે આવૃત્તિ વિતરણ કોષ્ટકમાં પહેલાં ગોઠવી અને પછી તે સૂચનાઓની દૃશ્ય રજૂઆત ચિત્રાલેખ અને લંબ આલેખમાં કરવામાં આવે છે. તમે આ લંબ આલેખને જોઈ શકો છો અને તેના વિષેના પરિણામ તારવી શકો છો. આ લંબ આલેખ પરથી તમે માહિતી પણ મેળવી શકો છો. દા.ત. તમે કહી શકશો કે બહુલક એ સૌથી લાંબો લંબ છે, જો તે લંબ, આવૃત્તિનું પ્રતિનિધિત્વ કરતો હોય તો.

3NBZMI

3.8.1 પ્રમાણમાપ અથવા સ્કેલની પસંદગી કરવી

આપણે જાણીએ છીએ કે લંબ આલેખ સમાન પહોળાઈના લંબ દ્વારા અંકો દર્શાવે છે અને લંબની લંબાઈ, આવૃત્તિ અને પસંદ કરેલા પ્રમાણમાપ પર આધાર રાખે છે.લંબ આલેખમાં જો અવલોકનો એકમમાં દર્શાવેલ હોય તો એક અવલોકન માટે એક એકમ લંબાઈનું નિરૂપણ કરવું પડે છે. પણ જો 10 કે 100 અવલોકનો દર્શાવવાં હોય તો એક એકમ લંબાઈ 10 કે 100 અવલોકનોનું નિરૂપણ કરી શકે છે. આપેલા ઉદાહરણને સમજીએ.

ઉદાહરણ 8 શાળાના મકાનને રંગ કરવાનો નિર્ણય લેવા માટે ધોરણ 6 અને ધોરણ 7 ના 200 વિદ્યાર્થીઓને તેમના મનપસંદ રંગની પસંદગી કરવાનું કહેવામાં આવ્યું જેનું પરિણામ નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે. આપેલી માહિતીને લંબ આલેખ વડે દર્શાવો.

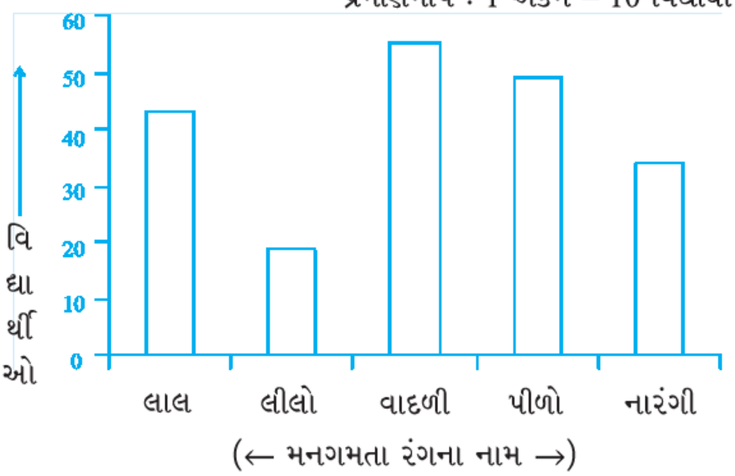
મનગમતો રંગ	લાલ	લીલો	વાદળી	પીળો	નારંગી
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	43	19	55	49	34

લંબ આલેખનો ઉપયોગ કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(i) સૌથી વધુ પસંદગીનો રંગ કયો છે ? (ii) અને કયો રંગ સૌથી ઓછી પસંદગીનો છે ?

(iii) કુલ કેટલા રંગ છે ? તે કયા કયા છે ?

ઉકેલ નીચે પ્રમાણે યોગ્ય પ્રમાણમાપ પસંદ કરો : 0 માપથી શરૂ કરો. સૌથી મોટું અવલોકન 55 છે. તેથી માપને 55 થી થોડું વધારે એટલે કે 60 પર સમાપ્ત કરો. અક્ષ પર 10 ના વધારા પ્રમાણે સરખું વિભાજન કરો. તમે જોશો કે બધા જ લંબ 0 અને 60 વચ્ચે આવશે. આપણે પ્રમાણમાપ એ રીતે પસંદ કરીશું કે જેથી લંબાઈ 0 અને 60 વચ્ચે રહે. તે વધુ લાંબો પણ ન હોય કે ટૂંકો પણ નહિ. અહીં આપણે 10 વિદ્યાર્થીઓ માટે એક એકમ લઈશું. પછી આપણે આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે લંબ આલેખ દોરીશું અને નામ આપીશું. લંબ આલેખ પરથી તારવી શકાય કે,



(i) વાદળી એ સૌથી વધુ પસંદગીનો રંગ છે. (કારણ કે વાદળી રંગનું નિરૂપણ કરતો લંબ સૌથી ઊંચો છે.)

(ii) લીલો રંગ સૌથી ઓછી પસંદગીનો રંગ છે. (કારણ કે લીલા રંગનું નિરૂપણ કરતો લંબ સૌથી ટૂંકો છે.)

(iii) અહીં 5 રંગ છે, તે લાલ, લીલો, વાદળી, પીળો અને નારંગી છે. (જે આડી રેખા પર દર્શાવેલ છે)

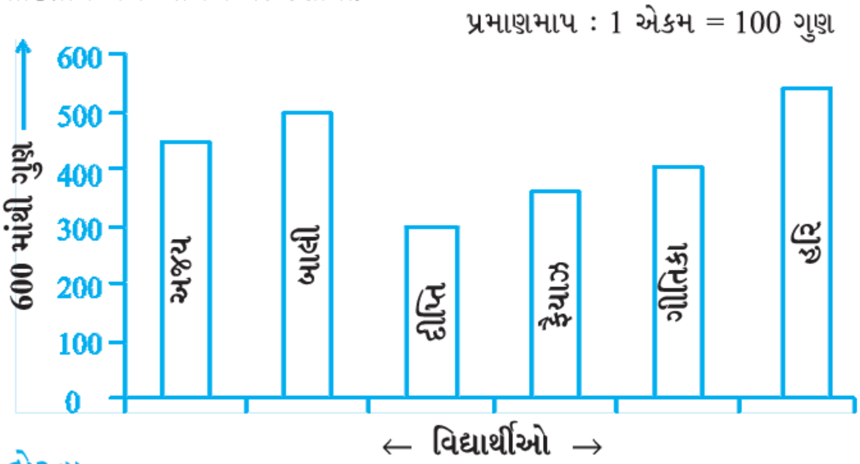
ઉદાહરણ 9 નીચેની માહિતી કોઈ એક ચોક્કસ વર્ગના 6 વિદ્યાર્થીઓએ (600 માંથી) મેળવેલ કુલ ગુણ દર્શાવે છે. આ માહિતીને લંબ આલેખ વડે દર્શાવો.

વિદ્યાર્થીઓ	અજય	બાલી	દિપ્તિ	ફૈયાઝ	ગીતિકા	હરિ
મેળવેલ ગુણ	450	500	300	360	400	540

ઉકેલ :

(i) યોગ્ય માપની પસંદગી માટે આપણે સરખા ભાગ પાડી 100નો વધારો લઈએ છીએ. આમ, એક એકમ 100 ગુણ દર્શાવે છે. (જો 10 ગુણ દર્શાવવા માટે 1 એકમની પસંદગી કરવામાં આવે તો શું મુશ્કેલી થશે ?)

(ii) હવે માહિતીને લંબ આલેખ વડે દર્શાવો.



દ્વિ-લંબ આલેખ દોરવા

નીચે બે શહેરો આબેરદીન અને મારગેટ માટે વર્ષના બારે મહિનાઓ દરમિયાન તડકો હોવાના સરેરાશ કલાક દર્શાવતી માહિતી એકઠી કરી છે. **આ શહેરો દક્ષિણ ધ્રુવની** નજીક છે અને અહીં દરરોજ થોડા કલાક માટે જ તડકો રહે છે.

મારગેટમાં												
	જાન્યુ.	ફેબ્રુ.	માર્ચ	એપ્રિલ	મે	જૂન	જુલાઈ	ઑગસ્ટ	સપ્ટે.	ઑક્ટો.	નવે.	ડિસે.
તડકો હોય એવા સરેરાશ કલાક	2	$3\frac{1}{4}$	4	4	$7\frac{3}{4}$	8	$7\frac{1}{2}$	7	$6\frac{1}{4}$	6	4	2
આબેરદીનમાં												
	જાન્યુ.	ફેબ્રુ.	માર્ચ	એપ્રિલ	મે	જૂન	જુલાઈ	ઑગસ્ટ	સપ્ટે.	ઑક્ટો.	નવે.	ડિસે.
તડકો હોય એવા સરેરાશ કલાક	$1\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	6	$5\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}$	5	$4\frac{1}{2}$	4	3	$1\frac{3}{4}$

તમે અલગ લંબ આલેખ દોરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(i) કયા મહિનામાં બંને શહેરમાં મહત્તમ તડકો છે ? અથવા

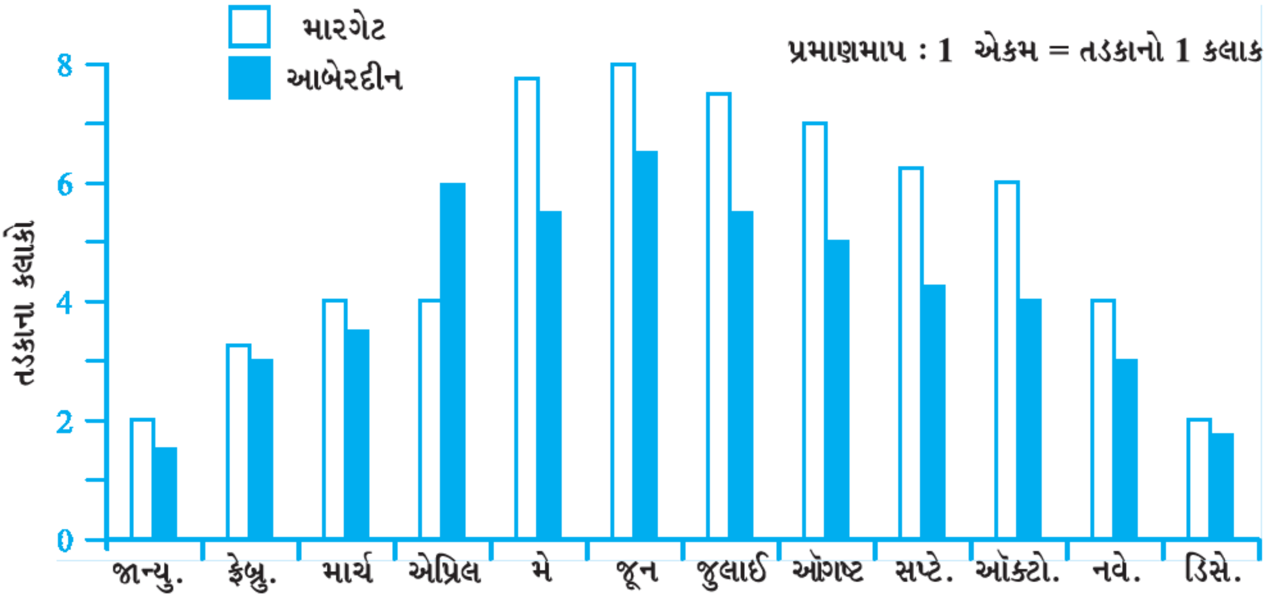
(ii) કયા મહિનામાં બંને શહેરમાં સૌથી ઓછો તડકો છે ?

તેમ છતાં ચોક્કસ મહિનામાં કયા શહેરમાં તડકાના વધુ કલાક છે તે જાણવા માટે બંને શહેરના સરેરાશ કલાકોની સરખામણી કરવી જોઈશે. આ માટે આપણે તેના માટે એવા આલેખો દોરતાં શીખીશું જેને દ્વિ-લંબ આલેખ કહીશું, જેમાં બે શહેરોની માહિતી લંબ આલેખો વડે પાસ પાસે આપવામાં આવેલ છે.

પાન નં 71 પરનો લંબ આલેખ (આકૃતિ 3.1) બંને શહેરોનો સરાસરી તડકો દર્શાવે છે.

દરેક મહિના માટે આપણી પાસે બે લંબ આલેખ છે. જેની ઊંચાઈઓ દરેક શહેર માટે સરાસરી તડકો દર્શાવે છે. આ પરથી આપણે કહી શકીએ કે એપ્રિલ સિવાયના દરેક મહિનામાં મારગેટમાં આબેરદીનની અપેક્ષાએ વધુ તડકો રહે છે.

આ પ્રકારના ભેગા લંબ આલેખ તમે તમારા વિસ્તાર કે શહેર માટે પણ બનાવી શકો.

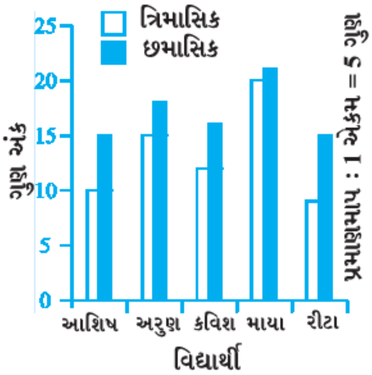


(આકૃતિ 3.1) મહિનો

ચાલો, આપણને સંબંધિત બીજું એક ઉદાહરણ આપણે જોઈએ.

ઉદાહરણ 10 ગણિતના શિક્ષિકા એ જાણવા માગે છે કે ત્રિમાસિક પરીક્ષા પછી અપનાવવામાં આવેલી શિક્ષણની નવી પદ્ધતિ અસરકારક હતી કે નહિ. તેમણે નબળા વિદ્યાર્થીઓના ત્રિમાસિક કસોટીના (25માંથી) અને છ માસિક કસોટીના (25માંથી) ગુણ લીધા.

વિદ્યાર્થી	આશિષ	અરુણ	કવિશ	માયા	રીટા
ત્રિમાસિક	10	15	12	20	9
છમાસિક	15	18	16	21	15



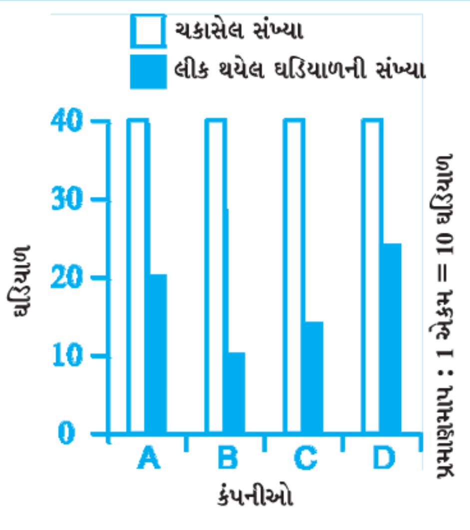
ઉકેલ : તેણે પાસપાસે બે લંબવાળો આલેખ દોર્યો અને શોધી કાઢ્યું કે મોટા ભાગના વિદ્યાર્થીઓના ગુણમાં સુધારો થયેલ છે. શિક્ષિકાએ નક્કી કર્યું કે આ પદ્ધતિનો ઉપયોગ તે હંમેશાં ચાલુ રાખશે.

તમે એવી કેટલીક પરિસ્થિતિ વિચારી શકશો કે જેમાં દ્વિ-લંબ આલેખનો ઉપયોગ થતો હોય ?

પ્રયત્ન કરો

(1) આપવામાં આવેલ લંબ આલેખ (આકૃતિ 3.2) જુદી જુદી કંપનીઓ દ્વારા બનાવવામાં આવેલ પાણી અવરોધક ઘડિયાળની તપાસ માટે કરવામાં આવેલા એક સર્વેક્ષણનો છે.

તેમાંની દરેક કંપનીનો દાવો હતો કે તેમની ઘડિયાળ પાણી અવરોધક છે.



આકૃતિ 3.2

તપાસ કર્યા પછી મેળવેલ આ પરિણામ છે.

(a) શું તમે દરેક કંપની માટે લીક થતી હોય તેવી ઘડિયાળ અને કુલ ઘડિયાળની સંખ્યા ને અપૂર્ણાંક સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકશો ?

(b) આ પરથી તમે કહી શકશો કે કઈ કંપનીની ઘડિયાળ વધુ સારી છે ?

2. નીચે 1995, 1996, 1997 અને 1998 માં વેચાયેલ અંગ્રેજી અને હિન્દી વિષયની ચોપડીઓની સંખ્યા દર્શાવેલ છે :

વર્ષ	1995	1996	1997	1998
અંગ્રેજી	350	400	450	620
હિન્દી	500	525	600	650

દ્વિ-લંબ આલેખ દોરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

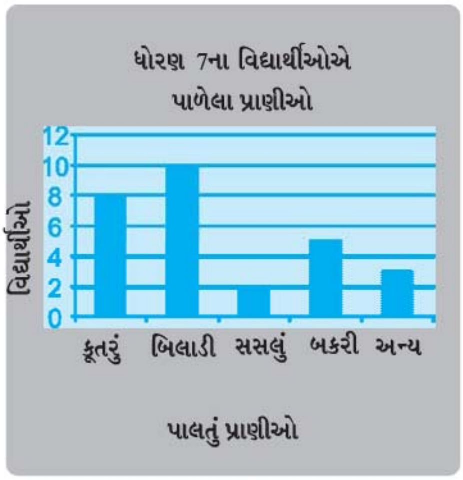
(a) કયા વર્ષમાં બંને ભાષાનાં પુસ્તકોના વેચાણ વચ્ચેનો તફાવત સૌથી ઓછો હતો ?

(b) શું તમે કહી શકશો કે અંગ્રેજી વિષયના પુસ્તકની માંગ ઝડપથી વધી છે ? કારણ આપો.

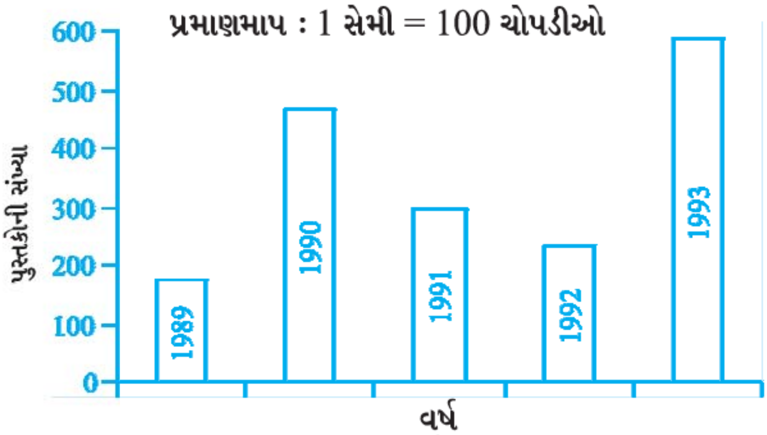
સ્વાધ્યાય 3.3

1. લંબ આલેખ (આકૃતિ 3.3) નો ઉપયોગ કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(a) કયું પાલતું પ્રાણી સૌથી વધુ લોકપ્રિય છે ? (b) કેટલા વિદ્યાર્થીઓનું પાલતું પ્રાણી કૂતરો છે ?



આકૃતિ 3.3



આકૃતિ 3.4

2. આપેલ લંબ આલેખ (આકૃતિ 3.4) નો અભ્યાસ કરો કે જે પુસ્તક ભંડારમાં સતત પાંચ વર્ષ દરમિયાન વેચાયેલ પુસ્તકની સંખ્યા દર્શાવે છે. નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(i) 1989, 1990 અને 1992 ના દરેક વર્ષમાં કેટલાં પુસ્તકોનું વેચાણ થયું હશે ?

(ii) કયા વર્ષમાં 475 પુસ્તકો વેચવામાં આવ્યાં ? કયા વર્ષમાં 225 પુસ્તકો વેચવામાં આવ્યાં ?

(iii) કયા વર્ષમાં 250 કરતાં ઓછાં પુસ્તકો વેચવામાં આવ્યાં ?

(iv) 1989માં વેચાયેલ પુસ્તકની સંખ્યાનો અંદાજ કેવી રીતે કાઢી શકાય તે સમજાવી શકશો ?

3. જુદા જુદા 6 ધોરણના વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા નીચે દર્શાવેલ છે. આ માહિતીને લંબ આલેખ સ્વરૂપે દર્શાવો.

ધોરણ	પાંચમું	છઠ્ઠું	સાતમું	આઠમું	નવમું	દસમું
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	135	120	95	100	90	80

(a) તમે પ્રમાણમાપ કેવી રીતે પસંદ કરશો ?

(b) નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(i) કયા ધોરણમાં સૌથી વધુ વિદ્યાર્થીઓ છે ? અને સૌથી ઓછા ?

(ii) ધોરણ છ અને ધોરણ આઠના વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યાનો ગુણોત્તર શોધો.

4. વિદ્યાર્થીના પ્રથમ સત્ર અને બીજા સત્રના પરિણામ આપેલ છે. યોગ્ય પ્રમાણમાપ લઈ દ્વિ-લંબ આલેખ દોરો અને નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

વિષય	અંગ્રેજી	હિન્દી	ગણિત	વિજ્ઞાન	સામાજિક વિજ્ઞાન
પ્રથમ સત્ર (100માંથી)	67	72	88	81	73
બીજું સત્ર (100માંથી)	70	65	95	85	75

(i) વિદ્યાર્થીએ કયા વિષયના દેખાવમાં સૌથી વધુ સુધારો કર્યો ?

(ii) કયા વિષયમાં સુધારો સૌથી ઓછો છે ?

(iii) શું કોઈ વિષયમાં દેખાવ નીચે ગયો છે ?

5. એક વસાહતનો સર્વે કરતાં નીચે પ્રમાણેની માહિતી એકઠી થઈ :

મનગમતી રમત	ક્રિકેટ	બાસ્કેટ બૉલ	સ્વીમીંગ	હોકી	એથ્લેટિક્સ
જોનાર	1240	470	510	430	250
ભાગ લેનાર	620	320	320	250	105

(i) યોગ્ય પ્રમાણમાપ લઈ દ્વિ-લંબ આલેખ દોરો.
લંબ આલેખ પરથી તમે શું અનુમાન કરશો ?

(ii) કઈ રમત સૌથી વધુ પ્રિય છે ?

(iii) રમત જોવી અને ભાગ લેવો બે માંથી શું વધુ પસંદ છે ?

6. આ પ્રકરણની શરૂઆતમાં (કોષ્ટક 3.1) જુદાં જુદાં શહેરોમા આપવામાં આવેલ મહત્તમ અને લઘુત્તમ તાપમાનની માહિતી લો. આ માહિતીનો ઉપયોગ કરી દ્વિ-લંબ આલેખ દોરો અને નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(i) આપેલી તારીખે કયા શહેરના તાપમાનમાં સૌથી વધુ તફાવત છે ?

(ii) કયું શહેર સૌથી વધુ ગરમ અને કયું શહેર સૌથી વધુ ઠંડુ છે ?

(iii) એવાં બે શહેરોનાં નામ આપો કે જેમાં એકનું મહત્તમ તાપમાન એ બીજાનાં લઘુત્તમ તાપમાનથી ઓછું હોય.

(iv) એવા શહેરનું નામ આપો કે જેના તાપમાનનો તફાવત સૌથી ઓછો હોય.

પ્રયત્ન કરો

એવી સ્થિતિ વિચારીને દરેકના ઓછાંમાં ઓછાં ત્રણ ઉદાહરણ આપો કે જે ચોક્કસ થશે, ને થવાની શક્યતા નથી અને જે થાય પણ ખરી અને ન પણ થાય. એટલે કે પરિસ્થિતિ થવાનીકેટલીક તક હોય છે.

3.9 તક અને સંભાવના (Chance And Probabilty) :

3NKVP6

આ શબ્દો આપણાં રોજિંદા જીવનમાં વારંવાર આવે છે. આપણે વારંવાર કહીએ છીએ કે આજે વરસાદ થવાના કોઈ યોગ નથી અને એવું પણ કહીએ છીએ કે ભારતને વર્લ્ડકપ જીતવાની સંભાવના વધુ છે. ચાલો, પદોને વધુ સારી રીતે સમજીએ. નીચેનાં વિધાન વિચારો.

(i) પશ્ચિમ દિશામાં સૂર્ય ઊગે છે

(ii) કીડીની ઊંચાઈ 3 મીટર સુધી વધે છે.

(iii) મોટા કદનો ઘન લેવામાં આવશે તો તેની બાજુ પણ મોટી હશે.

(iv) વધારે ક્ષેત્રફળ ધરાવતું વર્તુળ લેવામાં આવે તો તેની ત્રિજ્યા પણ વધુ હશે.

(v) ભારત આગામી ટેસ્ટ શ્રેણી જીતશે.

ઉપર આપેલાં વાક્યો જોઈને તમે કહી શકશો કે સૂર્ય પશ્ચિમમાં ઊગે તે અશક્ય છે. કીડીનું કદ 3 મીટર સુધી વધે તે પણ અશક્ય છે. બીજી બાજુ જો વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ વધુ હશે તો તે ચોક્કસ છે કે તેની ત્રિજ્યા પણ વધુ હશે. તમે આ જ વાત ઘનના વધુ કદ અને તેની લાંબી બાજુ માટે કહી શકો. બીજી બાજુ ભારત આગામી ટેસ્ટ શ્રેણી જીતશે કે હારશે. તે બંને શક્યતા છે.

3.9.1 તક (Chance)

જ્યારે તમે સિક્કો ઉછાળો તો શું તમે ખાતરીપૂર્વક કહી શકશો કે તમને શું મળશે ? સિક્કો ઉછાળતાં પહેલાં દરેક વખતે પરિણામ ધારવાનો પ્રયત્ન કરો. તમારું અવલોકન નીચેના ખાનામાં લખો.

સિક્કો ઉછાળવાનો ક્રમ	ધારણા	પરિણામ

10 વખત આ પ્રયત્ન કરો. મળતાં પરિણામોનું અવલોકન કરો. તેના માટેની કોઈ પેટર્ન જોઈ ? દરેક હેડ પછી તમને શું મળે છે ? તે શક્ય છે કે દરેક વખતે હેડ જ મળે ? બીજા 10 ટોસ ઊછાળવાના અવલોકન કરો અને અવલોકનો કોઠામાં લખો.

તમે જોઈ શકશો કે અવલોકનો કોઈ સ્પષ્ટ પેટર્ન બતાવતાં નથી. નીચે આપેલા કોષ્ટકમાં સુશીલા અને સલમા વડે 25 વખત ઉછાળવામાં આવેલા સિક્કાથી મળેલાં અવલોકનો આપ્યાં છે. અહીં H હેડ દર્શાવે છે જ્યારે T ટેલ દર્શાવે છે.

સંખ્યા	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
પરિણામ	H	T	T	H	T	T	T	H	T	T	H	H	H	H	H
સંખ્યા	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25					
પરિણામ	T	T	H	T	T	T	T	T	T	T					

માહિતી આપણને શું કહે છે ? તમે હેડ અને ટેલ માટે કોઈ પેટર્ન દર્શાવી શકશો ? સ્પષ્ટ છે કે મેળવેલા હેડ અને ટેલ માટે કોઈ ચોક્કસ પેટર્ન નથી. તમે જ્યારે સિક્કાને દરેક વખતે ઉછાળો છો ત્યારે દરેક પ્રયત્નનું પરિણામ હેડ અથવા ટેલ હશે. એ એક માત્ર તક છે કે તમને આ બેમાંથી કોઈ એક મળે.

ઉપરની માહિતી પરથી હેડ અને ટેલની સંખ્યા ગણો. સિક્કાને વધુ વખત ઉછાળો અને તમે નોંધતા જાઓ કે તમને શું મળી રહ્યું છે. તમને કેટલી વખત હેડ મળ્યું તેની કુલ સંખ્યા ને કેટલી વખત ટેલ મળી તેની કુલ સંખ્યા શોધો.

તમે પાસાથી પણ રમ્યા હશો. પાસાને 6 ફલક હોય છે. જ્યારે તમે પાસાને ફેંકો છો ત્યારે તમે ક્યો અંક મળશે તે ધારી શકશો ખરા ? લુડો અથવા સાપ સીડીની રમત રમતી વખતે તમે કોઈ ચોક્કસ અંક મળે એવી ઈચ્છા રાખતા હો છો. શું તમારી ઈચ્છા પ્રમાણે હંમેશા અંક મળે છે ?

શું પાસો દરેક વખતે તમારી ઇચ્છા પ્રમાણે પડે છે ? એક પાસો લઈ તેને 150 વખત ફેંકો અને નીચેના કોષ્ટકમાં માહિતી લખો.

પાસા પરનો અંક	આવૃત્તિ ચિહ્ન	સંખ્યા કેટલી વખત મળી
1		
2		

દરેક વખતે પરિણામ પ્રાપ્ત થતાં આપેલી સંખ્યાની સામે એક આવૃત્તિ ચિહ્ન કરો. ઉદાહરણ તરીકે પહેલી વખત પાસો ફેંકતાં 5 મળે તો 5ની સામે આવૃત્તિ ચિહ્ન મૂકો. બીજી વાર ફેંકતાં તમને 1 મળે તો 1 સામે ચિહ્ન કરો. દરેક વખતે મળતા નંબર માટે આવૃત્તિ ચિહ્ન કરતાં રહો. આ કામ 150 વાર ફેંકેલા પાસા માટે કરો અને 150 વખત ફેંકેલા પાસાનું પરિણામ જાણો.

ઉપરોક્ત માહિતીનો એક લંબ આલેખ બનાવો કે જેમાં પરિણામ 1, 2, 3, 4, 5 અને 6 કેટલી વખત આવે છે. તે બતાવવામાં આવેલું હોય.

પ્રયત્ન કરો

(સમૂહમાં કરો)

(1) 100 વખત સિક્કાને ઊછાળો કેટલી વખતે હેડ અને ટેલ તેમાં મળે છે તે શોધી કાઢો.

(2) અફતાબ 250 વખત પાસો ફેંકે છે અને નીચેનું કોષ્ટક મળે છે. આ માહિતી માટે લંબ આલેખ દોરો.

પાસા પરનો નંબર	આવૃત્તિ ચિહ્ન
1	卌 卌 卌 卌 卌 卌 |||
2	卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌
3	卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 ||
4	卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 ||
5	卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 |||
6	卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌

(3) પાસાને 100 વખત ફેંકો અને માહિતીની નોંધ કરો. 1, 2, 3, 4, 5 અને 6 કેટલી વખત છે તે શોધો.

સંભાવના એટલે શું ?

આપણે જાણીએ છીએ કે જ્યારે સિક્કાને ઉછાળવામાં આવે ત્યારે પરિણામની બે શક્યતાઓ હોય છે : **હેડ** અથવા **ટેલ** અને પાસાને ઉછાળતાં આપણી પાસે પરિણામની 6 શક્યતાઓ હોય છે. અનુભવથી આપણે જાણીએ છીએ કે સિક્કો ઊછાળતાં હેડ અથવા ટેલ મળવાની શક્યતા સમાન હોય છે. આપણે કહી શકીશું કે હેડ અથવા ટેલ મળવાની સંભાવના સરખી હોય છે. અને તે દરેક માટે $\frac{1}{2}$ છે.

પાસો ઉછાળવાથી 1, 2, 3, 4, 5 અને 6 મળવાની સંભાવના એકસરખી હોય છે એટલે કે પાસા માટે 6 એકસરખી શક્યતાવાળા પરિણામ છે. તેથી આપણે કહીશું કે 1, 2, 3, 4, 5 અને 6માંથી કોઈ પણ એક આવવાની સંભાવના ($\frac{1}{6}$) છે. આ આપણે હવે પછીના ધોરણમાં ભણીશું. પરંતુ આપણે અત્યાર સુધી જે કર્યું તેથી સ્પષ્ટ છે કે ઘણી શક્યતાવાળી ઘટનાઓની સંભાવના 0 થી 1ની વચ્ચે હોય છે. જે ઘટના બનવાની કોઈ

જ શક્યતા ન હોય તો તેની સંભાવના 0 હોય અને જો તે નિશ્ચિતપણે બનતી હોય તો તેની સંભાવના 1 હોય છે.

એવી પરિસ્થિતિ આપી હોય કે જ્યાં આપણને જુદાં જુદાં સંભવિત પરિણામો મળવાની શક્યતા હોય, ત્યારે દરેક પરિણામ માટે શક્ય તકોનો અભ્યાસ કરવો જોઈએ.

એવું શક્ય છે કે સિક્કા અને પાસાની જેમ દરેક પ્રયોગમાં શક્ય પરિણામોની સંભાવના સમાન ન હોય. ઉદાહરણ તરીકે જો એક વાસણમાં 15 લાલ દડા અને 9 સફેદ દડા છે અને તેમાંથી એક દડો જોયા વગર કાઢવામાં આવે તો લાલ દડો નીકળવાની સંભાવના ઘણી જ વધુ હોય છે. શા માટે ? સફેદ દડા કરતાં લાલ દડો નીકળવાની તક કેટલા ગણી છે ? યાદ રાખો કે તે બંનેની સંભાવના 0 અને 1 વચ્ચે હોય છે.

સ્વાધ્યાય 3.4

1. કહો કે નીચે આપેલી ઘટના ચોક્કસ બનશે, અશક્ય છે કે બની શકે પણ ચોક્કસ નહીં.
   (i) ગઈકાલ કરતાં આજે તમારી ઉંમર વધુ છે.
   (ii) એક સિક્કાને ઉછાળતાં હેડ આવશે.
   (iii) પાસાને જ્યારે ફેંકવામાં આવે ત્યારે 8 મળશે.
   (iv) હવે પછીની ટ્રાફિક લાઈટ લીલા રંગની દેખાશે.
   (v) આવતી કાલનો દિવસ વાદળછાયો હશે.
2. એક પેટીમાં 6 લખોટી છે, જેના પર 1 થી 6 અંક લખવામાં આવેલ છે.
   (i) 2 અંક લખેલી લખોટી નીકળવાની સંભાવના કેટલી છે ?
   (ii) 5 અંક લખેલી લખોટી નીકળવાની સંભાવના કેટલી છે ?
3. કઈ ટીમ રમત પહેલાં શરૂ કરે તે માટે સિક્કો ઉછાળવામાં આવે છે. તમારી ટીમ શરૂઆત કરે તે માટેની સંભાવના કેટલી છે ?

આપણે શી ચર્ચા કરી ?

1. માહિતીનો સંગ્રહ, આલેખન અને રજૂઆત એ આપણા અનુભવને ગોઠવવામાં અને તેમાંથી અનુમાન લગાવવામાં મદદ કરે છે.
2. માહિતીનો સંગ્રહ કરતાં પહેલાં આપણે જાણવું જરૂરી છે કે આપણે તેનો ઉપયોગ શાના માટે કરવાના છીએ.
3. જરૂરી માહિતી એકઠી કરી યોગ્ય કોષ્ટકમાં ગોઠવવામાં આવે છે તેથી તે સમજવા અને અનુમાન લગાવવામાં સરળ રહે છે.
4. સરાસરી એક એવી સંખ્યા છે કે જે એકઠાં કરેલાં અવલોકનોના સમૂહ અથવા માહિતીની મધ્યવર્તી સ્થિતિ રજૂ કરે છે.
5. અંકગણિતીય સરાસરી એ માહિતીની કિંમતોનું એક પ્રતિનિધિ મૂલ્ય છે.
6. બહુલક એ મધ્યવર્તી સ્થિતિનું બીજું સ્વરૂપ અથવા પ્રતિનિધિ કિંમત છે. બહુલક એ અવલોકનોના એક સમૂહમાંનું એક એવું અવલોકન છે જે સૌથી વધુ આવે છે.
7. મધ્યસ્થ એ પણ એક પ્રતિનિધિ માપ છે. તે એવું માપ દર્શાવે છે કે જે મધ્યમાં આવેલું છે. અડધા અવલોકનો તેની ઉપર અને અડધા અવલોકનો તેની નીચે આવેલાં છે.
8. લંબ આલેખ એ માહિતીની એક રજૂઆત છે જેનું નિરૂપણ સરખી પહોળાઈના લંબોનો ઉપયોગ કરી કરવામાં આવે છે.
9. દ્વિ-લંબ આલેખ આપણને એક જ આલેખમાં બે માહિતીની સરખામણી કરવામાં ઉપયોગી છે.
10. આપણા જીવનમાં ઘણી એવી પરિસ્થિતિ હોય છે કે જે ચોક્કસ બને છે, એવી કેટલીક હોય છે જે અશક્ય હોય છે અને કેટલીક બને કે ન બને તેવી હોય છે. આવી પરિસ્થિતિ બનવાની એક શક્યતા (તક) હોય છે.

પ્રકરણ 4

સાદા સમીકરણ

D2VSHM

4.1 મનવાંચન રમત ! (A Mind-reading Game !)

શિક્ષકે વર્ગમાં કહ્યું કે, તે આજે ગણિતનું નવું પ્રકરણ શરૂ કરે છે અને તે છે સરળ સમીકરણ. અપ્પુ, સરિતા અને અમીનાએ યાદ કર્યું કે ધોરણ-6ના બીજગણિતના પ્રકરણમાં તેઓ શું શીખ્યાં હતાં. તમે યાદ કર્યું ? આજે અપ્પુ, સરિતા અને અમીના ખૂબ જ ઉત્સાહી હતાં કારણ કે તેમણે તૈયાર કરેલ મનવાંચન રમત તેઓ આખા વર્ગમાં રજૂ કરવા માંગતાં હતાં.

શિક્ષકે તેમના ઉત્સાહને બિરદાવી તેઓને રમત રજૂ કરવા કહ્યું. અમીનાએ શરૂ કર્યું. તેણે સારાને કોઈ સંખ્યા ધારવાનું કહ્યું. પછી તેને 4 વડે ગુણી મળેલ પરિણામમાં 5 ઉમેરવાનું કહ્યું. પછી સારાને શું પરિણામ આવ્યું તે પૂછ્યું. તેણે કહ્યું કે તે 65 છે. અમીનાએ તરત જ સારાએ વિચારેલ સંખ્યા 15 છે તેમ કહ્યું. સારાએ હા પાડી. સારા સહિત સમગ્ર વર્ગને આશ્ચર્ય થયું.

હવે અપ્પુનો વારો હતો. તેણે બાલુને સંખ્યા ધારવાનું કહ્યું. તેને 10 વડે ગુણી મળેલા પરિણામમાંથી 20 બાદ કરવાનું કહ્યું. પછી તેણે બાલુને પૂછ્યું શું પરિણામ આવ્યું ? બાલુએ તેને 50 કહ્યા. અપ્પુએ તરત જ બાલુએ મનમાં વિચારેલ સંખ્યા કહી કે તે 7 છે. બાલુએ તેની ખાતરી કરી.

દરેક વિદ્યાર્થી જાણવા ઇચ્છતા હતા કે અપ્પુ, સરિતા અને અમીના ‘મનવાંચન’ કેવી રીતે કરતાં હશે ? તમને થતું હશે કે તે કામ કેવી રીતે કરતાં હશે ? આ પ્રકરણ અને પ્રકરણ 12ના અભ્યાસ પછી તમે ખૂબ જ સારી રીતે જાણી શકશો કે મનવાંચન કેવી રીતે થતું હશે.

4.2 સમીકરણ (Equation)ની રચના

3NURQT

ચાલો, અમીનાનું ઉદાહરણ લઈએ. અમીનાએ સારાને સંખ્યા ધારવાનું કહ્યું કે જે સંખ્યા અમીના જાણતી નથી. તેના માટે તે સંખ્યા 1, 2, 3, ..., 11, ..., 100, ... માંની કોઈ પણ હોઈ શકે. ચાલો, આ અજ્ઞાત સંખ્યાને x કહીએ. તમે y અથવા t અથવા કોઈ પણ મૂળાક્ષર xની જગ્યાએ લઈ શકો તેની સાથે કોઈ ફર્ક પડતો નથી. જ્યારે સારા ધારેલ સંખ્યાને 4 વડે ગુણે છે. તો તેને $4x$ મળે છે. મળેલા પરિણામમાં 5 ઉમેરતાં $(4x + 5)$ મળે છે. $(4x + 5)$ની કિંમત એ x ની કિંમત પર આધાર રાખે છે. આમ જો $x = 1$ હોય તો, $4x + 5 = 4 \times 1 + 5 = 9$, તેનો અર્થ એ થયો કે સારાએ 1 વિચાર્યો હોત તો પરિણામ 9 મળ્યું હોત તે જ રીતે તેણે 5 વિચાર્યા હોત તો ત્યારે $x = 5$, માટે $4x + 5 = 4 \times 5 + 5 = 25$, આમ સારાએ 5 પસંદ કર્યા હોત તો પરિણામ 25 મળ્યું હોત.

સારાએ વિચારેલ નંબર શોધવા ચાલો આપણે તેના જવાબ 65 પર જઈએ. આપણે x શોધવો છે તેથી,

$$4x + 5 = 65 \qquad (4.1)$$

આ સમીકરણનો ઉકેલ આપણને સારાએ મનમાં વિચારેલ સંખ્યા આપશે.

તે જ રીતે ચાલો આપણે અપ્પુનું ઉદાહરણ જોઈએ. ચાલો, બાલુએ ધારેલ સંખ્યાને y કહીએ અપ્પુએ બાલુને સંખ્યાને 10 વડે ગુણી મળેલા પરિણામમાંથી 20 બાદ કરવાનું કહ્યું તેથી બાલુ y ના ઉપયોગથી પહેલાં $10y$ અને તેના ઉપયોગથી $(10y - 20)$ મેળવશે. પરિણામ 50 દર્શાવે છે.

તેથી, $10y - 20 = 50 \qquad (4.2)$

આ સમીકરણનો ઉકેલ આપણને બાલુએ ધારેલ સંખ્યા આપશે.

4.3 આપણે જાણીએ છીએ તેની સમીક્ષા

સમીકરણ (4.1) અને (4.2) જુઓ. ધોરણ-6 માં આપણે સમીકરણ વિશે શું શીખ્યાં હતાં તે યાદ કરીએ. સમીકરણ એ ચલ પરની શરત છે. સમીકરણ (4.1)માં ચલ x છે જ્યારે સમીકરણ (4.2) માં ચલ y છે.

ચલ શબ્દનો અર્થ થાય કે, જે બદલાય છે, એટલે કે ચલની જુદી જુદી કિંમતો હોઈ શકે છે. તેની કિંમત ચોક્કસ હોતી નથી. ચલને હંમેશાં અંગ્રેજી મૂળાક્ષરો જેવા કે x, y, z, l, m, n, p વગેરે વડે દર્શાવવામાં આવે છે. ચલના ઉપયોગથી આપણે પદાવલિની રચના કરી શકીએ છીએ. સરવાળો, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકાર જેવી ક્રિયાઓ ચલ પર કરી આપણે પદાવલિની રચના કરી શકીએ છીએ. x નો ઉપયોગ કરી આપણે $(4x + 5)$ પદાવલિ રચીએ છીએ જેના માટે પહેલાં x ને 4 વડે ગુણી અને મળેલાં પરિણામમાં 5 ઉમેરવામાં આવે છે. તે જ રીતે yનો ઉપયોગ કરી પદાવલિ $(10y - 20)$ રચીએ છીએ. તેના માટે yને 10 સાથે ગુણી મળેલા પરિણામમાંથી 20 બાદ કરવામાં આવે છે. આ બધાં જ ઉદાહરણો પદાવલિનાં છે.

પદાવલિની કિંમત તેની રચના કરતાં ચલની પસંદ કરેલી કિંમત પર આધાર રાખે છે.

આપણે અગાઉ જોઈ ગયાં છીએ કે $x = 1$ હોય ત્યારે $4x + 5 = 9$ જ્યારે $x = 5$ ત્યારે $4x + 5 = 25$

તે જ રીતે

જ્યારે $x = 15$, $4x + 5 = 4\times15 + 5 = 65$

જ્યારે $x = 0$, $4x + 5 = 4 \times 0 + 5 = 5$ વગેરે.

સમીકરણ (4.1) એ ચલ x પર શરત આધારિત છે. તે દર્શાવે છે કે પદાવલિ $(4x + 5)$ ની કિંમત 65 છે. જો $x = 15$ લેવામાં આવે તો, આ શરત સંતોષાય છે. જે સમીકરણ $4x + 5 = 65$ નો ઉકેલ છે. જ્યારે $x = 5$ લેવામાં આવે ત્યારે $4x + 5 = 25$ થશે, 65 નહિ. આમ, $x = 5$ એ આપેલા સમીકરણનો ઉકેલ થશે નહિ. તે જ રીતે $x = 0$ એ સમીકરણનો ઉકેલ નથી. x ની 15 સિવાયની કોઈ પણ કિંમત $4x + 5 = 65$ શરતને સંતોષતી નથી.

પ્રયત્ન કરો

પદાવલિ $(10y - 20)$ની કિંમત તેના ચલ y પર આધાર રાખે છે. yની જુદી જુદી 5 કિંમત લઈ દરેક કિંમત માટે $(10y - 20)$ની કિંમત શોધો. ચકાસો કે આપણને $(10y - 20)$ની જુદી જુદી કિંમતો મળે છે. $10y - 20 = 50$ નો ઉકેલ તમને મળે છે ? જો તેનો ઉકેલ મળતો ન હોય, તો yની વધુ કિંમતો લઈ $10y - 20 = 50$ શરત સંતોષાય ત્યાં સુધી પ્રયત્ન કરો.

4.4 સમીકરણ શું છે ? (What Equation Is ?)

સમીકરણમાં હંમેશાં **સમાનતા**નું ચિહ્ન હોય છે. સમાનતાનું ચિહ્ન દર્શાવે છે કે પદાવલિમાં ચિહ્નની ડાબી બાજુ (ડાબા હાથની બાજુ અથવા LHS)ની કિંમત અને ચિહ્નની જમણી બાજુ (જમણા હાથની બાજુ અથવા RHS)ની કિંમત સરખી થાય છે. સમીકરણ (4.1) માં ડાબી બાજુ $(4x + 5)$ અને જમણી બાજુ 65 છે. સમીકરણ (4.2) માં ડાબી બાજુ $(10y - 20)$ અને જમણી બાજુ 50 છે.

જો LHS અને RHS વચ્ચે સમાનતા સિવાયની કોઈ પણ બીજી નિશાની હોય તો તે સમીકરણ હોતું નથી. આમ, $4x + 5 > 65$ એ સમીકરણ નથી, તે દર્શાવે છે કે $(4x + 5)$ની કિંમત 65 કરતાં વધુ છે. તે જ રીતે $4x + 5 < 65$ એ સમીકરણ નથી, તે દર્શાવે છે કે $(4x + 5)$ની કિંમત 65 થી ઓછી છે.

સમીકરણમાં મોટે ભાગે આપણે જોયું છે કે જમણી બાજુ સંખ્યા હોય છે. સમીકરણ (4.1)માં 65 અને સમીકરણ (4.2)માં 50 છે, પરંતુ હંમેશાં તે હોવું જરૂરી નથી. સમીકરણની જમણી બાજુ કોઈ ચલ સહિતની પદાવલિ પણ હોઈ શકે. ઉદાહરણ તરીકે, સમીકરણ

$$4x + 5 = 6x - 25\text{માં}$$

સમાનતાની નિશાનીની ડાબી બાજુ પદાવલિ $(4x + 5)$ અને જમણી બાજુ પદાવલિ $(6x - 25)$ છે.

ટૂંકમાં, સમીકરણ એ ચલ પરની શરત છે. શરત એટલી જ છે કે બંને પદાવલિની કિંમત સરખી હોવી જ જોઈએ. નોંધો કે બંને પદાવલિઓમાંથી કોઈ પણ એક પદાવલિમાં ચલ હોવો જ જોઈએ.

આપણે સમીકરણનો એક સાદો અને ઉપયોગી ગુણધર્મ નોંધીશું. $4x + 5 = 65$ અને $65 = 4x + 5$ એ એક જ સમીકરણ છે. તે જ રીતે, $6x - 25 = 4x + 5$ અને $4x + 5 = 6x - 25$ એક જ સમીકરણ છે. **જો સમીકરણમાં ડાબીબાજુ અને જમણી બાજુની પદાવલિઓની અદલાબદલી કરવામાં આવે તો પણ સમીકરણ તે જ રહે છે.** આ ગુણધર્મ આપણને સમીકરણનો ઉકેલ શોધવામાં વારંવાર ઉપયોગી થશે.

ઉદાહરણ 1 નીચેનાં વિધાનોને સમીકરણ સ્વરૂપે લખો :

(i) xના ત્રણ ગણા અને 11નો સરવાળો 32 છે.

(ii) એક સંખ્યાના 6 ગણામાંથી 5 બાદ કરતાં 7 મળે.

(iii) mનો ચોથો ભાગ એ 7 કરતાં 3 વધારે છે. (mનો ચોથો ભાગ અને 7 નો તફાવત 3 મળે.)

(iv) એક સંખ્યાના ત્રીજા ભાગમાં 5 ઉમેરતાં 8 મળે.

ઉકેલ

(i) xના ત્રણ ગણા $3x$ છે.

$3x$ અને 11નો સરવાળો $3x + 11$ થાય, જે સરવાળો 32 છે.

તેથી સમીકરણ $3x + 11 = 32$.

(ii) તે સંખ્યા ધારો કે z છે.

z ને 6 વડે ગુણતાં $6z$ થાય.

$6z$ માંથી 5 બાદ કરતાં $6z - 5$ મળે. અહીં પરિણામ 7 છે.

આમ, સમીકરણ $6z - 5 = 7$ થાય.

(iii) mનો ચોથો ભાગ $\frac{m}{4}$ છે.

તે 7 કરતાં 3 વધુ છે.

તેનો અર્થ કે તેમનો તફાવત $(\frac{m}{4} - 7)$ એ 3 છે.

આમ, સમીકરણ $\frac{m}{4} - 7 = 3$.

(iv) તે સંખ્યા ધારો કે n છે. nનો ત્રીજો ભાગ $\frac{n}{3}$ છે.

તેમાં 5 ઉમેરતાં $\frac{n}{3} + 5$ મળે. આ પરિણામ 8 છે.

આમ, સમીકરણ $\frac{n}{3} + 5 = 8$.

ઉદાહરણ 2 નીચેનાં સમીકરણોને વિધાન સ્વરૂપમાં લખો :

(i) $x - 5 = 9$ (ii) $5p = 20$ (iii) $3n + 7 = 1$ (iv) $\frac{m}{5} - 2 = 6$

ઉકેલ (i) x માંથી 5 બાદ કરતાં 9 મળે.

(ii) pના 5 ગણા એ 20 છે.

(iii) nના 3 ગણામાં 7 ઉમેરતાં 1 મળે.

(iv) mના એક પંચમાંશ ભાગમાંથી 2 બાદ કરતાં 6 મળે.

અહીં અગત્યની બાબત એ છે કે આપેલ સમીકરણ માટે એક જ નહિ પણ ઘણાં બધાં વિધાનો લખી શકાય. ઉદાહરણ તરીકે ઉપરના સમી (i) ને તમે કહી શકો કે :

x માંથી 5 બાદ કરતાં 9 મળે.

અથવા કોઈ સંખ્યા x એ 9 કરતાં 5 વધુ છે.

અથવા કોઈ સંખ્યા x એ 9 કરતાં 5 જેટલી મોટી છે.

અથવા x અને 5નો તફાવત 9 છે. વગેરે...

પ્રયત્ન કરો

સમીકરણ (ii), (iii) અને (iv)ને એકથી વધુ રીતે લખો.

ઉદાહરણ 3 નીચેની પરિસ્થિતિ જુઓ :

રાજુના પિતાની ઉંમર રાજુની ઉંમરના ત્રણ ગણાથી 5 વધુ છે. રાજુના પિતા 44 વર્ષના છે. રાજુની ઉંમર શોધવા માટેનું સમીકરણ બનાવો.

ઉકેલ આપણે રાજુની ઉંમર જાણતાં નથી. ચાલો, આપણે તેને y વર્ષ લઈએ. રાજુની ઉંમરના ત્રણ ગણા $3y$ વર્ષ થશે. રાજુના પિતાની ઉંમર $3y$ કરતાં 5 વધુ થશે. તેથી રાજુના પિતા $(3y + 5)$ વર્ષના થશે. પરંતુ રાજુના પિતાની ઉંમર 44 વર્ષ આપેલ છે.

તેથી, $$3y + 5 = 44 \qquad (4.3)$$

આ y ચલનું સમીકરણ છે. જો તેને ઉકેલવામાં આવે તો તે રાજુની ઉંમર આવશે.

ઉદાહરણ 4 એક દુકાનદાર બે પ્રકારની પેટીઓમાં કેરીઓ વેચે છે. એક નાની અને બીજી મોટી છે. મોટી પેટીમાં 8 નાની પેટી જેટલી અને બીજી ચાર છૂટક કેરી સમાવી શકાય છે. દરેક નાની પેટીમાં આપેલી કેરીની સંખ્યા જાણવા સમીકરણ રચો. મોટી પેટીમાં આપેલી કેરીઓની સંખ્યા 100 છે.

ઉકેલ નાની પેટીમાં m કેરીઓ સમાવી શકાય છે. મોટી પેટીમાં mના 8 ગણાથી 4 વધુ સમાવી શકાય છે. આમ તે $8m + 4$ કેરીઓ છે, પરંતુ કુલ 100 કેરીઓ આપેલ છે. આમ,

$$8m + 4 = 100 \qquad (4.4)$$

સમીકરણ ઉકેલીને નાની પેટીમાં રહેલી કેરી તમે શોધી શકશો.

સ્વાધ્યાય 4.1

1. આપેલા કોષ્ટકનું છેલ્લુ ખાનું પૂર્ણ કરો.

અનુક્રમ	સમીકરણ	કિંમત	કહો કે સમીકરણનું સમાધાન થાય છે. (હા/ના)
(i)	$x + 3 = 0$	$x = 3$	
(ii)	$x + 3 = 0$	$x = 0$	
(iii)	$x + 3 = 0$	$x = -3$	
(iv)	$x - 7 = 1$	$x = 7$	
(v)	$x - 7 = 1$	$x = 8$	
(vi)	$5x = 25$	$x = 0$	
(vii)	$5x = 25$	$x = 5$	
(viii)	$5x = 25$	$x = -5$	
(ix)	$\frac{m}{3} = 2$	$m = -6$	
(x)	$\frac{m}{3} = 2$	$m = 0$	
(xi)	$\frac{m}{3} = 2$	$m = 6$	

2. કૌંસમાં આપેલી કિંમતો આપેલાં સમીકરણનો ઉકેલ છે કે નહીં તે તપાસો.
   (a) $n + 5 = 19$ $(n = 1)$ (b) $7n + 5 = 19$ $(n = -2)$ (c) $7n + 5 = 19$ $(n = 2)$
   (d) $4p - 3 = 13$ $(p = 1)$ (e) $4p - 3 = 13$ $(p = -4)$ (f) $4p - 3 = 13$ $(p = 0)$
3. નીચેનાં સમીકરણો ચલની જુદી જુદી કિંમત મૂકી ઉકેલો. (પ્રયત્ન અને ભૂલની રીતે)
   (i) $5p + 2 = 17$ (ii) $3m - 14 = 4$
4. નીચે આપેલાં વિધાનોને સમીકરણ સ્વરૂપે લખો :
   (i) x અને 4નો સરવાળો 9 છે. (ii) y માંથી 2 બાદ કરતાં 8 મળે.
   (iii) a ના 10 ગણા 70 છે. (iv) એક સંખ્યા bને 5 વડે ભાગતાં 6 મળે.
   (iv) t નો $\frac{3}{4}$ ભાગ એ 15 છે. (iv) mના 7 ગણામાં 7 ઉમેરતાં 77 મળે.
   (vii) કોઈ સંખ્યા xના એક ચતુર્થાંશ માંથી 4 બાદ કરતાં 4 મળે.
   (viii) yના 6 ગણામાંથી 6 બાદ કરતાં 60 મળે છે.
   (ix) જો તમે zના ત્રીજા ભાગમાં 3 ઉમેરો તો તમને 30 મળે છે.
5. નીચે આપેલાં સમીકરણોને વિધાનના સ્વરૂપે લખો :
   (i) $p + 4 = 15$ (ii) $m - 7 = 3$ (iii) $2m = 7$ (iv) $\frac{m}{5} = 3$
   (v) $\frac{3m}{5} = 6$ (vi) $3p + 4 = 25$ (vii) $4p - 2 = 18$ (viii) $\frac{p}{2} + 2 = 8$

6. નીચેની સ્થિતિ દર્શાવતાં સમીકરણ બનાવો :

(i) ઈરફાને કહ્યું કે તેની પાસે પરમિત પાસેની લખોટીના 5 ગણા કરતાં 7 લખોટી વધુ છે. ઈરફાન પાસે 37 લખોટી છે. (પરમિત પાસેની લખોટીની સંખ્યા માટે m ધારો.)

(ii) લક્ષ્મીના પિતા 49 વર્ષના છે. તે લક્ષ્મીની ઉંમરના ત્રણ ગણાથી 4 વર્ષ મોટા છે. (લક્ષ્મીની ઉંમર માટે y ધારો.)

(iii) શિક્ષકે વર્ગમાં કહ્યું કે સૌથી વધારે ગુણ મેળવનાર વિદ્યાર્થીના ગુણ વર્ગના સૌથી ઓછા ગુણ મેળવનાર વિદ્યાર્થીના ગુણના બે ગણાથી 7 વધારે છે. સૌથી વધારે ગુણ 87 છે. (સૌથી ઓછા ગુણ માટે l ધારો.)

(iv) એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણમાં શિરોબિંદુકોણ એ આધારકોણ કરતાં બે ગણો છે. (આધારકોણનું માપ b ધારો. યાદ રાખો કે ત્રિકોણના ત્રણેય ખૂણાઓનો સરવાળો 180 અંશ છે.)

4.4.1 સમીકરણ ઉકેલવા (Solving an Equation)

3P4MSG

સમાનતાની ચકાસણી કરો. $8 - 3 = 4 + 1$ (4.5)

સમીકરણ (4.5) માં સમાનતા જળવાઈ છે. કારણ કે અહીં બંને બાજુઓ સમાન છે. (જે 5 છે.)

- ચાલો, મળેલા પરિણામની બંને બાજુ 2 ઉમેરીએ.

  ડાબી બાજુ $= 8 - 3 + 2 = 5 + 2 = 7$ જમણી બાજુ $= 4 + 1 + 2 = 5 + 2 = 7$

  ફરીથી સમાનતા જળવાઈ છે. (એટલે કે ડાબી બાજુ અને જમણી બાજુ સરખી છે.)

  આમ, જો આપણે સમાનતાની બંને બાજુ સરખી સંખ્યા ઉમેરીએ તો સમાનતા જળવાઈ રહે છે.

- ચાલો આપણે મળેલા પરિણામમાંથી બંને બાજુએથી 2 બાદ કરીએ,

  ડાબી બાજુ $= 8 - 3 - 2 = 5 - 2 = 3$ જમણી બાજુ $= 4 + 1 - 2 = 5 - 2 = 3$

  ફરીથી સમાનતા જળવાય છે.

  આમ, જો આપણે સમાનતાની બંને બાજુમાંથી સરખી સંખ્યા બાદ કરીએ તો સમાનતા જળવાઈ રહે છે.

- તે જ રીતે, સમાનતાની બંને બાજુ સરખી સંખ્યા વડે ગુણીએ અથવા શૂન્ય સિવાયની સરખી સંખ્યા વડે ભાગીએ તો, પણ સમાનતા જળવાઈ રહે છે.

  ઉદાહરણ તરીકે, ચાલો આપણે સમાનતાની બંને બાજુને 3 વડે ગુણીએ,

  આપણને ડાબી બાજુ $= 3 \times (8 - 3) = 3 \times 5 = 15$, જમણી બાજુ $= 3 \times (4 + 1) = 3 \times 5 = 15$ મળશે.

  આમ, સમાનતા જળવાઈ રહે છે.

  ચાલો, આપણે સમાનતાની બંને બાજુને 2 વડે ભાગીએ.

  ડાબી બાજુ $= (8 - 3) \div 2 = 5 \div 2 = \frac{5}{2}$ જમણી બાજુ $= (4 + 1) \div 2 = 5 \div 2 = \frac{5}{2}$

  ફરીથી સમાનતા જળવાય છે.

જો આપણે બીજી કોઈ પણ સમાનતા લઈશું તો આપણે આ જ પ્રકારનો નિષ્કર્ષ શોધી શકીશું.

આપણે ખાસ કરીને એ નિયમને પણ ધ્યાનમાં રાખવો જોઈએ કે જ્યારે સમાનતાની બંને બાજુ જુદી જુદી સંખ્યા ઉમેરવામાં આવે તો તે કિસ્સામાં સમાનતા જળવાઈ રહેતી નથી (એટલે કે બંને બાજુ સરખી રહેતી નથી).

આ ઉદાહરણ માટે આપણે ફરીથી સમાનતા (4.5) લઈએ.

$$8 - 3 = 4 + 1$$

ડાબી બાજુ 2 અને જમણી બાજુ 3 ઉમેરો. નવી ડાબી બાજુ $8 - 3 + 2 = 5 + 2 = 7$ અને નવી જમણી બાજુ $4 + 1 + 3 = 5 + 3 = 8$ થશે. અહીં સમાનતા જળવાઈ રહેતી નથી કારણ કે નવી ડાબી બાજુ અને નવી જમણી બાજુ સરખી નથી.

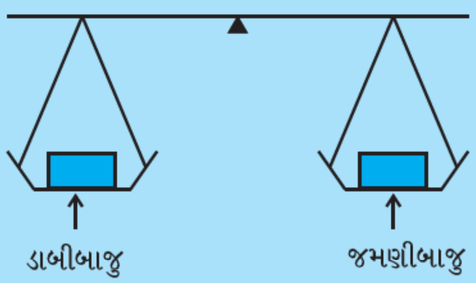
આપણે સમાનતાની બંને બાજુ કોઈ ગાણિતિક પ્રક્રિયા એક જ સંખ્યા વડે ન કરીએ તો સમાનતા જળવાતી નથી.

સમીકરણ એ ચલ ધરાવતી સમાનતા છે.

આ નિષ્કર્ષ સમીકરણ માટે પણ સાચો છે. દરેક સમીકરણમાં ચલ એ માત્ર સંખ્યાનું પ્રતિનિધિત્વ કરે છે.

સમીકરણને વારંવાર **વજન સંતુલન** જેવું કહેવામાં આવે છે.

સમીકરણ પરની ગાણિતિક ક્રિયાઓ એ ત્રાજવાના પલ્લામાં વજન ઉમેરતાં અને વજન બહાર કાઢવા જેવી ક્રિયા છે. સમીકરણ એ એવું ત્રાજવું છે કે જેનાં બંને પલ્લાંમાં એકસરખું વજન હોય છે. કયા કિસ્સામાં ત્રાજવાની દાંડી એકદમ આડી રહે છે ? જો આપણે ત્રાજવાંના બંને પલ્લાંમાં સરખું વજન ઉમેરીશું તો દાંડી આડી રહેશે. તે જ રીતે જો આપણે બંને પલ્લામાંથી સરખું વજન દૂર કરીશું તો દાંડી આડી રહેશે. બીજી બાજુ આપણે પલ્લાઓમાં જુદું જુદું વજન ઉમેરીશું કે પલ્લાંઓમાંથી જુદું જુદું વજન દૂર કરીશુ તો ત્રાજવું કોઈ એક તરફથી ઊંચું થઈ જશે. એટલે કે ત્રાજવાની દાંડી આડી રહેશે નહીં.



સંતુલિત સમીકરણ એ બંને પલ્લામાં સરખું વજન ધરાવતા ત્રાજવા જેવું છે.

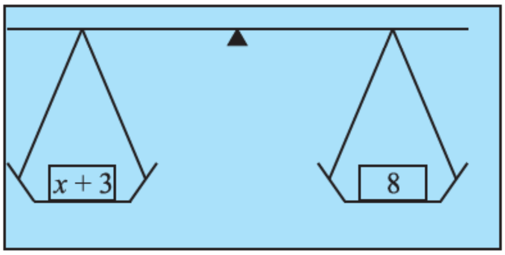
આ નિયમનો ઉપયોગ આપણે સમીકરણના ઉકેલ માટે કરીશું.

અલબત્ત, અહીં ત્રાજવું કાલ્પનિક છે અને વજન તરીકે ઉપયોગમાં લેવામાં આવતી સંખ્યાઓ પ્રત્યક્ષ રીતે એકબીજા સામે સંતુલન માટે વાપરી શકાય. આનો મુખ્ય હેતુ નિયમને રજૂ કરવા માટેનો છે. આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ.

- સમીકરણ વિચારો : $x + 3 = 8$ (4.6)

  આપણે સમીકરણની બંને બાજુથી 3 બાદ કરીશું.

  તેથી નવી ડાબી બાજુ $x + 3 - 3 = x$ થશે અને નવી જમણી બાજુ $8 - 3 = 5$ થશે.



શા માટે આપણે 3 બાદ કરીએ છીએ ? બીજી કોઈ સંખ્યા કેમ નહિ ? 3 ઉમેરવા પ્રયત્ન કરો. શું તે ઉપયોગી થશે ? શા માટે નહીં ? કારણ કે 3ની બાદબાકીથી ડાબી બાજુના x રહે છે.

અહીં સમાનતા બદલાતી નથી. તેથી આપણને મળે છે,

નવી ડાબી બાજુ = નવી જમણી બાજુ અથવા $x = 5$

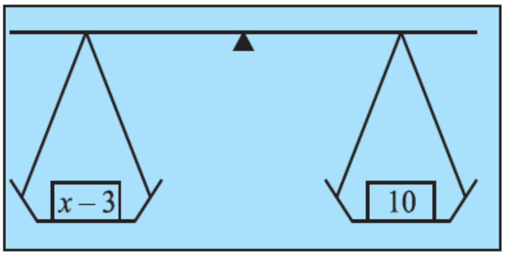
જે આપણને જોઈતો સમીકરણ (4.6) નો ઉકેલ છે.

આપણે સાચા છીએ તે ચકાસીએ. આપણે મૂળ સમીકરણમાં $x = 5$ મૂકીશું તો આપણને ડાબી બાજુ $= x + 3 = 5 + 3 = 8$ મળશે કે, જે જમણી બાજુ જેટલી છે.

સમીકરણની બંને બાજુ સાચી ગાણિતિક પ્રક્રિયાઓ (એટલે કે 3 બાદ કરવા) કરીનેઆપણે સમીકરણના ઉકેલ સુધી પહોંચી શક્યા.

- ચાલો, બીજું એક સમીકરણ જોઈએ. $x - 3 = 10$ (4.7)

અહીં આપણે શું કરીશું ? આપણે બંને બાજુ 3 ઉમેરીશું. આમ, કરવાથી આપણે સમાનતા જાળવી શકીશું અને ડાબી બાજએ માત્ર x રહશે.



નવી ડાબી બાજુ $= x - 3 + 3 = x$

નવી જમણી બાજુ $= 10 + 3 = 13$

આમ $x = 13$, કે જે માગેલો ઉકેલ છે.

$\therefore$ મૂળ સમીકરણ (4.7) માં $x = 13$ મૂકતાં આપણે ખાતરી કરી શકીશું કે ઉકેલ સાચો છે.

મૂળ સમીકરણની ડાબી બાજુ $= x - 3 = 13 - 3 = 10$

જે આપેલ જમણી બાજુ જેટલી જ છે.

- તે જ રીતે ચાલો બીજાં સમીકરણો જોઈએ.

$$5y = 35 \qquad (4.8)$$

$$\frac{m}{2} = 5 \qquad (4.9)$$

પહેલા કિસ્સામાં, આપણે બંને બાજુને 5 વડે ભાગીશું જે આપણને ડાબી બાજુએ y આપશે.

નવી ડાબી બાજુ $= \frac{5y}{5} = \frac{5 \times y}{5} = y$ નવી જમણી બાજુ $= \frac{35}{5} = \frac{5 \times 7}{5} = 7$ તેથી,

આ માંગેલો ઉકેલ છે. આપણે સમીકરણ(4.8)માં yની જગ્યાએ 7 મૂકી તપાસીશું કે તે સમીકરણ સંતોષે છે.

બીજા કિસ્સામાં, આપણે બંને બાજુને 2 વડે ગુણીશું જે આપણને ડાબી બાજુએ m આપશે.

નવી ડાબી બાજુ $= \frac{m}{2} \times 2 = m$. નવી જમણી બાજુ $= 5 \times 2 = 10$

તેથી, $m = 10$ (તે માંગેલો ઉકેલ છે. તમે ચકાસો કે ઉકેલ સાચો છે.)

ઉપરનાં ઉદાહરણોમાંથી આપણે એક જોયું કે કઈ ક્રિયાની પસંદગી કરવી તે સમીકરણ પર આધાર રાખે છે. આપણો પ્રયત્ન એ જ રહેવો જોઈએ કે સમીકરણમાંથી ચલને અલગ કરવો. કેટલીક વખતે આ કરવા માટે આપણને એક કરતાં વધુ ગાણિતિક પ્રક્રિયાની જરૂર પડશે. આ બાબત ધ્યાનમાં રાખી આપણે કેટલાંક વધુ સમીકરણો ઉકેલીએ.

ઉદાહરણ 5 ઉકેલો : (a) $3n + 7 = 25$ (4.10)

(b) $2p - 1 = 23$ (4.11)

ઉકેલ

(a) આપણે ક્રમિક પગલાં પર જઈ ડાબી બાજુમાંથી nને અલગ કરીશું. ડાબી બાજુ $3n + 7$ છે. તેમાંથી પહેલાં આપણે 7 બાદ કરીને $3n$ મેળવીશું. બીજા પગલામાં આપણે મળેલ પરિણામને 3 વડે ભાગી n મેળવીશું.

યાદ રાખો કે સમીકરણની બંને બાજુ એકસરખી પ્રક્રિયા કરીશું તેથી, બંને બાજુથી 7 બાદ કરીએ, તો

$$3n + 7 - 7 = 25 - 7 \qquad \text{(પગલું 1)}$$

અથવા $3n = 18$

હવે, બંને બાજુને 3 વડે ભાગીશું.

$$\frac{3n}{3} = \frac{18}{3} \qquad \text{(પગલું 2)}$$

અથવા $n = 6$ કે જે ઉકેલ છે.

(b) અહીં આપણે શું કરીશું ? પહેલાં આપણે બંને બાજુ 1 ઉમેરીશું.

$$2p - 1 + 1 = 23 + 1 \qquad \text{(પગલું 1)}$$

અથવા $2p = 24$

હવે, બંને બાજુને 2 વડે ભાગીશું.

$$\frac{2p}{2} = \frac{24}{2} \qquad \text{(પગલું 2)}$$

અથવા $p = 12$ કે જે ઉકેલ છે.

આપણે મેળવેલા ઉકેલને ચકાસવાની એક સારી આદત કેળવવી જોઈએ.

જોકે તે આપણે અગાઉના સમીકરણ (a) માટે કર્યું નથી. ચાલો, આપણે આ ઉદાહરણ માટે તે કરીએ. મેળવેલ ઉકેલ $p = 12$ સમીકરણની અંદર મૂકતાં.

ડા.બા $= 2p - 1 = 2 \times 12 - 1 = 24 - 1$

$= 23 =$ જ.બા

આમ, ઉકેલની ખરાઈ આ રીતે તપાસી શકાશે.

શા માટે તમે (a)ના ઉકેલને પણ ન ચકાસો ?

હવે, આપણે પાછા જઈ અપ્પુ, સરિતા અને અમીનાએ રજૂ કરેલી મનવાંચન રમતનો જવાબ તેમણે કેવી રીતે મેળવ્યો તે જોઈએ. આ માટે સમીકરણ (4.1) અને (4.2) જુઓ કે જે ક્રમશઃ અમીના અને અપ્પુના ઉદાહરણને સંગત છે.

- પહેલાં સમીકરણ $4x + 5 = 65$ લેતાં, (4.1)

  બંને બાજુ 5 બાદ કરતાં, $4x + 5 - 5 = 65 - 5$

  એટલે કે $4x = 60$

  બંને બાજુને 4 વડે ભાગતાં આપણને x અલગ મળશે. $\frac{4x}{4} = \frac{60}{4}$

  $x = 15$ કે જે ઉકેલ છે. (ચકાસો કે તે સાચો છે)

- હવે, $10y - 20 = 50$ લેતાં, (4.2)

  સમીકરણની બંને બાજુ 20 ઉમેરતાં, $10y - 20 + 20 = 50 + 20$ એટલે કે, $10y = 70$

  બંને બાજુને 10 વડે ભાગતાં, $\frac{10y}{10} = \frac{70}{10}$ મળશે.

  $y = 7$ કે જે ઉકેલ છે. (ચકાસો કે તે સાચો છે.)

હવે, તમને ખાતરી થશે કે અપ્પુ, સરિતા અને અમીનાએ આપેલો જવાબ ખરેખર આ જ હતો. તેઓ સમીકરણની રચના અને તેનો ઉકેલ મેળવવાનું શીખ્યાં હતાં. તેથી જ તો તેઓ મનવાંચન રમત રચી શક્યા અને સમગ્ર વર્ગ પર પ્રભાવ પાડી શક્યા. ફરીથી આપણે આ ક્રિયા 4.7 માં જોઈશું.

સ્વાધ્યાય 4.2

1. ચલને અલગ કરવા માટેનું પ્રથમ પગલું કહો અને પછી ઉકેલ શોધો.

(a) $x - 1 = 0$ (b) $x + 1 = 0$ (c) $x - 1 = 5$ (d) $x + 6 = 2$

(e) $y - 4 = -7$ (f) $y - 4 = 4$ (g) $y + 4 = 4$ (h) $y + 4 = -4$

2. ચલને અલગ કરવા માટેનું પ્રથમ પગલું કહો અને પછી ઉકેલ શોધો.

(a) $3l = 42$ (b) $\frac{b}{2} = 6$ (c) $\frac{p}{7} = 4$ (d) $4x = 25$

(e) $8y = 36$ (f) $\frac{z}{3} = \frac{5}{4}$ (g) $\frac{a}{5} = \frac{7}{15}$ (h) $20t = -10$

3. ચલને અલગ કરવાનાં પગલાં કહો અને પછી ઉકેલ શોધો.

(a) $3n - 2 = 46$ (b) $5m + 7 = 17$ (c) $\frac{20p}{3} = 40$ (d) $\frac{3p}{10} = 6$

4. નીચેનાં સમીકરણ ઉકેલો.

(a) $10p = 100$ (b) $10p + 10 = 100$ (c) $\frac{p}{4} = 5$ (d) $\frac{-p}{3} = 5$

(e) $\frac{3p}{4} = 6$ (f) $3s = -9$ (g) $3s + 12 = 0$ (h) $3s = 0$

(i) $2q = 6$ (j) $2q - 6 = 0$ (k) $2q + 6 = 0$ (l) $2q + 6 = 12$

4.5 વધારે સમીકરણ (More Equations)

ચાલો વધુ મહાવરા માટે વધુ સમીકરણ ઉકેલીએ. જ્યારે સમીકરણને ઉકેલીશું ત્યારે આપણે સંખ્યાના સ્થાનાંતર વિશે શીખીશું એટલે કે સંખ્યાને એક બાજુથી બીજી બાજુ ખસેડવી. સમીકરણમાં બંને બાજુ સંખ્યાને ઉમેરવા અને બાદ કરવાની જગ્યાએ આપણે સંખ્યાનું સ્થાનાંતર કરીશું.

ઉદાહરણ 6 ઉકેલો $12p - 5 = 25$ (4.12)

ઉકેલ

- સમીકરણની બંને બાજુએ 5 ઉમેરતાં,

$12p - 5 + 5 = 25 + 5$ તેથી, $12p = 30$

- બંને બાજુ 12 વડે ભાગતાં $\frac{12p}{12} = \frac{30}{12}$ તેથી $p = \frac{5}{2}$

ચકાસણી સમી. 4.12 ની ડાબી બાજુમાં $p = \frac{5}{2}$ મૂકતાં,

ડાબા. $= 12 \times \frac{5}{2} - 5 = 6 \times 5 - 5$

$= 30 - 5 = 25 =$ જબા.

નોંધ : બંને બાજુ 5 ઉમેરવા એટલે (–5) નું સ્થાનાંતર કરવું

$12p - 5 = 25$

$\therefore 12p = 25 + 5$

બાજુ બદલવી એટલે સ્થાનાંતર કરવું જ્યારે સંખ્યાનું સ્થાનાંતર કરીએ છીએ ત્યારે તેની નિશાની બદલીએ છીએ.

આપણે જોયું કે જ્યારે સમીકરણ ઉકેલવાનું હોય ત્યારે સમીકરણની બંને બાજુ સરખી સંખ્યા ઉમેરવાની અથવા બાદબાકી કરવાની પ્રક્રિયાનો સામાન્ય રીતે ઉપયોગ કરીએ છીએ. સંખ્યાનું સ્થાનાંતર (એટલે કે સંખ્યાની બાજુ બદલવી) એ બંને બાજુ સંખ્યાના સરવાળા અથવા બાદબાકી કરવા જેવી જ ક્રિયા છે. આમ કરવાથી સંખ્યાનું ચિહ્ન બદલાઈ જાય છે. આ સંખ્યા અને પદાવલિ બંનેને લાગુ પડે છે. ચાલો આપણે સ્થાનાંતરની પદ્ધતિનાં વધુ બે ઉદાહરણ લઈએ.

બંને બાજુ સરવાળો અથવા બાદબાકી	સ્થાનાંતર
(i) $3p - 10 = 5$ બંને બાજુ 10 ઉમેરતાં $3p - 10 + 10 = 5 + 10$ તેથી $3p = 15$	(i) $3p - 10 = 5$ (-10) નું ડાબેથી જમણે સ્થાનાંતર કરતાં, (સ્થાનાંતરમાં (-10) નું $+ 10$ બને છે) $3p = 5 + 10$ અથવા $3p = 15$
(ii) $5x + 12 = 27$ બંને બાજુએથી 12 બાદ કરતાં $5x + 12 - 12 = 27 - 12$ તેથી $5x = 15$	(ii) $5x + 12 = 27$ $+12$નું સ્થાનાંતર કરતાં, (સ્થાનાંતરમાં $+12$નું -12 બને છે.) $5x = 27 - 12$ અથવા $5x = 15$

હવે આપણે વધુ બે સમીકરણ ઉકેલીશું. તમે જોઈ શકશો કે જો તે કૌંસમાં આપેલ હોય તો પ્રક્રિયા કરતાં પહેલાં તેમને હલ કરવાની (ઉકેલવાની) જરૂર છે.

ઉદાહરણ 7 ઉકેલો

(a) $4(m + 3) = 18$ (b) $-2(x + 3) = 8$

ઉકેલ

(a) $4(m + 3) = 18$

ચાલો, બંને બાજુને 4 વડે ભાગીએ. ડાબી બાજુનો કૌંસ દૂર કરતાં,

$m + 3 = \frac{18}{4}$ અથવા $m + 3 = \frac{9}{2}$

તેથી, $m = \frac{9}{2} - 3$ (3ને જમણી બાજુ ખસેડતાં)

તેથી, $m = \frac{3}{2}$ (માંગેલો ઉકેલ) $\left(\text{અહીં } \frac{9}{2} - 3 = \frac{9}{2} - \frac{6}{2} = \frac{3}{2}\right)$

ચકાસો : ડાબી બાજુ $= 4\left[\frac{3}{2} + 3\right] = 4 \times \frac{3}{2} + 4 \times 3 = 2 \times 3 + 4 \times 3$ $\left[m = \frac{3}{2} \text{ મૂકતાં}\right]$

$= 6 + 12 = 18 =$ જમણીબાજુ

(b) $-2(x + 3) = 8$

આપણે બંને બાજુને (-2) વડે ભાગી, ડાબી બાજુના કૌંસને દૂર કરતાં,

$x + 3 = -\frac{8}{2}$ અથવા $x + 3 = -4$

એટલે કે, $x = -4 - 3$; (3ને જમણી બાજુ ખસેડતાં) અથવા $x = -7$ (માંગેલો ઉકેલ)

ચકાસો : ડાબી બાજુ $= -2\,(-7+3) = -2(-4)$

$= 8 =$ જમણીબાજુ

4.6 ઉકેલથી સમીકરણ સુધી (From Solution to Equation)

અતુલ હંમેશાં જુદું જ વિચારતો હોય છે. સમીકરણ ઉકેલવા કોઈએ લીધેલાં ક્રમિક પગલાં તેણે જોયાં તેને જિજ્ઞાસા થઈ કે શા માટે ઊલટાં પગલાં ન લઈ શકાય.

સમીકરણ $\rightarrow$ ઉકેલ (સામાન્ય પથ)

ઉકેલ $\rightarrow$ સમીકરણ (ઊલટો પથ)

D1BH7R

પ્રયત્ન કરો

$x = 5$ લઈ આરંભ કરો અને બે જુદાં સમીકરણ બનાવો. તમારા સહાધ્યાયીને આ સમીકરણ ઉકેલવા કહો. ચકાસો કે તેણે મેળવેલ ઉકેલ $x = 5$ છે.

તે નીચે આપેલા પથને અનુસરે છે :

આરંભ	$\downarrow$	$x = 5$	$\uparrow$
બંને બાજુને 4 વડે ગુણો		$4x = 20$	બંને બાજુને 4 વડે ભાગો.
બંને બાજુમાંથી 3 બાદ કરો	$\downarrow$	$4x - 3 = 17$	$\uparrow$ બંને બાજુ 3 ઉમેરો.

પરિણામે સમીકરણ મળ્યું. આપણે જમણી બાજુ દર્શાવ્યા પ્રમાણે ઊલટા માર્ગે ક્રમિક પગલાં પ્રમાણે જઈએ તો સમીકરણનો ઉકેલ મેળવી શકીએ છીએ.

હેતલને રસ પડ્યો. તેણે આરંભનું પદ સમાન લઈ બીજાં સમીકરણ રચવાની શરૂઆત કરી.

$$x = 5$$

બંને બાજુને 3 વડે ગુણતાં, $3x = 15$

બંને બાજુ 4 ઉમેર્યા $3x + 4 = 19$

$y = 4$ લઈ બે જુદાં જુદાં સમીકરણ બનાવો. તમારા ત્રણ મિત્રોને આમ કરવાનું કહો. શું તેમનાં સમીકરણો તમારાથી ભિન્ન છે ?

શું એ સારું ના કહેવાય કે ? તમે માત્ર સમીકરણનો ઉકેલ નથી શોધતાં પરંતુ તમે સમીકરણ પણ બનાવી શકો છો ? વધુમાં તમે જોયું હશે કે આપેલા સમીકરણનો માત્ર તમે એક જ ઉકેલ શોધી શકો છો, પરંતુ ઉકેલ આપ્યો હોય તો તમે ઘણાં સમીકરણ બનાવી શકો.

હવે, સારા ઇચ્છે છે કે પોતે શું વિચારે છે તે વર્ગ જાણે. તેણે કહ્યું, હેતલનું સમીકરણ લઈ અને તેને વિધાન સ્વરૂપમાં મૂકી એક કોયડો બનાવું છું. ઉદાહરણ તરીકે કોઈ એક સંખ્યા ધારો. તેને ત્રણ વડે ગુણી મળેલા પરિણામમાં 4 ઉમેરો. કેટલો સરવાળો આવ્યો તે તમે મને કહો.

પ્રયત્ન કરો

એકનો ઉકેલ 11 અને બીજાનો ઉકેલ 100 હોય તેવા બે કોયડાઓ બનાવો.

જો સરવાળો 19 હોય તો હેતલે મેળવેલ સમીકરણથી આપેલ કોયડાનો ઉકેલ આપણને આપશે. ટૂંકમાં આપણે જાણીએ છીએ કે તે 5 છે. કારણ કે હેતલે શરૂઆત તેનાથી કરી હતી.

તેણે અપ્પુ, અમીના અને સરિતા તરફ ફરીને પૂછ્યું કે તેમણે કોયડો આ રીતે બનાવ્યો હતો ? ત્રણે જણાએ કહ્યું, ‘હા’ !

આંકડાકીય કોયડા અને બીજા તેવા ઉખાણાં આપણે કેવી રીતે બનાવી શકીએ તે હવે જાણીએ છીએ.

સ્વાધ્યાય 4.3

1. નીચેનાં સમીકરણો ઉકેલો :

(a) $2y + \frac{5}{2} = \frac{37}{2}$ (b) $5t + 28 = 10$ (c) $\frac{a}{5} + 3 = 2$ (d) $\frac{q}{4} + 7 = 5$

(e) $\frac{5}{2}x = -10$ (f) $\frac{5}{2}x = \frac{25}{4}$ (g) $7m + \frac{19}{2} = 13$ (h) $6z + 10 = -2$

(i) $\frac{3l}{2} = \frac{2}{3}$ (j) $\frac{2b}{3} - 5 = 3$

2. નીચેનાં સમીકરણો ઉકેલો :

(a) $2(x + 4) = 12$ (b) $3(n - 5) = 21$ (c) $3(n - 5) = -21$

(d) $-4(2 + x) = 8$ (e) $4(2 - x) = 8$

3. નીચેનાં સમીકરણો ઉકેલો :

(a) $4 = 5(p - 2)$ (b) $-4 = 5(p - 2)$ (c) $16 = 4 + 3(t + 2)$

(d) $4 + 5(p - 1) = 34$ (e) $0 = 16 + 4(m - 6)$

4. (a) $x = 2$ થી શરૂ કરીને 3 સમીકરણ બનાવો.

(b) $x = -2$ થી શરૂ કરીને 3 સમીકરણ બનાવો.

4.7 વ્યવહારુ પરિસ્થિતિમાં સરળ સમીકરણની ઉપયોગિતા

આપણે ઘણાં ઉદાહરણો જોયાં કે જેમાં આપણાં રોજિંદા જીવનની ભાષાનાં વિધાનોને લઈને તેમને સરળ સમીકરણના સ્વરૂપમાં ફેરવ્યાં. આપણે એ પણ શીખ્યાં કે સરળ સમીકરણનો ઉકેલ કેવી રીતે શોધી શકાય. આમ આપણે વ્યવહારુ પરિસ્થિતિના કોયડા અને સમસ્યાને ઉકેલવા માટે તૈયાર છીએ. પદ્ધતિ એ છે કે પહેલાં આપેલ સમસ્યાને અનુરૂપ સમીકરણની રચના કરવામાં આવે અને પછી તે સમીકરણને ઉકેલવામાં આવે છે, જે કોયડો કે સમસ્યાનો ઉકેલ દર્શાવે છે. આપણે જે જોઈ ગયા ત્યાંથી શરૂઆત કરીએ. (ઉદાહરણ 1 (i) અને (iii) વિભાગ 4.2)

ઉદાહરણ 8 કોઈ સંખ્યાના ત્રણ ગણા અને 11નો સરવાળો 32 છે. તો તે સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ

- જે સંખ્યા આપણે જાણતાં નથી તેને x કહીએ. આમ તેના ત્રણ ગણા $3x$ થશે. $3x$ અને 11નો સરવાળો 32 છે. તેથી, $3x + 11 = 32$.
- આ સમીકરણ ઉકેલવા માટે આપણે 11ને જમણી બાજુ ખસેડીશું.

  તેથી, $3x = 32 - 11$ અથવા $3x = 21$

  હવે બંને બાજુને 3 વડે ભાગીશું.

વિભાગ 4.2ના દાખલા 1માં આ સમીકરણ અગાઉ આપણે મેળવ્યું હતું.

તેથી, $x = \frac{21}{3} = 7$

આમ, ઉકેલ 7 છે. આપણે તે ચકાસી શકીએ કે 7ને 3 વખત લઈ તેમાં 11 ઉમેરતાં 32 મળે છે.

ઉદાહરણ 9 એવી સંખ્યા શોધો કે જેનો એક ચતુર્થાંશ ભાગ, 7 કરતાં 3 વધુ છે.

ઉકેલ

- ચાલો આ અજ્ઞાત સંખ્યાને y લઈએ, y નો ચોથો ભાગ $\frac{y}{4}$ થશે.
- આ સંખ્યા $\left(\frac{y}{4}\right)$ એ 7 કરતાં 3 જેટલી વધુ છે

તેથી આપણને તેનું સમીકરણ $\frac{y}{4} - 7 = 3$ મળશે.

- આ સમીકરણને ઉકેલવા પ્રથમ 7ને જમણી બાજુ ખસેડીશું.

$\frac{y}{4} = 3 + 7 = 10$

પછી આપણે સમીકરણની બંને બાજુને 4 વડે ગુણીશું.

$\frac{y}{4} \times 4 = 10 \times 4$ અથવા $y = 40$ (માંગેલી સંખ્યા)

મળેલા સમીકરણને ચાલો ચકાસીએ. સમીકરણમાં yની કિંમત મૂકતાં,

ડાબી બાજુ $= \frac{40}{4} - 7 = 10 - 7 = 3 =$ જમણી બાજુ, જે માંગેલું છે.

પ્રયત્ન કરો

(i) તમે કોઈ સંખ્યાને 6 વડે ગુણી મેળવેલ પરિણામમાંથી 5 બાદ કરો તો 7 મેળવો છો. તમે કહી શકશો કે તે કઈ સંખ્યા છે ?

(ii) એવી કઈ સંખ્યા છે કે જેના ત્રીજા ભાગમાં 5 ઉમેરતાં 8 મળે ?

ઉદાહરણ 10 રાજુના પિતાની ઉંમર રાજુની ઉંમરના ત્રણ ગણાથી 5 વર્ષ વધારે છે. જો તેના પિતા 44 વર્ષના હોય, તો રાજુની ઉંમર શોધો.

ઉકેલ

- અગાઉ ઉદાહરણ 3 માં દર્શાવ્યા મુજબ, રાજુની ઉંમર શોધી આપતું સમીકરણ,

$$3y + 5 = 44$$

- તેને ઉકેલવા પહેલાં 5ને ખસેડતાં, $3y = 44 - 5 = 39$ મળશે.
- બંને બાજુને 3 વડે ભાગતાં, $y = 13$ મળશે.

તેથી રાજુની ઉંમર 13 વર્ષ છે. (તમે જવાબ ચકાસો.)

પ્રયત્ન કરો

કેરીઓ ભરેલી બે પ્રકારની પેટીઓ છે. મોટી પેટીમાં કેરીઓની સંખ્યા 8 નાની પેટીઓમાં ભરેલી કેરીઓની સંખ્યા કરતાં 4 વધારે છે. દરેક મોટી પેટીમાં 100 કેરીઓ ભરેલી છે. તો નાની પેટીમાં ભરેલી કેરીઓની સંખ્યા શોધો.

સ્વાધ્યાય 4.4

1. આપેલી પરિસ્થિતિ મુજબ સમીકરણ રચી તેને ઉકેલો અને અજ્ઞાત સંખ્યા શોધો :
   (a) સંખ્યાના 8 ગણામાં 4 ઉમેરતાં તમને 60 મળે છે.
   (b) સંખ્યાના એક પંચમાંશ ભાગમાંથી 4 બાદ કરતાં 3 મળે.
   (c) જો હું કોઈ સંખ્યાનો ત્રણ ચતુર્થાંશ ભાગ લઈ તેમાં 3 ઉમેરું છું, તો મને 21 મળે છે.
   (d) જ્યારે મેં સંખ્યાના બે ગણામાંથી 11 બાદ કર્યા તો તે પરિણામ 15 હતું.
   (e) મુન્નાએ તેની પાસે રહેલી નોટબુક્ના ત્રણ ગણા 50માંથી બાદ કર્યા અને તેને પરિણામ 8 મળ્યું.
   (f) ઈલાએ એક સંખ્યા ધારી. જો તે તેમાં 19 ઉમેરે છે અને મળેલા સરવાળાને 5 વડે ભાગે છે તો તેને 8 મળશે.
   (g) અનવર એક સંખ્યા ધારે છે. તે સંખ્યાના $\frac{5}{2}$ ભાગમાંથી તે 7 બાદ કરે છે અને પરિણામ 23 મળે છે.
2. નીચેનાં સમીકરણો ઉકેલો :
   (a) શિક્ષકે વર્ગમાં વિદ્યાર્થીઓને કહ્યું કે સૌથી વધારે ગુણ મેળવનાર વિદ્યાર્થીના ગુણ સૌથી ઓછા ગુણ મેળવનાર વિદ્યાર્થીના ગુણના બે ગણાથી 7 વધારે છે. જો સૌથી વધુ ગુણ 87 હોય, તો સૌથી ઓછા ગુણ કેટલા હશે ?
   (b) એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણમાં બે આધારખૂણાના માપ સરખાં છે. શિરઃકોણનું માપ 40° છે, તો ત્રિકોણના આધારખૂણાનું માપ શું હશે ? (યાદ કરો : ત્રિકોણના ત્રણેય ખૂણાનાં માપનો સરવાળો 180° હોય છે.)
   (c) એક મૅચમાં સચિનના રન રાહુલના રન કરતાં બે ગણા છે. જો તેમના રન ભેગા કરવામાં આવે તો તેમના રન બે સદી કરતાં 2 જેટલા ઓછા છે, તો તે મૅચમાં બંનેએ કેટલા રન કર્યા હશે ?
3. નીચેનાને ઉકેલો :
   (i) ઇરફાને કહ્યું કે તેની પાસે પરમિત પાસેની લખોટીના 5 ગણા કરતાં 7 વધારે લખોટી છે. ઇરફાનની પાસે 37 લખોટી છે. તો પરમિત પાસે કેટલી લખોટી હશે ?
   (ii) લક્ષ્મીના પિતા 49 વર્ષના છે. તે લક્ષ્મીની ઉંમરના ત્રણ ગણાથી 4 વર્ષ મોટા છે. તો લક્ષ્મીની ઉંમર કેટલી હશે ?
   (iii) સુંદરગ્રામના લોકોએ પોતાના ગામના બગીચામાં વૃક્ષારોપણ કર્યું. તેમાંના કેટલાક છોડ ફળના છોડ હતા. ફળોના ન હોય તેવા છોડની સંખ્યા ફળોના છોડની સંખ્યાના ત્રણ ગણા કરતાં બે વધારે હતી. જો ફળોના ન હોય તેવા છોડની સંખ્યા 77 હોય તો ફળોના છોડની સંખ્યા કેટલી હશે ?
4. આ કોયડો ઉકેલો : હું એક સંખ્યા છું.

   મારી ઓળખ જણાવો !

   મારા સાત ગણા લો.

   તેમાં પચાસ ઉમેરો.

   ત્રેવડી સદી સુધી પહોંચવા માટે

   તમારે હજુ ચાલીસ જોઈએ છે.

આપણે શું ચર્ચા કરી

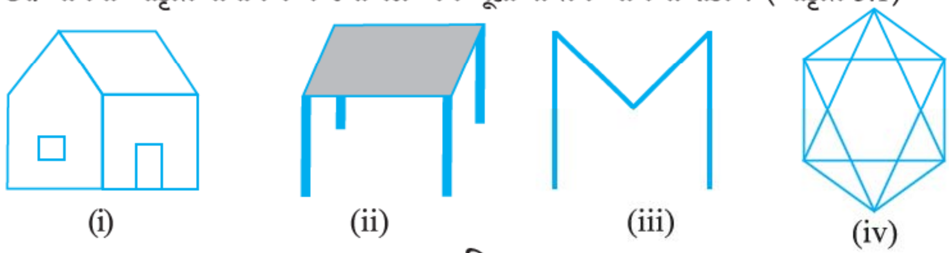
1. સમીકરણ એ એવી શરત છે કે જેમાં બંને પદાવલિની કિંમત ચલ માટે સરખી હોય છે.
2. સમીકરણનું સમાધાન કરતી ચલની કિંમતને સમીકરણનો ઉકેલ કહે છે.
3. જો સમીકરણની ડાબી બાજુ અને જમણી બાજુની અદલાબદલી કરવામાં આવે તો સમીકરણ તેનું તે જ રહે છે.
4. સંતુલિત સમીકરણના કિસ્સામાં, જો આપણે (i) બંને બાજુ સરખી સંખ્યા ઉમેરીએ અથવા (ii) બંને બાજુમાંથી સરખી સંખ્યા બાદ કરીએ અથવા (iii) બંને બાજુને સરખી સંખ્યા વડે ગુણીએ અથવા (iv) શૂન્ય રહિત સંખ્યા વડે બંને બાજુ ભાગવામાં આવે તો કોઈ પણ વિક્ષેપ વગર સમીકરણ સંતુલિત રહેશે, એટલે કે, ડાબી બાજુની કિંમત અને જમણી બાજુની કિંમત સરખી રહેશે.
5. ઉપરના ગુણધર્મો આપણને સમીકરણ ઉકેલવાની પદ્ધતિસરની રીત આપે છે. સમીકરણની એક બાજુ ચલ મેળવવા માટે સમીકરણની બંને બાજુ આપણે સમાન ગાણિતિક પ્રક્રિયાઓનો અમલ કરીએ છીએ. છેલ્લું પગલું એ સમીકરણનો ઉકેલ છે.
6. સ્થાનાંતરનો અર્થ થાય છે કે બીજી બાજુ ખસેડવું. સ્થાનાંતર કરેલી સંખ્યાની અસર એ સમીકરણની બંને બાજુ સરખી સંખ્યા ઉમેરવામાં આવે (અથવા સરખી સંખ્યા તેમાંથી બાદ કરવામાં આવે) એટલી જ હોય છે. સંખ્યાને જ્યારે એક બાજુથી બીજી બાજુ ખસેડીએ ત્યારે તેની નિશાની બદલાય છે. ઉદાહરણ તરીકે, +3ને ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ ખસેડવામાં આવે તો સમીકરણ $x + 3 = 8$ એ $x = 8 - 3$ (=5) થાય. આપણે આંકડાના સ્થાનાંતર જેમ જ પદાવલિનું સ્થાનાંતર કરી શકીએ છીએ.
7. વાસ્તવિક પરિસ્થિતિને અનુરૂપ બીજગણિતીય પદાવલિ કેવી રીતે રચી શકાય તે આપણે શીખી ગયાં.
8. ઉકેલની બંને બાજુ સરખી ગાણિતિક પ્રક્રિયાનો ઉપયોગ કરીને ઉકેલથી સમીકરણની રચના આપણે શીખ્યાં. વધુમાં આપણે એ પણ શીખ્યાં કે આપેલ સમીકરણને બંધ બેસતી વાસ્તવિક પરિસ્થિતિ સાથે સાંકળીને વ્યવહારું પ્રશ્ન કે કોયડો બનાવી શકીએ છીએ.

પ્રકરણ 5

રેખા અને ખૂણા

5.1 પ્રસ્તાવના

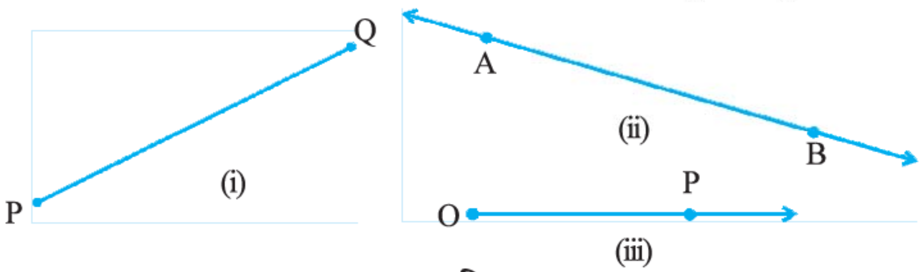
કોઈ પણ આકારમાં આવેલી રેખાઓ, રેખાખંડો અને ખૂણાઓને કેવી રીતે ઓળખવા એ તમે જાણો છો. નીચેની આકૃતિઓમાં ભિન્ન રેખાખંડો અને ખૂણાઓ તમે ઓળખી શકો ? (આકૃતિ 5.1)



આકૃતિ 5.1

શું તમે એ પણ ઓળખી શકો કે ખૂણાઓ લઘુકોણ, ગુરુકોણ કે કાટકોણ છે ?

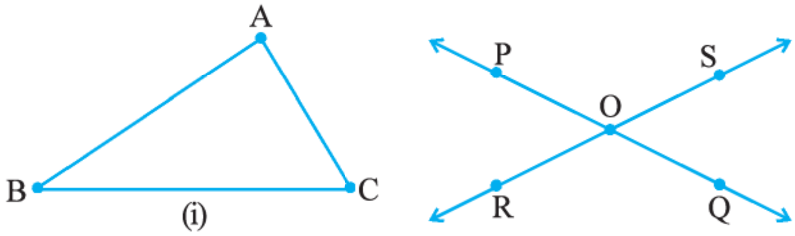
યાદ કરો કે **રેખાખંડ**ને બે **અંત્યબિંદુઓ** હોય છે. જો આપણે બંને અંત્ય બિંદુઓને બંને દિશામાં અનંત આગળ તરફ લઈ જઈએ તો **રેખા** મળે છે. આમ, આપણે કહી શકીએ કે રેખાને અંત્યબિંદુઓ નથી હોતાં. બીજી તરફ, યાદ કરો કે એક કિરણને એક જ અંત્યબિંદુ (તેનું શરૂઆતનું બિંદુ) હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે નીચે આપેલી આકૃતિઓ જુઓ :



આકૃતિ 5.2

અહીં આકૃતિ 5.2 (i) **રેખાખંડ** (segment) દર્શાવે છે, આકૃતિ 5.2 (ii) એક **રેખા** (line) દર્શાવે છે અને આકૃતિ 5.2 (iii) એક **કિરણ** (Ray) દર્શાવે છે. સામાન્ય રીતે રેખાખંડ PQને $\overline{PQ}$ સંકેત વડે દર્શાવાય છે, રેખા ABને $\overleftrightarrow{AB}$ વડે દર્શાવાય છે અને કિરણ OP ને $\overrightarrow{OP}$ વડે દર્શાવાય છે. તમારા રોજિંદા જીવનમાંથી રેખાખંડ અને કિરણોનાં ઉદાહરણો આપો અને તમારા મિત્રો સાથે ચર્ચા કરો.

ફરીથી યાદ કરો કે જ્યારે રેખાઓ અથવા રેખાખંડો ભેગા મળે છે ત્યારે **ખૂણાઓ (Angles)** બને છે. આકૃતિ 5.1માં ખૂણાઓ જુઓ. જ્યારે બે રેખાઓ કે રેખાખંડો એક બિંદુમાં છેદે છે ત્યારે ખૂણાઓ બને છે. ઉદાહરણ તરીકે નીચેની આકૃતિઓ જુઓ :



આકૃતિ 5.3 (ii)

આકૃતિ 5.3 (i) માં રેખાખંડો AB અને BC, બિંદુ B માં છેદે છે અને ખૂણો ABC બનાવે છે અને રેખાખંડો BC અને AC બિંદુ Cમાં છેદે છે અને ખૂણો ACB બનાવે છે. જ્યારે આકૃતિ 5.3(ii) માં રેખા PQ અને RS બિંદુ Oમાં છેદે છે અને ખૂણાઓ POS, SOQ, QOR અને ROP બનાવે છે. ખૂણો ABC, સંકેતમાં $\angle$ABC લખાય છે. આમ આકૃતિ 5.3 (i)માં બનતા ત્રણ ખૂણાઓ $\angle$ABC, $\angle$BCA અને $\angle$BAC છે. જ્યારે આકૃતિ 5.3(ii)માં બનતા ચાર ખૂણાઓ $\angle$POS, $\angle$SOQ, $\angle$QOR અને $\angle$ROP છે. ખૂણાઓનું લઘુકોણ, ગુરુકોણ કે કાટકોણમાં કેવી રીતે વર્ગીકરણ કરવું તે પણ તમે શીખી ગયાં છો.

પ્રયત્ન કરો

તમારી આસપાસની દસ આકૃતિઓની યાદી બનાવો અને તેમાંથી લઘુકોણ, ગુરૂકોણ અને કાટકોણને ઓળખો.

નોંધ : $\angle$ABCના માપના સંદર્ભ માટે આપણે $m\angle$ABCને માત્ર $\angle$ABC લખીશું. પ્રશ્નના સંદર્ભ પરથી સ્પષ્ટ થશે કે આપણે ખૂણાનો કે તેના માપનો ઉલ્લેખ કરીએ છીએ.

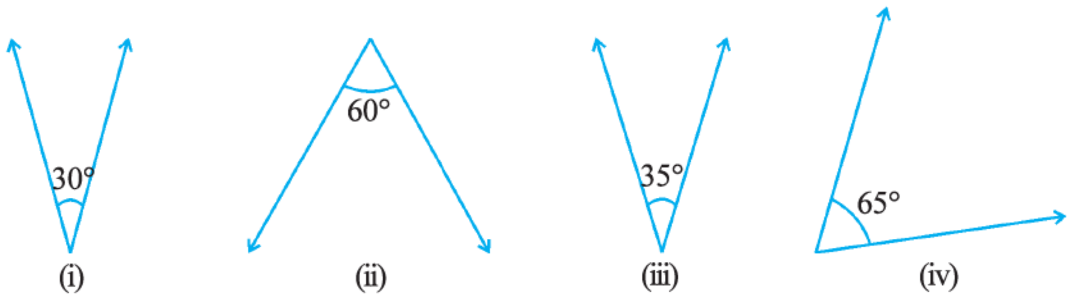
5.2 સંબંધિત ખૂણાઓ

5.2.1 કોટિકોણ

(Complementary Angles)

3PDIU4

જો બે ખૂણાના માપનો સરવાળો 90° થતો હોય તો તે ખૂણાઓને **કોટિકોણ** કહે છે.



શું આ બે ખૂણાઓ કોટિકોણ છે ? **હા**

શું આ બે ખૂણાઓ કોટિકોણ છે ? **ના**

આકૃતિ 5.4

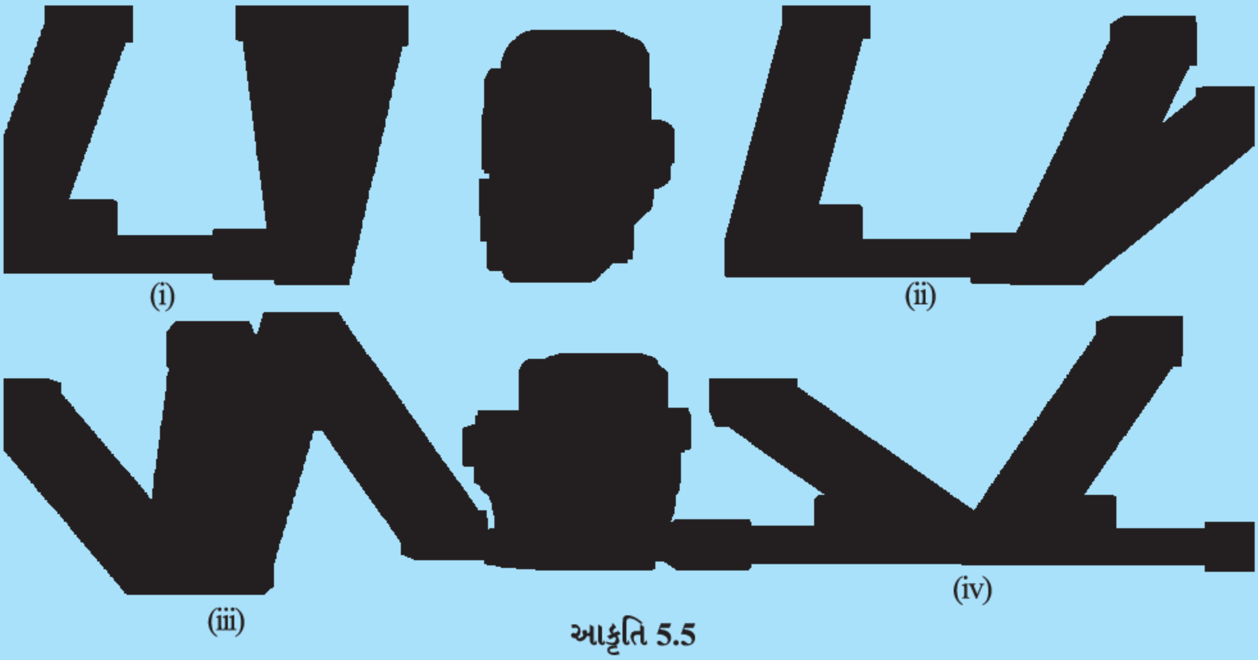
જ્યારે બે ખૂણાઓ કોટિકોણ હોય તો દરેક ખૂણો બીજા ખૂણાનો કોટિકોણ કહેવાય છે. ઉપરની આકૃતિ 5.4માં '30° નો ખૂણો' એ '60° ના ખૂણા'નો કોટિકોણ છે અને એનાથી ઊલટું પણ સાચું છે.

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

1. શું બે લઘુકોણ પરસ્પર કોટિકોણ હોઈ શકે ?
2. શું બે ગુરુકોણ પરસ્પર કોટિકોણ હોઈ શકે ?
3. શું બે કાટકોણ પરસ્પર કોટિકોણ હોઈ શકે ?

પ્રયત્ન કરો

1. નીચેનામાંથી કઈ જોડ કોટિકોણની છે ? (આકૃતિ 5.5)



આકૃતિ 5.5

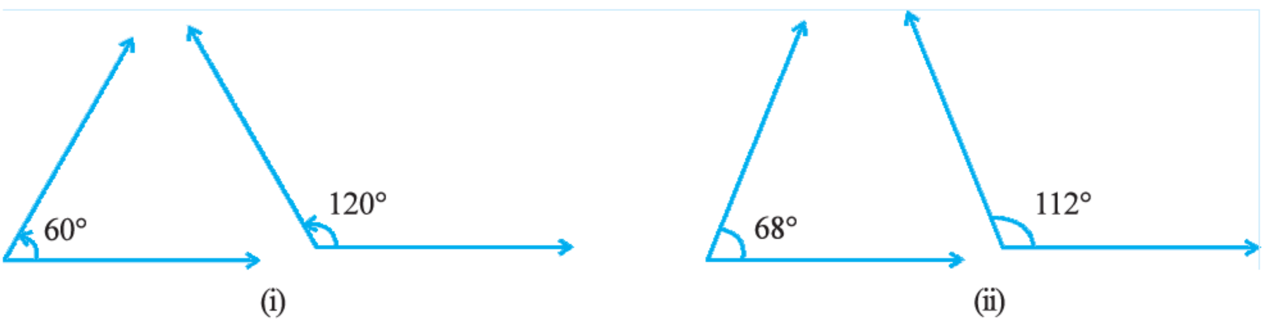
2. નીચેના દરેક ખૂણાના કોટિકોણનાં માપ શું છે ?

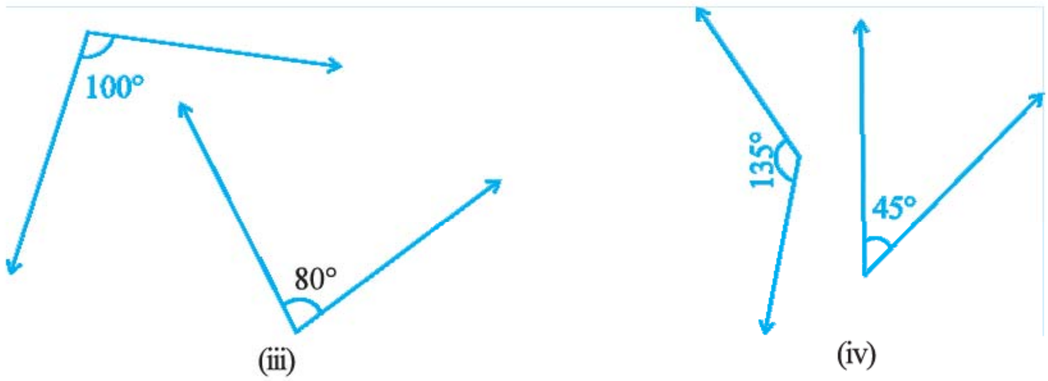
   (i) 45° (ii) 65° (iii) 41° (iv) 54°

3. બે કોટિકોણનાં માપ વચ્ચેનો તફાવત 12° છે. તેમનાં માપ શોધો.

5.2.2 પૂરકકોણ (Supplementary Angles)

હવે આપણે નીચેના ખૂણાઓની જોડ વિશે વિચારીએ (આકૃતિ 5.6) :





આકૃતિ 5.6

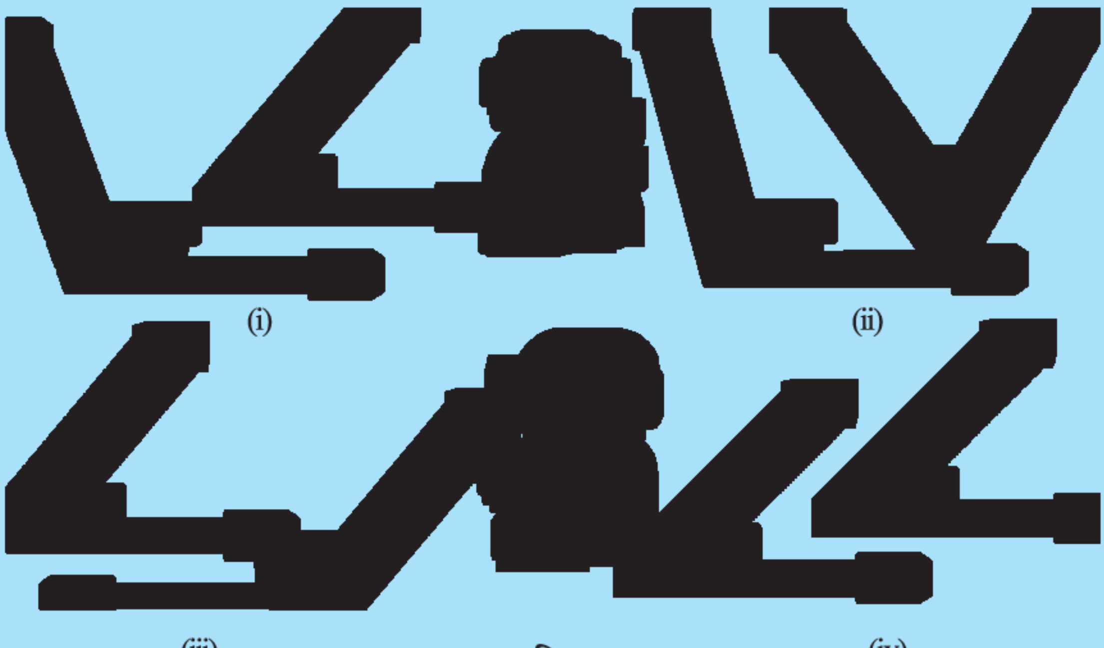
તમે એ નોંધ્યું કે આકૃતિ 5.6 માં દર્શાવેલ દરેક જોડી માટે તેના ખૂણાના માપનો સરવાળો 180° થાય છે ? ખૂણાની આવી જોડીને **પૂરકકોણ** કહે છે. જ્યારે બે ખૂણાઓ પૂરક હોય ત્યારે તેમાંનો દરેક બીજાનો **પૂરક** કહેવાય છે.

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

1. શું બે ગુરુકોણ પૂરકકોણ બની શકે ?
2. શું બે લઘુકોણ પૂરકકોણ બની શકે ?
3. શું બે કાટખૂણા પૂરકકોણ બની શકે ?

પ્રયત્ન કરો

1. આકૃતિ 5.7 માંથી પૂરકકોણની જોડ શોધો.

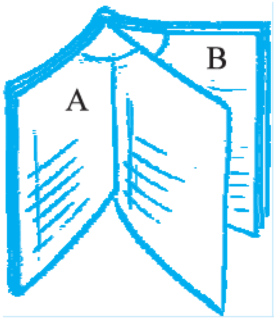


આકૃતિ 5.7

2. નીચેના દરેક ખૂણાના પૂરકકોણનું માપ શું થશે ?
   (i) 100°   (ii) 90°   (iii) 55°   (iv) 125°
3. બે પૂરકકોણમાંના મોટા ખૂણાનું માપ નાના ખૂણાના માપ કરતાં 44° વધારે છે. તેમનાં માપ શોધો.

5.2.3 આસન્નકોણ (Adjacent Angles)

નીચેની આકૃતિઓ જુઓ :



જ્યારે તમે પુસ્તક ખોલો છો ત્યારે તે ઉપરની આકૃતિ જેવું દેખાય છે. A અને Bમાં આપણને ખૂણાની એક જોડ મળે છે જે એકબીજાની પાસે છે.

કારના સ્ટિઅરિંગ વ્હીલને જુઓ. તેના કેન્દ્ર આગળ એકબીજાની પાસે હોય તેવા ત્રણ ખૂણા દેખાશે.

આકૃતિ 5.8

બંને શિરોબિંદુઓ A અને B આગળ પાસપાસે હોય તેવા બે ખૂણાની જોડ જોવા મળે છે.

આ ખૂણાઓ એવા છે કે -

(i) તેમનું શિરોબિંદુ સામાન્ય છે.

(ii) તેમનો એક ભૂજ સામાન્ય છે અને

(iii) જે ભૂજ જુદા છે તે સામાન્ય ભૂજની સામસામેની બાજુએ છે.

ખૂણાની આવી જોડને **આસન્નકોણ** કહે છે. આસન્ન કોણની જોડમાં શિરોબિંદુ સામાન્ય હોય છે, એક ભૂજ સામાન્ય હોય છે પરંતુ ખૂણાની અંદરનાં બિંદુઓ સામાન્ય હોતાં નથી.

પ્રયત્ન કરો

1. 1 અને 2 વડે દર્શાવેલા ખૂણાઓ આસન્નકોણ છે ? (આકૃતિ 5.9) જો નથી તો શા માટે નથી ?

(i)   (ii)   (iii)

[redacted]

(iv) આકૃતિ 5.9 (v)

[redacted]

આકૃતિ 5.10

2. આકૃતિ 5.10 માં નીચેના ખૂણાઓ આસન્નકોણ છે ?

(a) ∠AOB અને ∠BOC

(b) ∠BOD અને ∠BOC

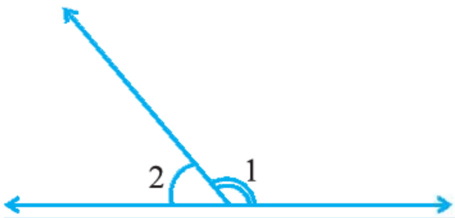
તમારો જવાબ ચકાસો.

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

1. બે આસન્નકોણ પૂરકકોણ હોઈ શકે ?
2. બે આસન્નકોણ કોટિકોણ હોઈ શકે ?
3. બે ગુરુકોણ આસન્નકોણ હોઈ શકે ?
4. એક લઘુકોણ અને બીજો ગુરુકોણ આસન્નકોણ હોઈ શકે ?

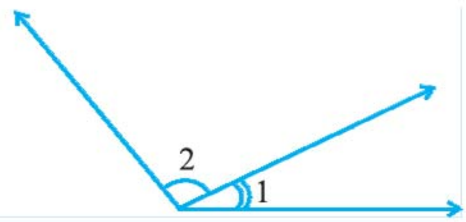
5.2.4 રૈખિક જોડ (Linear Pair)

રૈખિકજોડ એ એવા આસન્નકોણ છે કે જેની સામાન્ય બાજુ સિવાયની બે બાજુઓ વિરૂદ્ધ કિરણ હોય.



∠1 અને ∠2 એ રૈખિકજોડ છે ? હા

(i)



∠1 અને ∠2 એ રૈખિકજોડ છે ? ના ! (શા માટે ?)

(ii)

આકૃતિ 5.11

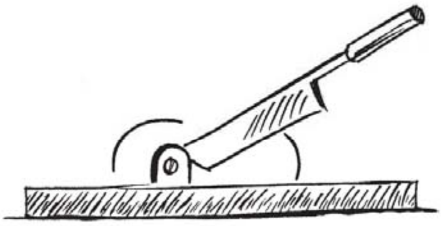
ઉપરની આકૃતિ 5.11 (i) માં જુઓ કે વિરુદ્ધ કિરણો (કે જે ∠1 અને ∠2ની સામાન્ય ન હોય તેવી બાજુઓ છે) એક રેખા રચે છે. આમ, ∠1 + ∠2 મળીને 180° થાય છે.

રૈખિક જોડના ખૂણા પૂરક હોય છે.

તમારી આસપાસ તમે રૈખિકજોડના ખૂણા જોયા છે ?

ધ્યાનથી સમજો કે પૂરકકોણની જોડના ખૂણા એકબીજાની પાસે ગોઠવવામાં આવે તો રૈખિકજોડ રચે છે. તમારા રોજિંદા જીવનમાં તમને રૈખિકજોડના ખૂણાનાં ઉદાહરણો મળે છે ?

શાકભાજી કાપવાના બૉર્ડનું અવલોકન કરો (આકૃતિ 5.12).



શાકભાજી કાપવાનું બૉર્ડ
કાપવાનો ચપ્પુ બૉર્ડ સાથે
ખૂણાની રૈખિક જોડ બનાવે છે.

પેન મૂકવાનું સ્ટેન્ડ
પેન એ પેનસ્ટેન્ડ સાથે
ખૂણાની રૈખિક જોડ બનાવે છે.

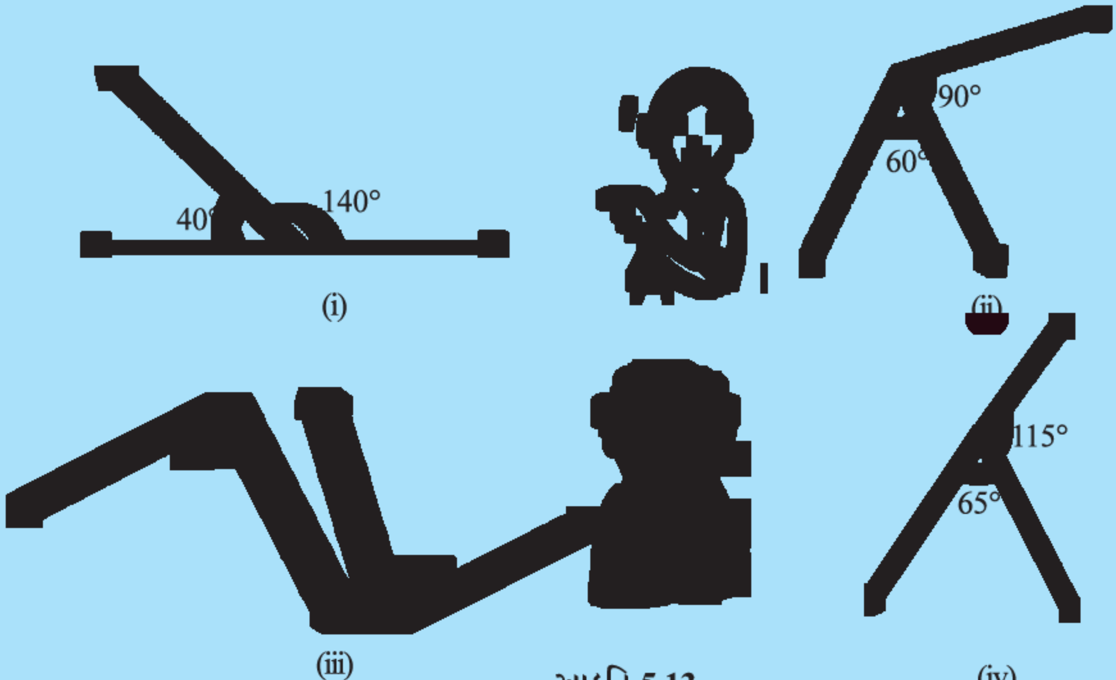
આકૃતિ 5.12

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

1. શું બે લઘુકોણ રૈખિકજોડ રચી શકે ?
2. શું બે ગુરુકોણ રૈખિકજોડ રચી શકે ?
3. શું બે કાટખૂણા રૈખિકજોડ રચી શકે ?

પ્રયત્ન કરો

નીચે આપેલી ખૂણાની જોડ પૈકી કઈ જોડ રૈખિકજોડ રચે છે (આકૃતિ 5.13) :



આકૃતિ 5.13

5.2.5 અભિકોણ (Vertically Opposite Angles)

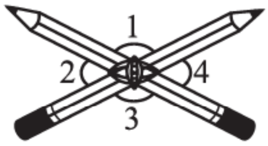
હવે આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે બે પેન્સિલ લઈને તેમને વચ્ચેથી રબરબૅન્ડ વડે બાંધો. (આકૃતિ 5.14)

અહીં બનતા ચાર ખૂણા $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ અને $\angle 4$ જુઓ.

$\angle 1$ અને $\angle 3$ અભિકોણ છે અને $\angle 2$ અને $\angle 4$ અભિકોણ છે.

આપણે $\angle 1$ અને $\angle 3$ને અભિકોણની જોડ કહીશું.

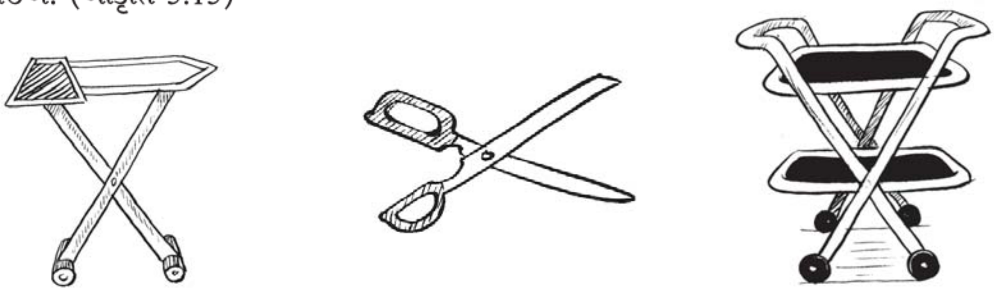
શું તમે અભિકોણની અન્ય જોડ શોધી શકશો ?



આકૃતિ 5.14

$\angle 1$ અને $\angle 3$ સરખા જણાય છે ? $\angle 2$ અને $\angle 4$ સરખા જણાય છે ?

આ ચકાસતાં પહેલાં આપણે આપણી આસપાસ જોવા મળતાં કેટલાંક અભિકોણનાં ઉદાહરણો જોઈએ. (આકૃતિ 5.15)

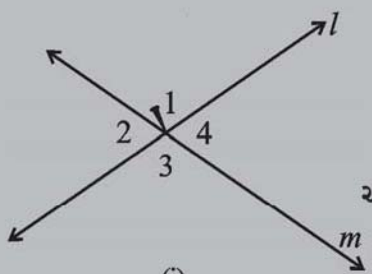


આકૃતિ 5.15

જાતે કરો :

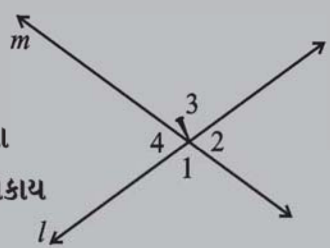
એકબીજાને એક બિંદુમાં છેદતી બે રેખાઓ l અને m દોરો. આકૃતિ (5.16)માં બતાવ્યા પ્રમાણે $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ અને $\angle 4$ દર્શાવો.

પારદર્શક કાગળ પર આ આકૃતિની નકલ કરો. આ નકલને મૂળ આકૃતિ પર એવી રીતે મૂકો કે જેથી $\angle 1$ પર તેની નકલ આવે, $\angle 2$ પર તેની નકલ આવે... વગેરે. હવે છેદબિંદુ ઉપર ટાંકણી લગાવો અને નકલના કાગળને 180° નું પરિભ્રમણ આપો. શું રેખાઓ ફરીથી એકબીજા પર બંધબેસતી આવે છે ?



(i)

આકૃતિ 5.16 (ii) મેળવવા
આકૃતિ 5.16 (i)ને ઘુમાવી શકાય



(ii)

આકૃતિ 5.16

તમે જોશો કે $\angle 1$ અને $\angle 3$ ની સ્થિતિ અરસપરસ બદલાઈ છે અને તે જ રીતે $\angle 2$ અને $\angle 4$નું પણ થાય છે. રેખાઓની સ્થિતિ બદલ્યા સિવાય આ થયું છે.

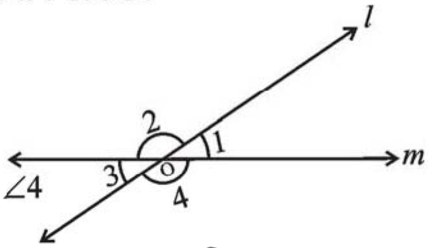
આમ, $\angle 1 = \angle 3$ અને $\angle 2 = \angle 4$

આપણે તારવીએ કે **જ્યારે બે રેખાઓ છેદે છે ત્યારે બનતા અભિકોણો સમાન હોય છે.** ભૌમિતિક ખ્યાલોનો ઉપયોગ કરીને આપણે આ સાબિત કરવાનો પ્રયત્ન કરીએ.

બે રેખાઓ l અને m લો. (આકૃતિ 5.17)

આપણે આ પરિણામ નીચે પ્રમાણેની તાર્કિક દલીલોથી મેળવીએ :

l અને m બે રેખાઓ (પરસ્પર) Oમાં છેદે છે અને ખૂણાઓ $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ અને $\angle 4$ બનાવે છે.



આકૃતિ 5.17

આપણે સાબિત કરવું છે કે $\angle 1 = \angle 3$ અને $\angle 2 = \angle 4$

હવે $\angle 1 = 180° - \angle 2$ ($\because$ $\angle 1$ અને $\angle 2$ રૈખિક જોડ રચે છે, આથી $\angle 1 + \angle 2 = 180°$) (i)

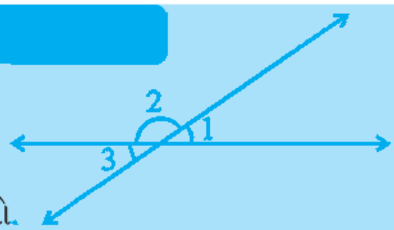
એ જ રીતે $\angle 3 = 180° - \angle 2$ ($\because$ $\angle 2$ અને $\angle 3$ રૈખિક જોડ રચે છે, આથી $\angle 2 + \angle 3 = 180°$) (ii)

આથી, $\angle 1 = \angle 3$ [(i) અને (ii) પરથી]

તે જ રીતે સાબિત કરી શકાય કે $\angle 2 = \angle 4$. (પ્રયત્ન કરો !)

પ્રયત્ન કરો

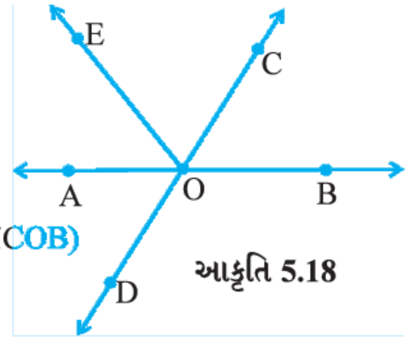
1. બાજુની આકૃતિમાં,
   જો $\angle 1 = 30°$ તો $\angle 2$ અને $\angle 3$ મેળવો.
2. તમારી આસપાસમાંથી અભિકોણોનું ઉદાહરણ આપો.



ઉદાહરણ 1 આકૃતિ (5.18)માંથી કહો :

(i) આસન્નકોણની પાંચ જોડ (ii) ત્રણ રૈખિકજોડ

(iii) અભિકોણની બે જોડ



આકૃતિ 5.18

ઉકેલ

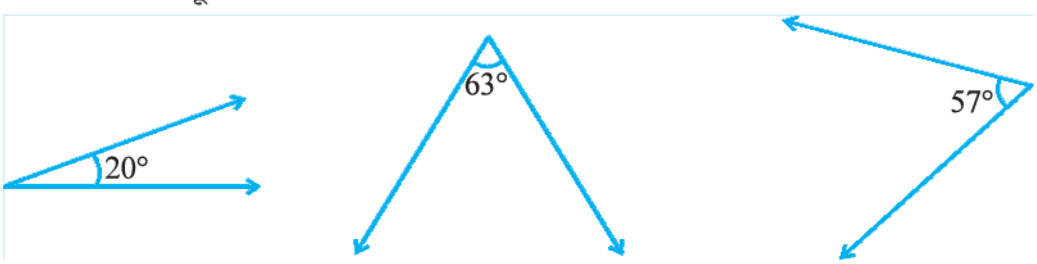
(i) આસન્નકોણની પાંચ જોડ આ પ્રમાણે છે : ($\angle$AOE, $\angle$EOC), ($\angle$EOC, $\angle$COB) ($\angle$AOC, $\angle$COB), ($\angle$COB, $\angle$BOD), ($\angle$EOB, $\angle$BOD)

(ii) રૈખિકજોડ : ($\angle$AOE, $\angle$EOB), ($\angle$AOC, $\angle$COB), ($\angle$COB, $\angle$BOD)

(iii) અભિકોણની જોડ : ($\angle$COB, $\angle$AOD) અને ($\angle$AOC, $\angle$BOD)

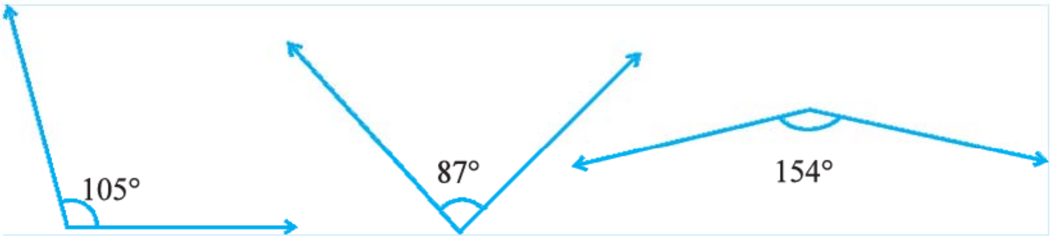
સ્વાધ્યાય 5.1

1. નીચેના દરેક ખૂણાનો કોટિકોણ શોધો :



(i) (ii) (iii)

2. નીચેના દરેક ખૂણાનો પૂરકકોણ શોધો :



(i) (ii) (iii)

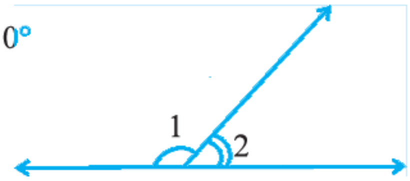
3. નીચેનામાંથી કઈ જોડ કોટિકોણની અને કઈ જોડ પૂરકકોણની છે તે નક્કી કરો :

(i) 65°, 115° (ii) 63°, 27° (iii) 112°, 68°

(iv) 130°, 50° (v) 45°, 45° (vi) 80°, 10°

4. એવો ખૂણો શોધો જે તેના કોટિકોણ જેટલો હોય.

5. એવો ખૂણો શોધો જે તેના પૂરક કોણ જેટલો હોય.



6. બાજુની આકૃતિમાં ∠1 અને ∠2 પૂરકકોણ છે. જો ∠1 ઘટાડવામાં આવે તો ∠2માં કયો ફેરફાર થવો જોઈએ કે જેથી તે બંને પૂરકકોણ જ રહે ?

7. બે ખૂણા પૂરક હોઈ શકે, જો તે બંને :

(i) લઘુકોણ હોય ? (ii) ગુરુકોણ હોય ? (iii) કાટકોણ હોય ?

8. એક ખૂણો 45° કરતાં મોટો છે. તેનો કોટિકોણ 45° થી મોટો, 45° જેટલો કે 45° કરતાં નાનો હોય ?

9. બાજુની આકૃતિમાં :

(i) ∠1 અને ∠2 આસન્નકોણ છે ?

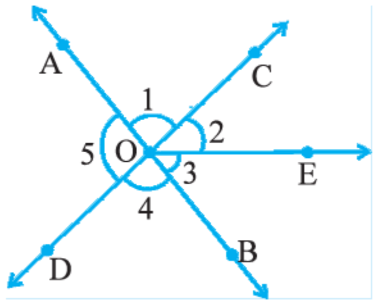
(ii) ∠AOC અને ∠AOE આસન્નકોણ છે ?

(iii) ∠COE અને ∠EOD રૈખિકજોડ રચે છે ?

(iv) ∠BOD અને ∠DOA પૂરકકોણ રચે છે ?

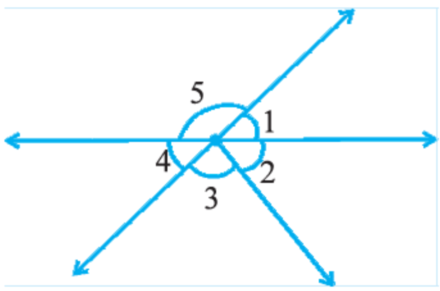
(v) ∠1 અને ∠4 અભિકોણ છે ?

(vi) ∠5 નો અભિકોણ કયો છે ?

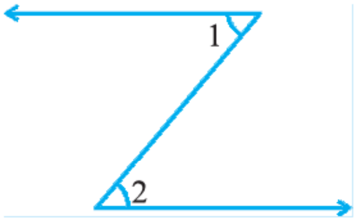


10. નીચેની આકૃતિ પરથી માંગેલા ખૂણાની જોડ દર્શાવો :

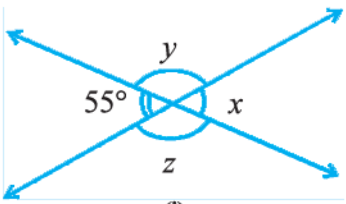
(i) અભિકોણો (ii) રૈખિક જોડ



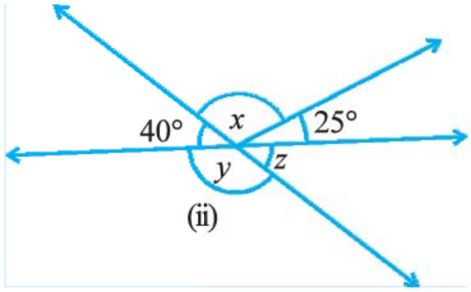
11. નીચેની આકૃતિમાં $\angle 1$, $\angle 2$નો આસન્નકોણ છે ? કારણ આપો.



12. નીચેના દરેકમાં x, y અને z ની કિંમત શોધો :



(i)



(ii)

13. ખાલી જગ્યા પૂરો :

(i) જો બે ખૂણા કોટિકોણ હોય તો તેમના માપનો સરવાળો ________ થાય.

(ii) જો બે ખૂણા પૂરકકોણ હોય તો તેમના માપનો સરવાળો ________ થાય.

(iii) રૈખિકજોડ રચતા બે ખૂણાઓ ________ હોય.

(iv) જો બે આસન્નકોણ પૂરક હોય તો તે ________ રચે.

(v) જો બે રેખાઓ એક બિંદુમાં છેદે તો અભિકોણો હંમેશાં ________ .

(vi) જો બે રેખાઓ એક બિંદુમાં છેદે અને અભિકોણોની એક જોડ લઘુકોણ છે તો અભિકોણની બીજી જોડ ________ હોય.

14. નીચેની આકૃતિમાંથી માગેલ ખૂણાની જોડનાં નામ જણાવો :

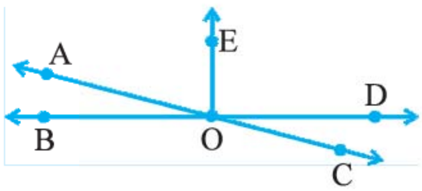
(i) અભિકોણો જે ગુરુકોણ હોય

(ii) આસન્ન કોટિકોણ

(iii) સમાન પૂરકકોણ

(iv) અસમાન પૂરકકોણ

(v) આસન્નકોણ જે રૈખિક જોડ રચતા નથી



5.3 રેખાઓની જોડ

5.3.1 છેદતી રેખાઓ

(Intersecting Lines)

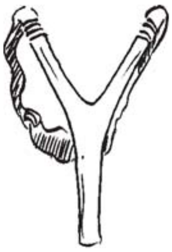
3PHEVR

આકૃતિ 5.19

સ્ટેન્ડ પર મૂકેલું કાળું પાટિયું, રેખાખંડોથી રચેલો અક્ષર Y અને બારીની જાળી (આકૃતિ 5.19) – આ બધામાં સામાન્ય શું છે ? આ બધાં **છેદતી રેખા**નાં ઉદાહરણો છે.

જો બે રેખાઓ l અને m માટે એક સામાન્ય બિંદુ હોય તો તેઓ એકબીજીને છેદે છે. આ સામાન્યબિંદુ O એ તેમનું **છેદબિંદુ** કહેવાય છે.

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો



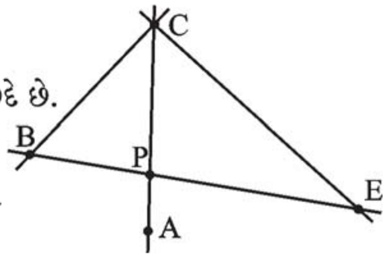
આકૃતિ 5.20માં AC અને BE, બિંદુ Pમાં છેદે છે.

AC અને BC, બિંદુ C માં છેદે છે, AC અને EC, બિંદુ Cમાં છેદે છે.

છેદતા રેખાખંડની બીજી દસ જોડ શોધવાનો પ્રયત્ન કરો.

શું બે રેખા કે રેખાખંડ છેદતા હોય એ જરૂરી છે ? આકૃતિમાંથી ન છેદતા રેખાખંડની બે જોડ શોધી શકો ?

બે રેખા એક કરતાં વધુ બિંદુમાં છેદી શકે ? વિચારો.



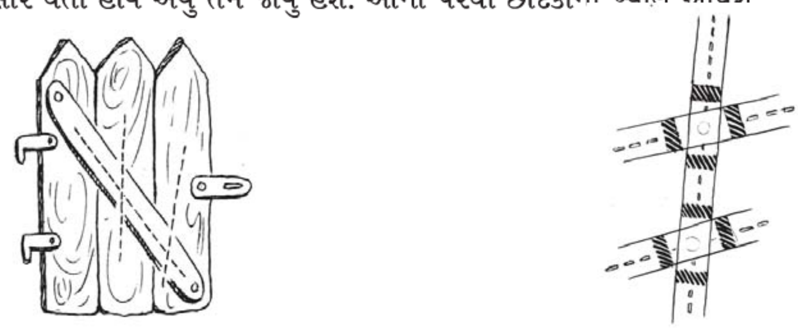
આકૃતિ 5.20

પ્રયત્ન કરો

1. કાટખૂણે છેદતી રેખાનાં ઉદાહરણો તમારી આસપાસમાં શોધો.
2. સમબાજુ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ આગળ છેદતી રેખાથી બનતા ખૂણાનાં માપ મેળવો.
3. કોઈ પણ લંબચોરસ દોરો અને તેનાં શિરોબિંદુઓ આગળ છેદતી રેખાથી બનતા ખૂણાઓનાં માપ મેળવો.
4. જો બે રેખા છેદે તો હંમેશાં કાટખૂણે જ છેદે ?

5.3.2 છેદિકા (Transversal)

એક રસ્તો બીજા બે કે વધુ રસ્તાને છેદતો પસાર થતો હોય અથવા એક રેલવે લાઈન બીજી લાઈનને છેદતી પસાર થતી હોય એવું તમે જોયું હશે. આના પરથી છેદિકાનો ખ્યાલ આવશે

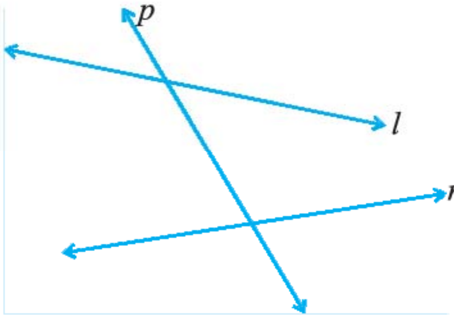


(i) (ii)

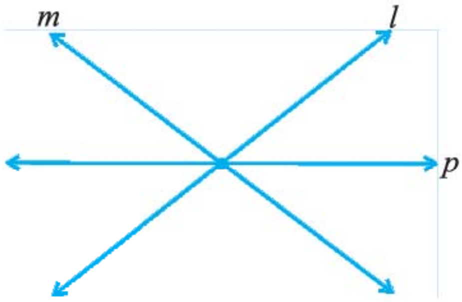
આકૃતિ 5.21

જે રેખા બે અથવા બેથી વધુ રેખાને **ભિન્ન** બિંદુમાં છેદતી હોય તેને **છેદિકા** કહેવાય.

આકૃતિ 5.22 માં રેખા p એ l અને m ની છેદિકા છે.



આકૃતિ 5.22

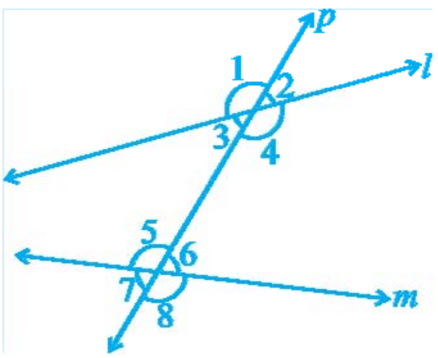


આકૃતિ 5.23

આકૃતિ 5.23માં રેખા p એ રેખા l અને m ને છેદતી હોવા છતાં તે છેદિકા નથી. તમે કહી શકો, શા માટે ?

5.3.3 છેદિકાથી બનતા ખૂણાઓ (Angles Made by a Transversal)

આકૃતિ 5.24માં રેખાઓ l અને mને છેદિકા p છેદે છે. 1 થી 8 વડે દર્શાવેલા આઠ ખૂણાઓનાં વિશિષ્ટ નામ છે.



આકૃતિ 5.24

પ્રયત્ન કરો

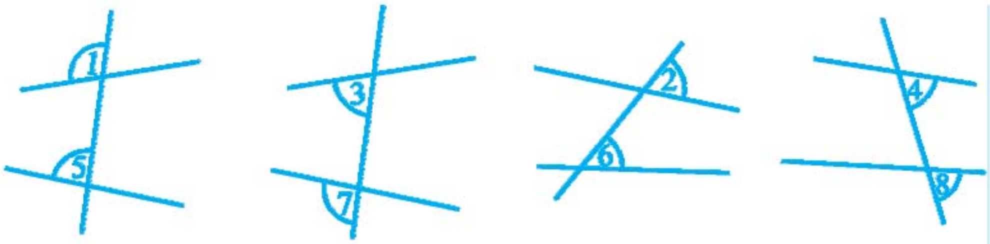
1. ધારો કે બે રેખા આપી છે. આ રેખાઓ માટે તમે કેટલી છેદિકાઓ દોરી શકો ?
2. જો એક રેખા ત્રણ રેખાઓની છેદિકા હોય તો કેટલાં છેદબિંદુઓ હોય ?
3. તમારી આસપાસમાંથી કેટલીક છેદિકાઓ શોધવાનો પ્રયત્ન કરો.

અંત:કોણો (Interior angles)	$\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$
બહારના ખૂણાઓ (Exterior angles)	$\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$
અનુકોણોની જોડ (Pairs of corresponding angles)	$\angle 1$ **અને** $\angle 5$, $\angle 2$ **અને** $\angle 6$ $\angle 3$ **અને** $\angle 7$, $\angle 4$ **અને** $\angle 8$
અંત: યુગ્મકોણોની જોડ (Pairs of alternate interior angles)	$\angle 3$ **અને** $\angle 6$, $\angle 4$ **અને** $\angle 5$
બાહ્ય યુગ્મકોણોની જોડ (Pairs of alternate exterior angles)	$\angle 1$ **અને** $\angle 8$, $\angle 2$ **અને** $\angle 7$
છેદિકાની એક બાજુના અંત:કોણોની જોડ (Pairs of interior angles on the same side of the tranversal)	$\angle 3$ **અને** $\angle 5$, $\angle 4$ **અને** $\angle 6$

નોંધ : અનુકોણો (જેવા કે આકૃતિ 5.25માં $\angle 1$ અને $\angle 5$) માટે

(i) શિરોબિંદુઓ ભિન્ન હોય (ii) છેદિકાની એક જ બાજુએ હોય અને

(iii) બે રેખાના સંદર્ભમાં 'અનુવર્તી' સ્થિતિમાં (ઉપર અથવા નીચે, ડાબે અથવા જમણે) હોય.



આકૃતિ 5.25

અંતઃ યુગ્મકોણો (જેવા કે આકૃતિ 5.26માં $\angle 3$ અને $\angle 6$) માટે

(i) ભિન્ન શિરોબિંદુઓ હોય,

(ii) છેદિકાની સામસામેની બાજુએ હોય અને

(iii) બે રેખાની 'વચ્ચે' હોય.

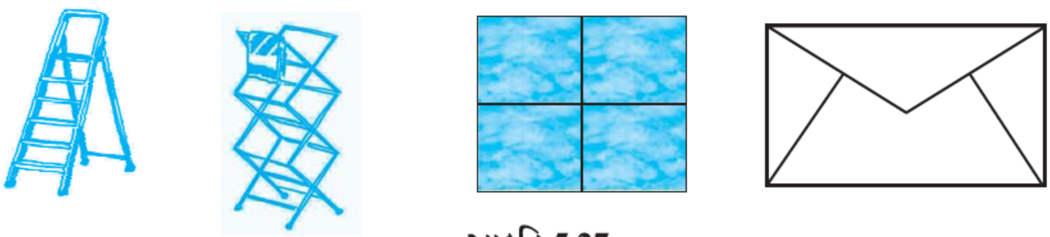
આકૃતિ 5.26

પ્રયત્ન કરો

[redacted]

5.3.4 સમાંતર રેખાની છેદિકા (Transversal of Parallel Lines)

સમાંતર રેખાઓ કોને કહેવાય એ યાદ છે ? એક સમતલમાં આવેલી એવી રેખાઓ છે જે ક્યાંય પણ મળતી નથી. નીચેની આકૃતિઓમાં તમે સમાંતર રેખાઓ ઓળખી શકો ? (આકૃતિ 5.27)



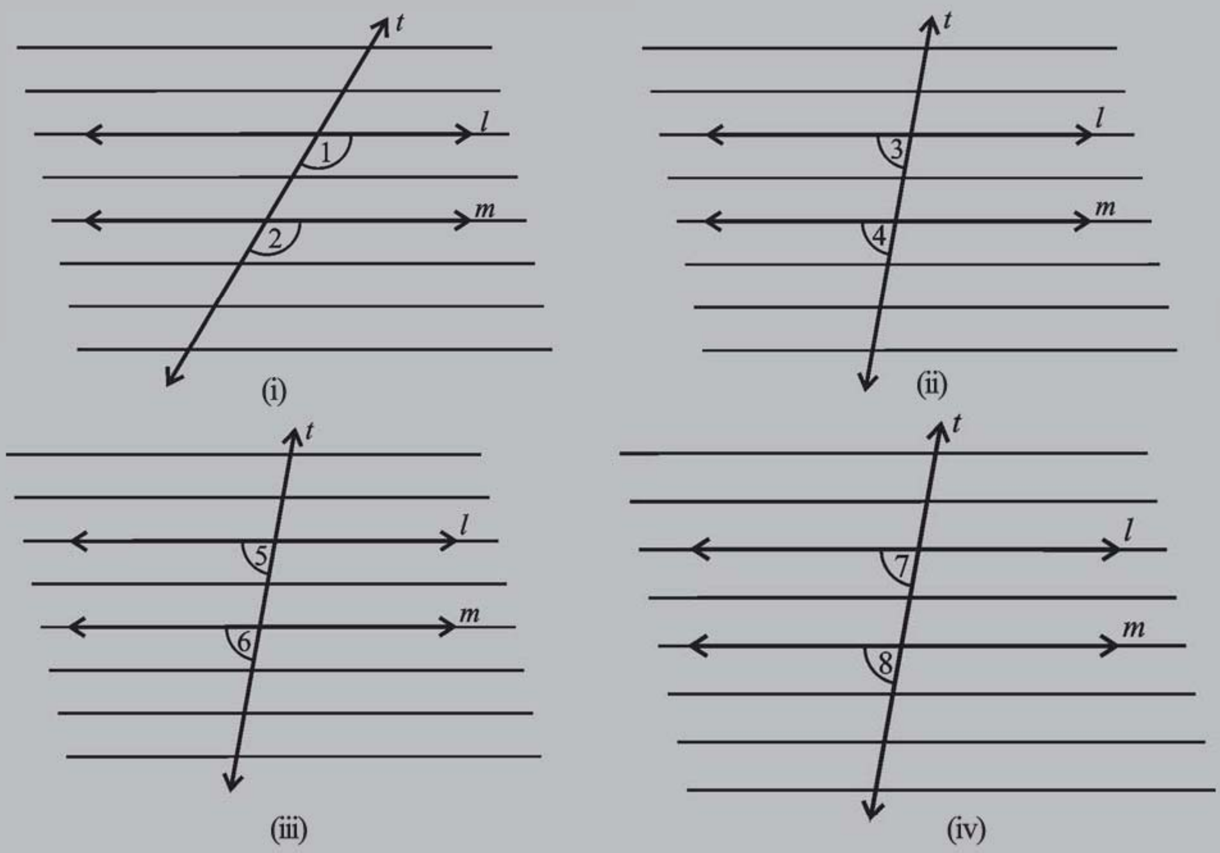
આકૃતિ 5.27

સમાંતર રેખાઓની છેદિકા લેવાથી કેટલાંક રસપ્રદ પરિણામો મળે છે.

જાતે કરો

રેખાઓ આંકેલી હોય એવો કાગળ લો. બે સમાંતર રેખાઓ l અને m ઘાટા રંગથી દોરો. l અને m ની એક છેદિકા t દોરો. આકૃતિ [5.28 (i)]માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે $\angle 1$ અને $\angle 2$ નામ આપો. દોરેલી આકૃતિ પર પારદર્શક કાગળ મૂકો. રેખાઓ l, m અને t ની નકલ કરી લો. l, m પર બંધબેસતી થાય તે રીતે કાગળને t પર સરકાવો. તમને જણાશે કે પારદર્શક કાગળ પરનો $\angle 1$, મૂળ આકૃતિના $\angle 2$ સાથે બંધબેસતો આવે છે. આ રીતે નકલ કરેલો કાગળ સરકાવીને તમે નીચેનાં બધાં પરિણામો જોઈ શકશો.

(i) $\angle 1 = \angle 2$ (ii) $\angle 3 = \angle 4$ (iii) $\angle 5 = \angle 6$ (iv) $\angle 7 = \angle 8$



આકૃતિ 5.28

આ પ્રવૃત્તિ નીચેનું પરિણામ દર્શાવે છે :

> જો બે સમાંતર રેખાઓને એક છેદિકા છેદે તો અનુકોણની પ્રત્યેક જોડના ખૂણાનું માપ સમાન હોય છે.

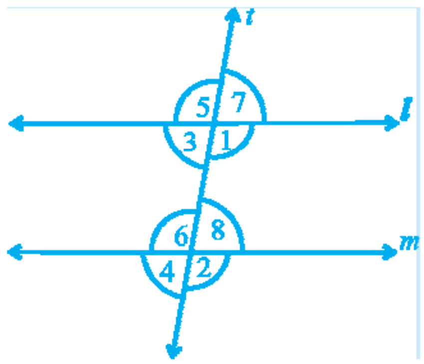
આ પરિણામનો ઉપયોગ આપણે એક બીજું રસપ્રદ પરિણામ મેળવવા માટે કરીશું. આકૃતિ 5.29 જુઓ.

જ્યારે રેખા t, સમાંતર રેખાઓ l અને mને છેદે છે ત્યારે $\angle 3 = \angle 7$ (અભિકોણો)

પરંતુ $\angle 7 = \angle 8$ (અનુકોણો) આથી $\angle 3 = \angle 8$

તમે એ જ રીતે $\angle 1 = \angle 6$ બતાવી શકો.

આમ, આપણને નીચેનું પરિણામ મળે છે.



આકૃતિ 5.29

> જો બે સમાંતર રેખાઓને છેદિકા છેદે તો અંતઃ યુગ્મકોણની દરેક જોડ સમાન હોય છે.

આ બીજા પરિણામ પરથી અન્ય એક રસપ્રદ ગુણધર્મ મળે છે. ફરીથી આકૃતિ 5.29 પરથી

$\angle 3 + \angle 1 = 180°$ ($\angle 3$ અને $\angle 1$ રૈખિક જોડ છે)

પરંતુ $\angle 1 = \angle 6$ (અંતઃ યુગ્મકોણની જોડ)

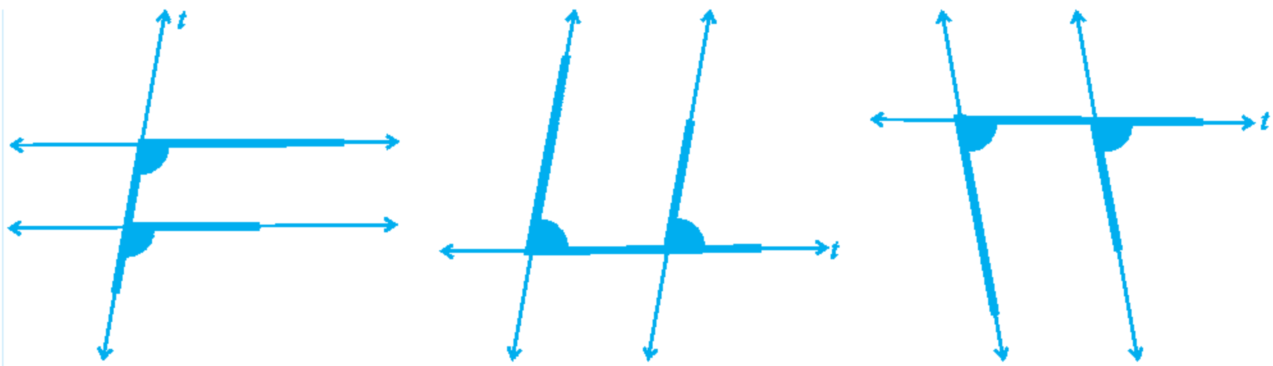
આથી કહી શકીએ કે $\angle 3 + \angle 6 = 180°$

તે જ રીતે $\angle 1 + \angle 8 = 180°$. આમ, નીચેનું પરિણામ મળે છે.

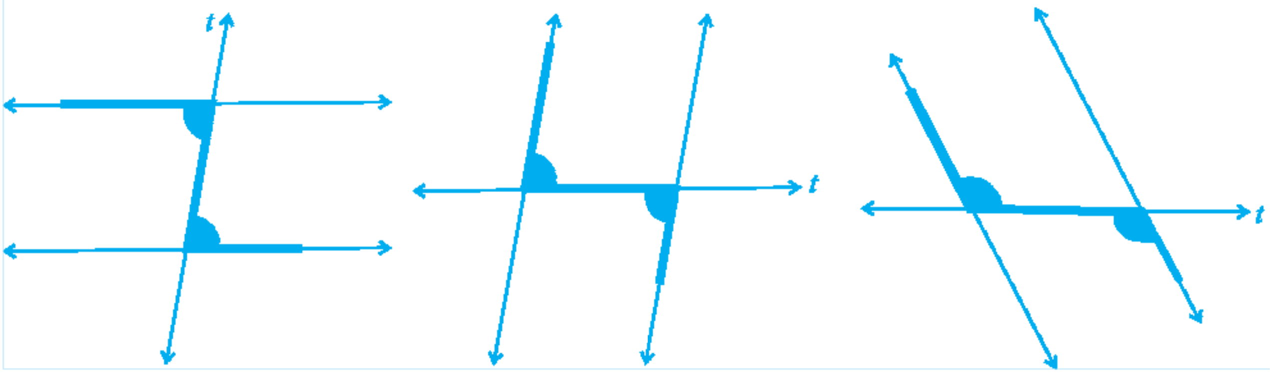
> જો બે સમાંતર રેખાને છેદિકા છેદે તો છેદિકાની એક બાજુના અંતઃકોણ પૂરક હોય છે.

તમે આ પરિણામો તેમને સંબંધિત 'આકાર' પરથી પણ યાદ રાખી શકો.

F આકાર અનુકોણ માટે



Z આકાર યુગ્મકોણ માટે



જાતે કરો

બે સમાંતર રેખાઓ અને તેની છેદિકા દોરો. ખૂણાઓને માપીને ઉપરનાં ત્રણ પરિણામ ચકાસી જુઓ.

પ્રયત્ન કરો

[redacted]

રેખાઓ $a \parallel b$; c છેદિકા છે. $\angle y = ?$

l_1 અને l_2 રેખાઓ છે. t છેદિકા છે. $\angle 1 = \angle 2$?

[redacted]

રેખાઓ $l \parallel m$; t છેદિકા છે. $\angle z = ?$

[redacted]

રેખાઓ $l \parallel m$; t છેદિકા છે. $\angle x = ?$

[redacted]

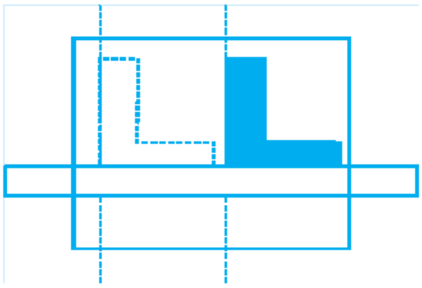
રેખાઓ $l \parallel m$, $p \parallel q$; a, b, c, d શોધો.

5.4 સમાંતર રેખાઓની ચકાસણી

જો બે રેખાઓ સમાંતર હોય તો તેની છેદિકા લેવાથી મળતા અનુકોણ સમાન હોય છે, અંતઃ યુગ્મકોણ સમાન હોય છે અને છેદિકાની એક બાજુના અંતઃકોણ પૂરક હોય છે.

જો બે રેખાઓ આપી હોય તો એવી કોઈ રીત છે કે જેનાથી તે રેખાઓ સમાંતર છે કે નહીં તે ચકાસી શકાય ? તમને જીવનમાં આવી આવડતની ખૂબ જરૂર પડશે.

એક ચિત્રકાર સુથારીકામનું સાધન અને માપપટ્ટીનો ઉપયોગ કરી રેખાખંડો દોરે છે (આકૃતિ 5.30). તે કહે છે કે આ રેખાખંડો સમાંતર છે. કેવી રીતે ?



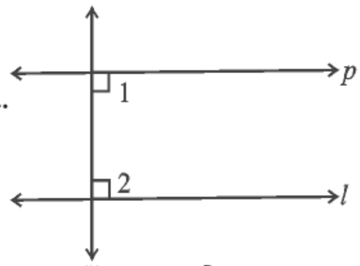
આકૃતિ 5.30

તમે ધ્યાન પર લીધું કે તેણે અનુકોણ સરખા રાખ્યા છે ? (અહીં છેદિકા કઈ છે ?) આમ, **જ્યારે એક છેદિકા બે રેખાઓ ને છેદે છે ત્યારે જો અનુકોણની જોડ સમાન થતી હોય તો તે બે રેખા સમાંતર હોય.**

આકૃતિ 5.31માં દર્શાવેલ Z જુઓ. અહીં આડા રેખાખંડો સમાંતર છે. કારણ કે યુગ્મકોણ સમાન છે.

આકૃતિ 5.31

આમ, જ્યારે એક છેદિકા બે રેખાને છેદે છે ત્યારે જો અંતઃ યુગ્મકોણ સમાન હોય તો તે બે રેખા સમાંતર હોય.



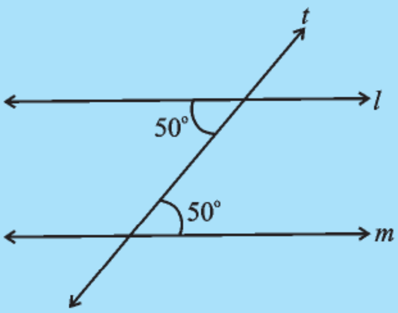
આકૃતિ 5.32

રેખા l દોરો. (આકૃતિ 5.32)

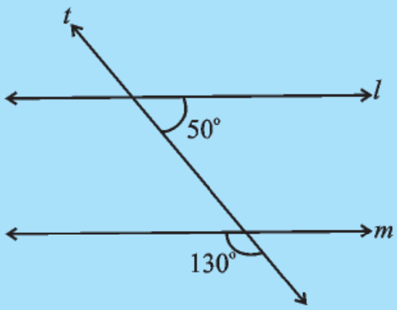
l ને લંબ રેખા m દોરો. ફરીથી રેખા p દોરો કે જે m ને લંબ હોય. આમ, p એ l ની લંબરેખાની લંબરેખા છે. તમને $p \parallel l$ મળશે. કેવી રીતે ? કારણ કે તમે p એવી રીતે દોરી છે કે જેથી $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

આમ જ્યારે એક છેદિકા બે રેખાને છેદે છે ત્યારે જો છેદિકાની એક બાજુના અંતઃ કોણ પૂરકકોણ હોય તો તે રેખાઓ સમાંતર હોય.

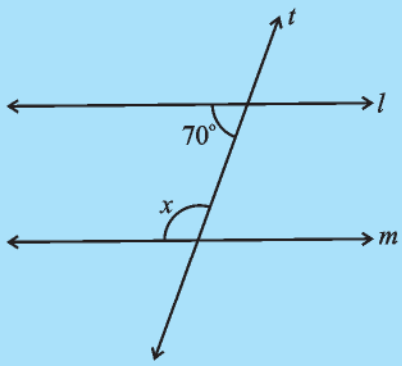
પ્રયત્ન કરો



$l \parallel m$ છે ? શા માટે ?



$l \parallel m$ છે ? શા માટે ?



જો $l \parallel m$ હોય તો $\angle x$ = ?

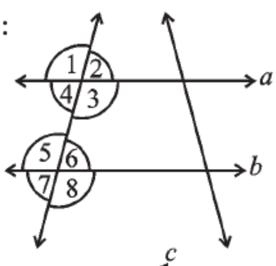
સ્વાધ્યાય 5.2

1. નીચેના દરેક વિધાનમાં જે ગુણધર્મનો ઉપયોગ થાય છે તે જણાવો :

   (i) જો $a \parallel b$, તો $\angle 1 = \angle 5$.

   (ii) જો $\angle 4 = \angle 6$, તો $a \parallel b$.

   (iii) જો $\angle 4 + \angle 5 = 180°$, તો $a \parallel b$.



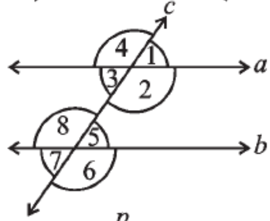
2. બાજુની આકૃતિમાંથી કહો :

   (i) અનુકોણની જોડો

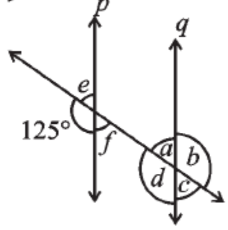
   (ii) અંતઃ યુગ્મકોણની જોડો

   (iii) છેદિકાની એક જ બાજુના અંતઃ કોણની જોડો

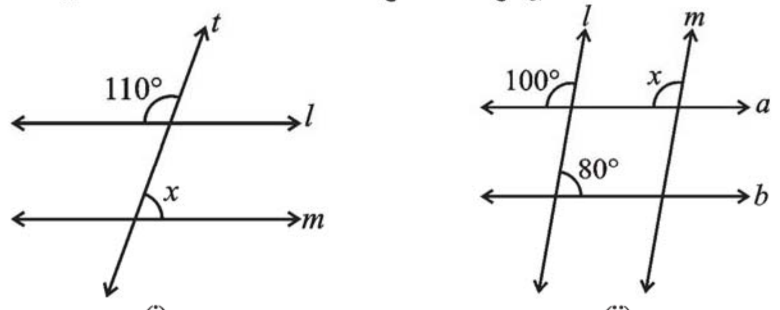
   (iv) અભિકોણ



3. બાજુની આકૃતિમાં $p \parallel q$ છે. અજ્ઞાત ખૂણાઓ શોધો.



4. જો $l \parallel m$ હોય તો નીચેની દરેક આકૃતિમાં x નું મૂલ્ય શોધો.

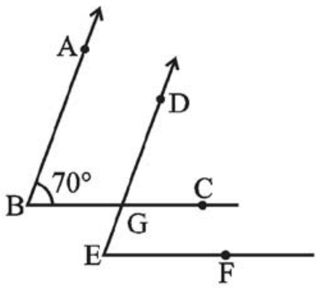


(i) (ii)

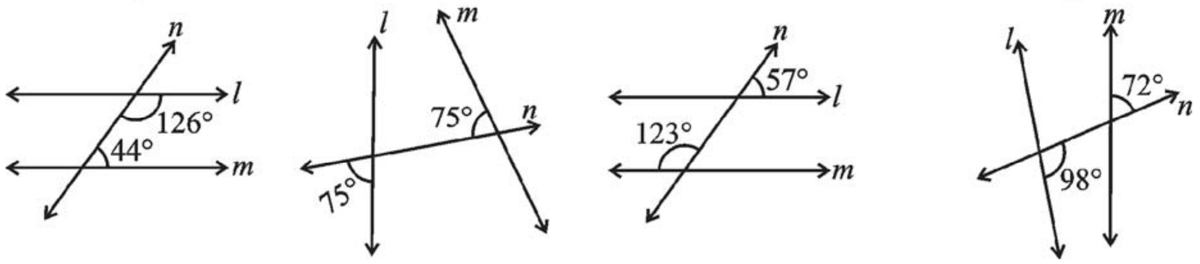
5. બાજુની આકૃતિમાં બંને ખૂણાની બાજુ સમાંતર છે. જો $\angle ABC = 70°$ તો.

(i) $\angle DGC$

(ii) $\angle DEF$ શોધો.



6. નીચેની આકૃતિઓમાં l અને m સમાંતર છે કે નહિ તે નક્કી કરો.



(i) (ii) (iii) (iv)

આપણે શું ચર્ચા કરી ?

1. આપણે યાદ કરીએ કે (i) રેખાખંડને બે અંતિમબિંદુ હોય છે.
   (ii) કિરણને માત્ર એક જ અંતિમબિંદુ હોય છે (તેનું આરંભ બિંદુ) અને
   (iii) રેખાને બંને બાજુએ અંતિમબિંદુ હોતાં નથી.
2. જ્યારે બે રેખા (કે કિરણ કે રેખાખંડ) મળે છે ત્યારે ખૂણો રચાય છે.

ખૂણાની જોડ	**શરત**
બે કોટિકોણ	માપનો સરવાળો 90°
બે પૂરકકોણ	માપનો સરવાળો 180°
બે આસન્નકોણ	સામાન્ય શિરોબિંદુઓ હોય અને એક બાજુ સામાન્ય હોય પણ અંદરનો ભાગ સામાન્ય નથી હોતો.
રૈખિક જોડ	આસન્નકોણ અને પૂરકકોણ

3. જ્યારે બે રેખા l અને m મળે છે ત્યારે તેઓ છેદે છે એમ કહેવાય અને જે બિંદુમાં મળે તેને છેદબિંદુ કહેવાય.

કાગળ પર દોરેલી બે રેખાઓ ગમે તેટલી દૂર સુધી લંબાવવામાં આવે તો પણ મળતી નથી તો તેને સમાંતર રેખાઓ કહેવાય.

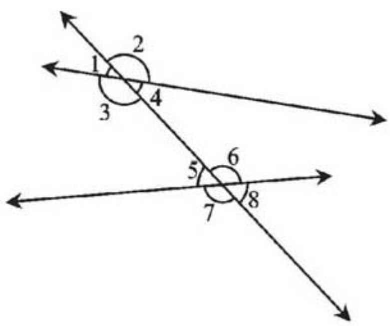
4. (i) જ્યારે બે રેખા છેદે છે (અંગ્રેજી અક્ષર X જેવું દેખાતું હોય) ત્યારે સામસામેના ખૂણાની બે જોડ મળે છે. તેમને અભિકોણ કહેવાય છે. અભિકોણનાં માપ સમાન હોય છે.

(ii) બે કે વધુ રેખાને ભિન્ન બિંદુમાં છેદતી રેખાને છેદિકા કહેવાય છે.

(iii) છેદિકાથી ઘણા પ્રકારના ખૂણાઓ મળે છે.

(iv) બાજુની આકૃતિમાં જોતાં

ખૂણાના પ્રકાર	ખૂણાઓ
અંતઃકોણ	$\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$
બહિઃકોણ	$\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$
અનુકોણ	$\angle 1$ અને $\angle 5$, $\angle 2$ અને $\angle 6$ $\angle 3$ અને $\angle 7$, $\angle 4$ અને $\angle 8$
અંતઃ યુગ્મકોણ	$\angle 3$ અને $\angle 6$, $\angle 4$ અને $\angle 5$
બાહ્ય યુગ્મકોણ	$\angle 1$ અને $\angle 8$, $\angle 2$ અને $\angle 7$
છેદિકાની એક જ બાજુના અંતકોણ	$\angle 3$ અને $\angle 5$, $\angle 4$ અને $\angle 6$



(v) જ્યારે છેદિકા બે સમાંતર રેખાને છેદે ત્યારે નીચે પ્રમાણેના રસપ્રદ સંબંધો મળે છે :

અનુકોણની દરેક જોડ સમાન હોય છે.

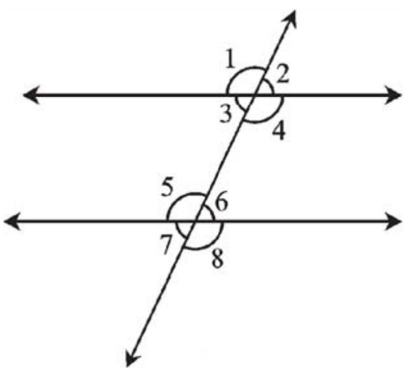
$$\angle 1 = \angle 5, \angle 3 = \angle 7, \angle 2 = \angle 6, \angle 4 = \angle 8$$

અંતઃ યુગ્મકોણની દરેક જોડ સમાન હોય છે.

$$\angle 3 = \angle 6, \angle 4 = \angle 5$$

છેદિકાની એક જ બાજુના અંતઃકોણ પૂરક હોય છે.

$$\angle 3 + \angle 5 = 180°, \angle 4 + \angle 6 = 180°$$



પ્રકરણ 6

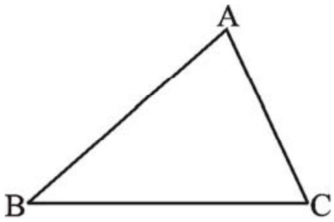
ત્રિકોણ અને તેના ગુણધર્મો

FJNYAR

6.1 પ્રસ્તાવના

તમે શીખ્યા છો કે ત્રિકોણ એ ત્રણ રેખાખંડોથી બનેલો એક સાદો બંધ વક્ર છે. તેને ત્રણ શિરોબિંદુઓ, ત્રણ બાજુઓ અને ત્રણ ખૂણાઓ છે.

આકૃતિ 6.1 માં ΔABC દોરેલો છે. તેમાં



આકૃતિ 6.1

બાજુઓ : $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$

ખૂણાઓ : $\angle BAC, \angle ABC, \angle BCA$

શિરોબિંદુઓ : A, B, C

શિરોબિંદુ Aની સામેની બાજુ BC છે. બાજુ ABની સામેના ખૂણાનું નામ આપી શકશો ?

ત્રિકોણનું (i) તેની બાજુના આધારે અને (ii) ખૂણાના આધારે કેવી રીતે વર્ગીકરણ કરી શકાય તે તમે જાણો છો.

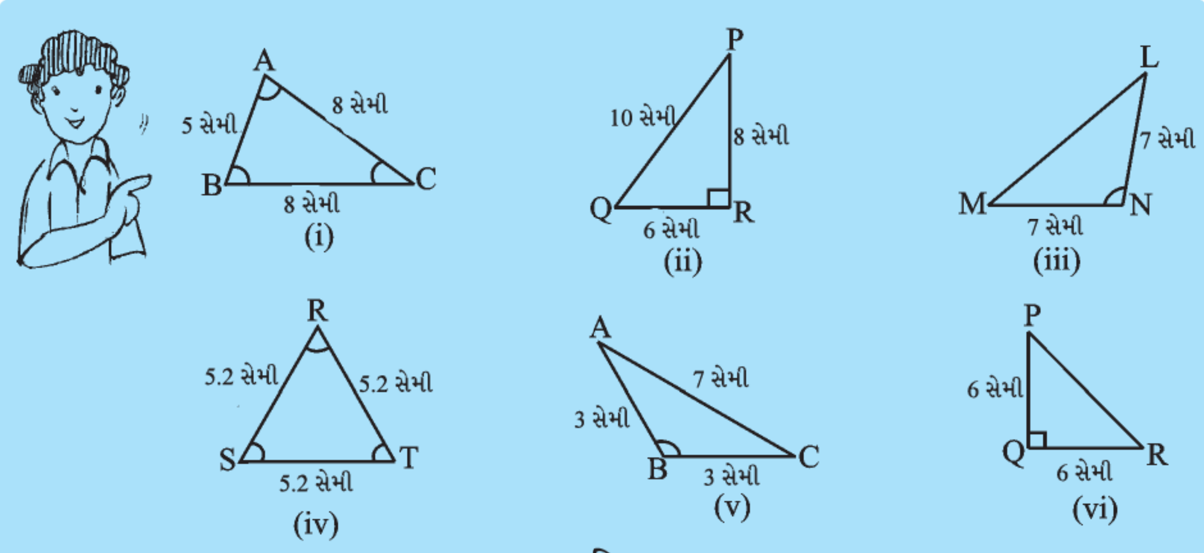
(i) બાજુને આધારે : વિષમબાજુ, સમદ્વિબાજુ અને સમબાજુ ત્રિકોણ.

(ii) ખૂણાને આધારે : લઘુકોણ, ગુરુકોણ અને કાટકોણ ત્રિકોણ.

ઉપરના દર્શાવેલાં ત્રિકોણના આકારો કાગળમાંથી કાપો. તમારા નમૂના અને તમારા મિત્રોએ કાપેલા નમૂના સરખાવો અને ચર્ચા કરો.

પ્રયત્ન કરો

1. ΔABCના છ ઘટકો (એટલે કે 3 બાજુઓ અને 3 ખૂણાઓ) લખો.
2. (i) ΔPQRમાં શિરોબિંદુ Qની સામેની બાજુ,
   (ii) ΔLMNમાં બાજુ LMની સામેનો ખૂણો,
   (iii) ΔRSTમાં બાજુ RTની સામેનું શિરોબિંદુ લખો.
3. આકૃતિ 6.2 જુઓ અને દરેક ત્રિકોણનું વર્ગીકરણ (i) બાજુ પ્રમાણે અને (ii) ખૂણા પ્રમાણે કરો :

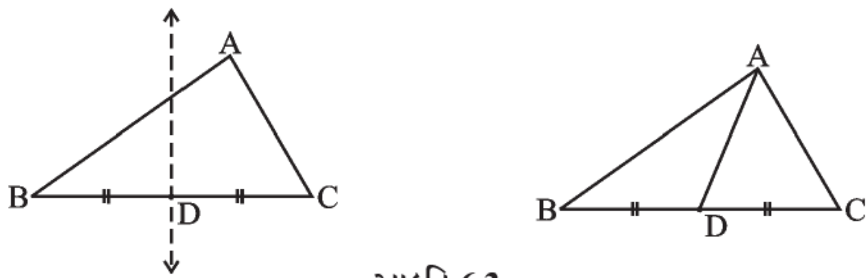


આકૃતિ 6.2

હવે આપણે ત્રિકોણ વિશે કેટલીક વિસ્તૃત સમજ મેળવીએ.

6.2 ત્રિકોણની મધ્યગા (Medians of a Triangle)

આપેલા રેખાખંડનો લંબદ્વિભાજક કાગળને વાળીને કેવી રીતે શોધી શકાય તે તમે જાણો છો. એક કાગળમાંથી ΔABC કાપો (આકૃતિ 6.3). તેની કોઈ પણ એક બાજુ, ધારો કે $\overline{BC}$ લો. કાગળને વાળીને $\overline{BC}$ ના લંબદ્વિભાજકનું સ્થાન નક્કી કરો. વાળવાથી મળતો સળ $\overline{BC}$ ને Dમાં મળે છે જે $\overline{BC}$ નું મધ્યબિંદુ છે. $\overline{AD}$ દોરો.



આકૃતિ 6.3

$\overline{BC}$ ના મધ્યબિંદુને તેની સામેના શિરોબિંદુ સાથે જોડતો રેખાખંડ AD ત્રિકોણની **મધ્યગા** કહેવાય છે. બાજુઓ $\overline{AB}$ અને $\overline{CA}$ લઈને ત્રિકોણની બીજી બે મધ્યગા શોધો. **મધ્યગા ત્રિકોણના શિરોબિંદુને તેની સામેની બાજુના મધ્યબિંદુ સાથે જોડે છે.**

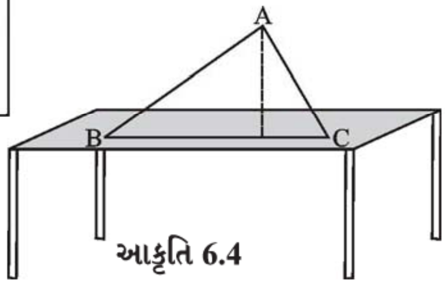
વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

1. કોઈ પણ ત્રિકોણને કેટલી મધ્યગા હોઈ શકે ?
2. આખી મધ્યગા ત્રિકોણની અંદરના ભાગમાં સમાયેલી છે ? (જો તમને લાગે કે આ સાચું નથી તો તેવી આકૃતિ દોરીને બતાવો.)

6.3 ત્રિકોણના વેધ (Altitudes of A Triangle)

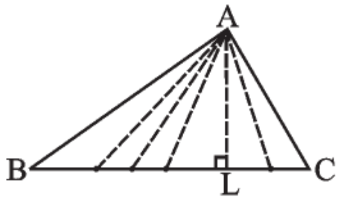
3Q66Z2

ત્રિકોણ આકારનું પૂઠું (કાર્ડબૉર્ડ) ABC કાપો. ટેબલ પર તેને ઊભું મૂકો. આ ત્રિકોણ કેટલો 'ઊંચો' છે ? શિરોબિંદુ Aથી આધાર $\overline{BC}$ સુધીના અંતરને તેની **ઊંચાઈ** કહે છે. (આકૃતિ 6.4).



આકૃતિ 6.4

A થી $\overline{BC}$ સુધીના ઘણા રેખાખંડ દોરી શકો છો. (આકૃતિ 6.5) તેમાંનો કયો રેખાખંડ ઊંચાઈ દર્શાવશે ?



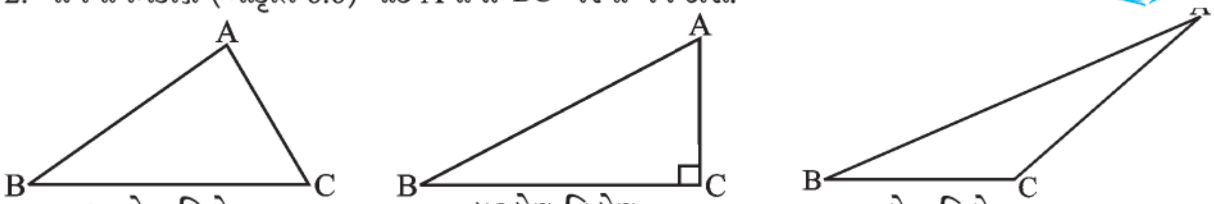
આકૃતિ 6.5

Aથી શરૂ થતો સીધો નીચે $\overline{BC}$ પર આવતો અને $\overline{BC}$ ને લંબ રેખાખંડ $\overline{AL}$ **ઊંચાઈ** દર્શાવે છે. આ $\overline{AL}$ **ત્રિકોણનો વેધ છે.**

ત્રિકોણના વેધનું એક અંતિમબિંદુ ત્રિકોણનું શિરોબિંદુ છે અને બીજું સામેની બાજુને સમાવતી રેખા પર છે. દરેક શિરોબિંદુમાંથી વેધ દોરી શકાય છે.

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

1. એક ત્રિકોણના કેટલા વેધ હોઈ શકે ?
2. નીચેના ત્રિકોણ (આકૃતિ 6.6) માટે Aમાંથી $\overline{BC}$ પરના વેધ દોરો.



લઘુકોણ ત્રિકોણ (i) | કાટકોણ ત્રિકોણ (ii) | ગુરુકોણ ત્રિકોણ (iii)

આકૃતિ 6.6

3. શું વેધ હંમેશાં ત્રિકોણની અંદરના ભાગમાં જ આવશે ? જો તમને આ સાચું ન લાગતું હોય તો તે દર્શાવવા કાચી આકૃતિ દોરો.
4. તમે એવો ત્રિકોણ વિચારી શકો જેના બે વેધ તેની બે બાજુ જ છે ?
5. કોઈ ત્રિકોણ માટે વેધ અને મધ્યગા સમાન હોઈ શકે ?

(સૂચન : સવાલ 4 અને 5 માટે દરેક પ્રકારના ત્રિકોણના બધા વેધ દોરીને જવાબ શોધો.)

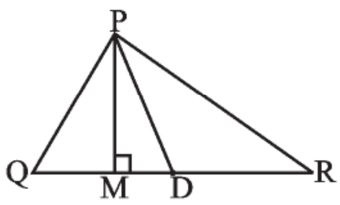
આ કરો

(i) સમબાજુ ત્રિકોણ (ii) સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ

(iii) વિષમબાજુ ત્રિકોણ પ્રકારના ભિન્ન ત્રિકોણ કાપો.

તેના વેધ અને મધ્યગા શોધો. તમને તેમાં કંઈ ખાસ વિશેષતા જણાય છે ? મિત્રો સાથે ચર્ચા કરો.

સ્વાધ્યાય 6.1



1. ΔPQRમાં, D એ $\overline{QR}$ નું મધ્યબિંદુ છે.

   $\overline{PM}$ ________ છે.

   $\overline{PD}$ ________ છે.

   QM = MR છે ?

2. નીચેના માટે કાચી આકૃતિ દોરો :

   (a) ΔABCમાં $\overline{BE}$ મધ્યગા છે.

   (b) ΔPQRમાં $\overline{PQ}$ અને $\overline{PR}$ ત્રિકોણના વેધ છે.

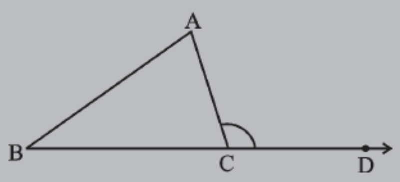
   (c) ΔXYZમાં $\overline{YL}$ ત્રિકોણની બહારના ભાગમાં આવેલો વેધ છે.

3. આકૃતિ દોરીને ચકાસો કે સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણમાં મધ્યગા અને વેધ સમાન હોઈ શકે.

3QF31P

6.4 ત્રિકોણનો બહિષ્કોણ(Exterior Angle) અને તેના ગુણધર્મો

આ કરો



આકૃતિ 6.7

1. ΔABC દોરો અને આકૃતિ 6.7 માં બતાવ્યા પ્રમાણે તેની કોઈ પણ એક બાજુ, ધારો કે $\overline{BC}$ ને આગળ લંબાવો. C આગળ બનતો $\angle ACD$ જુઓ. આ ખૂણો ΔABC ની બહારના ભાગમાં છે. આપણે તેને શિરોબિંદુ C આગળ બનતો ΔABCનો **બહિષ્કોણ** કહીશું. સ્પષ્ટ છે કે $\angle BCA$ એ $\angle ACD$ નો આસન્નકોણ છે. ત્રિકોણના બાકીના બે ખૂણા $\angle A$ અને $\angle B$ **અંતઃસંમુખકોણ** કહેવાય છે અથવા $\angle ACD$ના દૂરના અંતઃકોણ પણ કહેવાય છે. હવે $\angle A$ અને $\angle B$ કાપો (અથવા તેની નકલ બનાવો) અને તેમને આકૃતિ 6.8માં બતાવ્યા પ્રમાણે એકબીજાની પાસે ગોઠવો. શું આ બંને મળીને આખો $\angle ACD$ આવરી લે છે ? શું તમે કહી શકો કે, $m\angle ACD = m\angle A + m\angle B$?

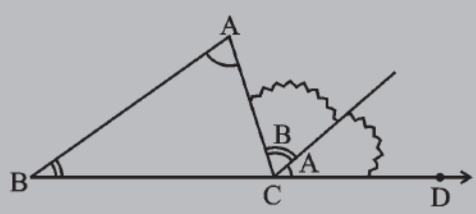
2. અગાઉની જેમ ΔABC દોરો અને તેનો બહિષ્કોણ ACD બનાવો. હવે કોણમાપકથી $\angle ACD$, $\angle A$ અને $\angle B$ નાં માપ માપો.

   $\angle A + \angle B$ નાં માપનો સરવાળો કરો

   અને તેને $\angle ACD$નાં માપ સાથે સરખાવો.

   તમે જોયું કે $\angle ACD$,

   $\angle A + \angle B$ ને સમાન (અથવા માપનમાં ભૂલ હોય તો લગભગ સમાન) છે ?



આકૃતિ 6.8

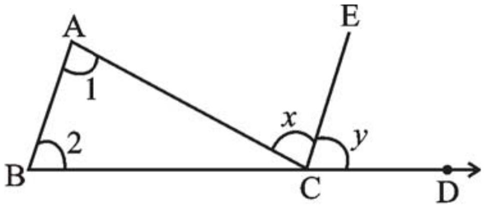
તમે ઉપર જણાવેલી બંને પ્રવૃત્તિ બીજા કેટલાક ત્રિકોણ અને તેના બહિષ્કોણ દોરીને વારંવાર કરી શકો. દરેક વખતે તમને જણાશે કે ત્રિકોણનો બહિષ્કોણ તેના અંતઃસંમુખકોણના સરવાળા જેટલો છે. આ હકીકત તાર્કિક ક્રમબદ્ધ દલીલોથી નિશ્ચિત કરી શકાય.

ત્રિકોણનો બહિષ્કોણ તેના અંતઃ સંમુખકોણના સરવાળા જેટલો હોય છે.

પક્ષ : ΔABC લો. $\angle ACD$ બહિષ્કોણ છે.

સાધ્ય : $m\angle ACD = m\angle A + m\angle B$

Cમાંથી $\overline{CE}$, $\overline{BA}$ને સમાંતર દોરો.



આકૃતિ 6.9

સાબિતી :

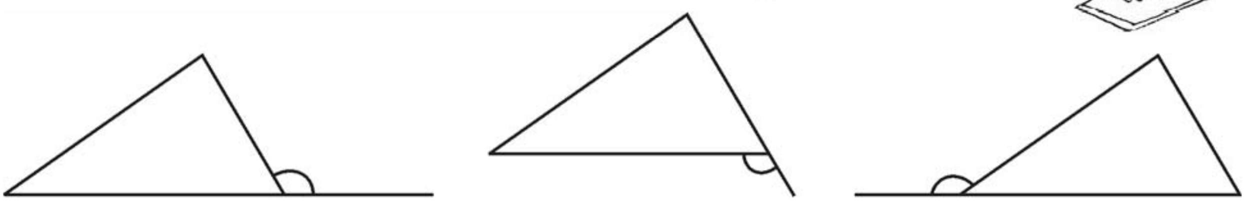
પગલું	કારણ
(a) $\angle 1 = \angle x$	$\overline{BA} \parallel \overline{CE}$ અને $\overline{AC}$ છેદિકા છે. આથી યુગ્મકોણ સમાન થાય.
(b) $\angle 2 = \angle y$	$\overline{BA} \parallel \overline{CE}$ અને $\overline{BD}$ છેદિકા છે. આથી અનુકોણ સમાન થાય.
(c) $\angle 1 + \angle 2 = \angle x + \angle y$	
(d) હવે $\angle x + \angle y = m\angle ACD$	આકૃતિ 6.9 પરથી

આથી $\angle 1 + \angle 2 = \angle ACD$

ત્રિકોણના બહિષ્કોણ અને તેના અંતઃસંમુખકોણ વચ્ચેનો ઉપર દર્શાવેલ સંબંધ **ત્રિકોણના બહિષ્કોણના ગુણધર્મ** તરીકે ઓળખાય છે.

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

1. ત્રિકોણના બહિષ્કોણ ઘણી રીતે બનાવી શકાય. તેમાંની ત્રણ રીત આકૃતિ 6.10 માં દર્શાવી છે.



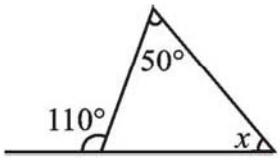
આકૃતિ 6.10

બહિષ્કોણ મેળવવાની હજુ વધારે ત્રણ રીતો છે. તેની કાચી આકૃતિઓ બનાવવાનો પ્રયત્ન કરો.

2. ત્રિકોણના દરેક ખૂણા આગળ બનતા બહિષ્કોણ સરખા છે ?

3. ત્રિકોણનો બહિષ્કોણ અને તેની અંદરના તેના આસન્નકોણના સરવાળા બાબતે તમે શું કહી શકો ?

ઉદાહરણ 1 આકૃતિ 6.11માં ખૂણો x શોધો.



આકૃતિ 6.11

ઉકેલ અંતઃસંમુખકોણનો સરવાળો = બહિષ્કોણ

અથવા $50° + x = 110°$

અથવા $x = 60°$

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

1. જ્યારે બહિષ્કોણ (i) કાટકોણ હોય, (ii) ગુરુકોણ હોય અને (iii) લઘુકોણ હોય તો દરેક વખતે બંને અંતઃસંમુખકોણ વિશે તમે શું કહી શકો ?
2. કોઈ ત્રિકોણનો બહિષ્કોણ એ સરળકોણ હોઈ શકે ?

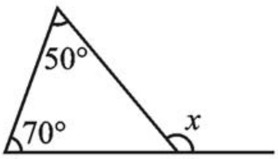
પ્રયત્ન કરો


આકૃતિ 6.12

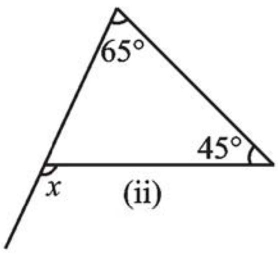
1. એક ત્રિકોણના બહિષ્કોણનું માપ 70° છે અને તેના એક અંતઃસંમુખ કોણનું માપ 25° છે. બીજા અંતઃસંમુખકોણનું માપ શોધો.
2. એક ત્રિકોણના બહિષ્કોણના અંતઃસંમુખકોણના માપ 60° અને 80° છે. તો બહિષ્કોણનું માપ શોધો.
3. આકૃતિ 6.12 માં કંઈ ખોટું છે ? તમારું મંતવ્ય લખો.

સ્વાધ્યાય 6.2

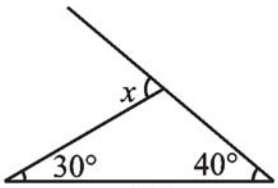
1. નીચેની આકૃતિઓમાં બહિષ્કોણ xનું માપ શોધો.



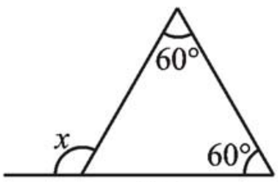
(i)



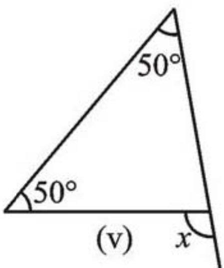
(ii)



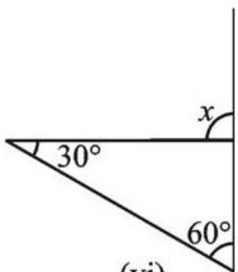
(iii)



(iv)

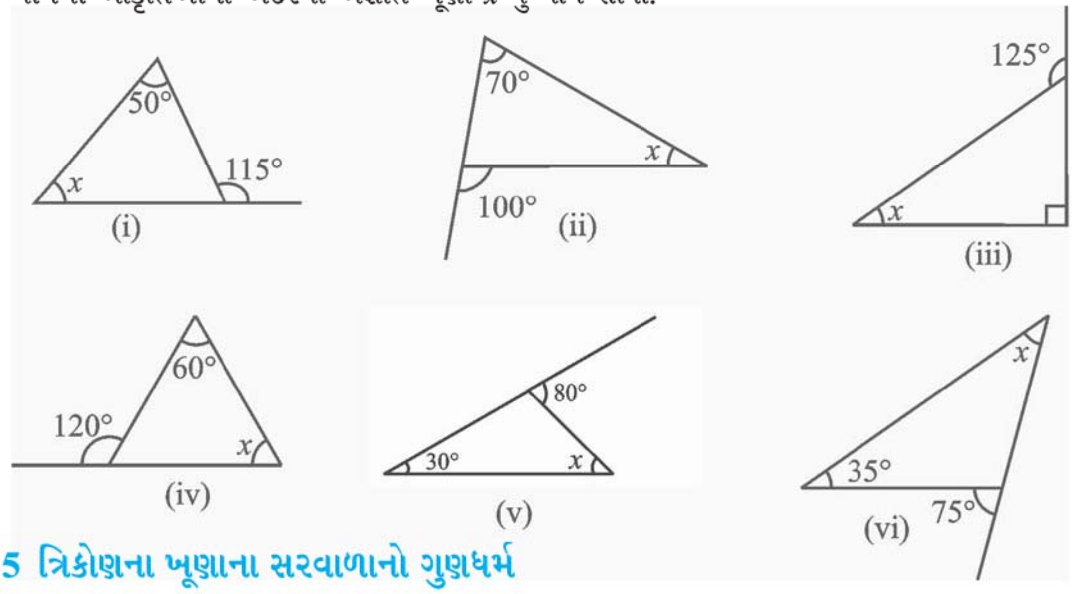


(v)



(vi)

2. નીચેની આકૃતિઓમાં અંદરના અજ્ઞાત ખૂણા x નું માપ શોધો.

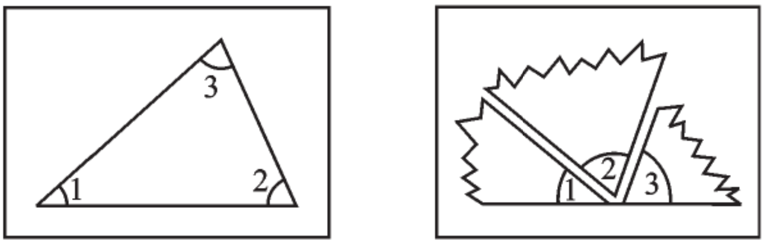


6.5 ત્રિકોણના ખૂણાના સરવાળાનો ગુણધર્મ

ત્રિકોણના ત્રણ ખૂણાને સાંકળતો ધ્યાન ખેંચે તેવો એક ગુણધર્મ છે. તમે એ નીચેની ચાર પ્રવૃત્તિ દ્વારા જોશો.

42JFFL

1. એક ત્રિકોણ દોરો. તેના ત્રણે ખૂણા કાપો. તેમને ફરીથી ગોઠવો [આકૃતિ 6.13 (i), (ii)]. હવે આ ત્રણ ખૂણા એક ખૂણો બનાવે છે. આ એક સરળ કોણ છે અને આથી તેનું માપ 180° છે.

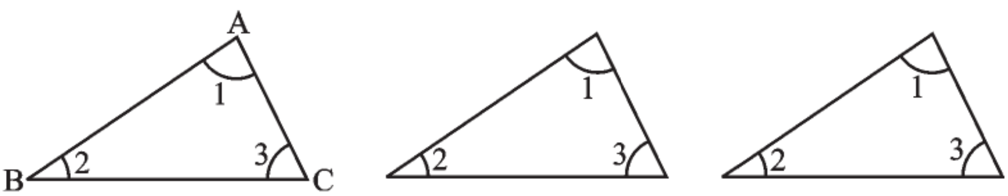


(i) (ii)

આકૃતિ 6.13

આમ, ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણાના માપનો સરવાળો 180° છે.

2. આ જ હકીકત તમે બીજી રીતે પણ જોઈ શકો. કોઈ પણ ΔABCની ત્રણ નકલ લો (આકૃતિ 6.14).

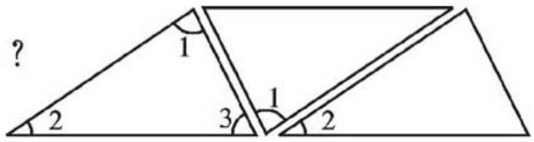


આકૃતિ 6.14

તેમને આકૃતિ 6.15 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ગોઠવો.

તમે $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ વિશે શું અવલોકન કરો છો ?

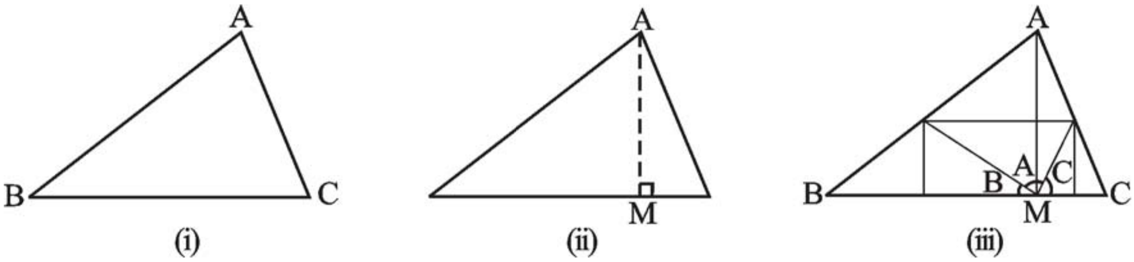
(તમે બહિષ્કોણનો ગુણધર્મ પણ જોઈ શકો છો ?)



આકૃતિ 6.15

3. એક કાગળમાંથી ΔABC કાપો (આકૃતિ 6.16).

ΔABCને A આગળથી વાળીને વેધ AM બનાવો, જે Aમાંથી પસાર થાય. હવે ત્રણે ખૂણાને એવી રીતે વાળો કે જેથી ત્રણે શિરોબિંદુઓ A, B અને C, M આગળ સ્પર્શે



આકૃતિ 6.16

તમે જોશો કે ત્રણે ખૂણા સાથે મળીને એક સરળકોણ બનાવે છે. આમ, ફરીથી જણાય છે કે ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણાના માપનો સરવાળો 180° થાય છે.

4. તમારી નોટબુકમાં ત્રણ ત્રિકોણો ΔABC, ΔPQR અને ΔXYZ દોરો. કોણમાપકનો ઉપયોગ કરીને દરેક ત્રિકોણના બધા ખૂણા માપો. તમારાં પરિણામોને કોષ્ટકમાં ગોઠવો.

Δનું નામ	ખૂણાના માપ	ત્રણ ખૂણાનાં માપનો સરવાળો
ΔABC	$m\angle A =$ ___ $m\angle B =$ ___ $m\angle C =$ ___	$m\angle A + m\angle B + m\angle C =$ ___
ΔPQR	$m\angle P =$ ___ $m\angle Q =$ ___ $m\angle R =$ ___	$m\angle P + m\angle Q + m\angle R =$ ___
ΔXYZ	$m\angle X =$ ___ $m\angle Y =$ ___ $m\angle Z =$ ___	$m\angle X + m\angle Y + m\angle Z =$ ___

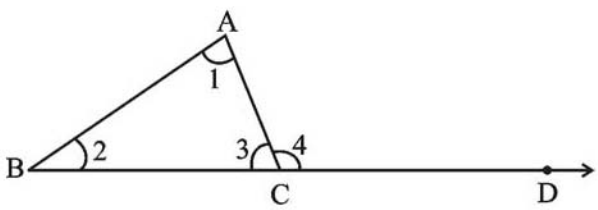
માપ લેવામાં થતી નાની ભૂલોને સ્વીકારીએ તો તમે જોશો કે છેલ્લા ખાનામાં હંમેશાં 180° (અથવા લગભગ 180°) આવે છે.

જો ચોક્સાઈપૂર્વકના માપ શક્ય હોય તો આ પણ બતાવે છે કે ત્રિકોણના ત્રણ ખૂણાનાં માપનો સરવાળો 180° છે.

હવે તમે તાર્કિક દલીલો દ્વારા તમારા આ તારણની સાબિતી આપવા માટે તૈયાર છો.

વિધાન : ત્રિકોણના ત્રણ ખૂણાનાં માપનો સરવાળો 180° છે.

આ સાબિત કરવા માટે આપણે ત્રિકોણના બહિષ્કોણના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરીએ.



આકૃતિ 6.17

પક્ષ : $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \Delta ABC$ના ખૂણાઓ છે. (આકૃતિ 6.17).

$\angle 4$ એ BCને D સુધી લંબાવતાં મળતો બહિષ્કોણ છે.

સાબિતી

$\angle 1 + \angle 2 = \angle 4$ (બહિષ્કોણનો ગુણધર્મ)

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 3$ (બંને બાજુ $\angle 3$ ઉમેરતાં)

પરંતુ $\angle 4$ અને $\angle 3$ રૈખિક જોડ રચે છે. આથી $\angle 4 + \angle 3 = 180°$

માટે $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$.

હવે આપણે આ ગુણધર્મના ઉપયોગો જોઈશું.

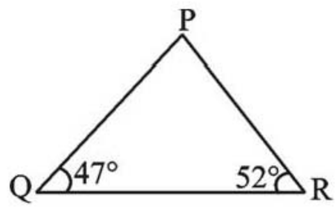
ઉદાહરણ 2 આપેલી (આકૃતિ 6.18) માં $m\angle P$ શોધો.

ઉકેલ ત્રિકોણના ખૂણાના માપના ગુણધર્મ પ્રમાણે

$m\angle P + 47° + 52° = 180°$

માટે $m\angle P = 180° - 47° - 52°$

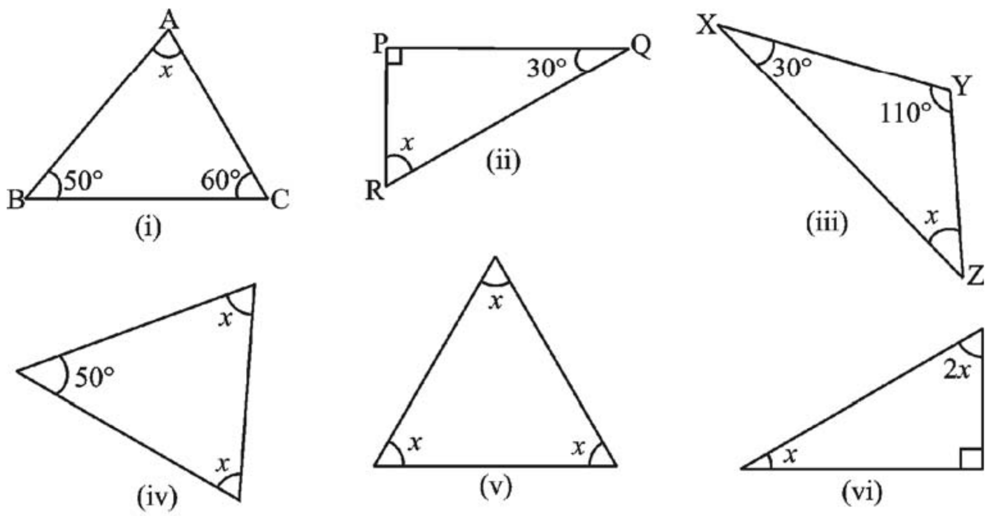
$= 180° - 99° = 81°$



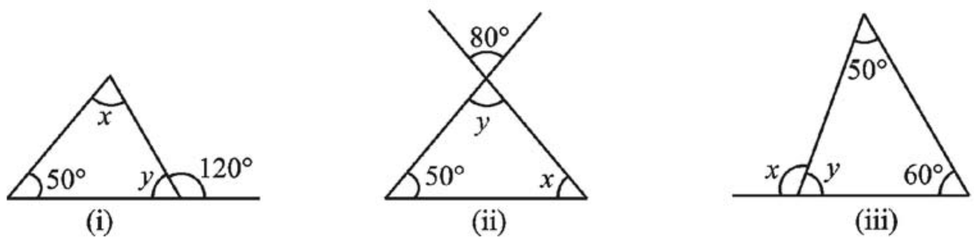
આકૃતિ 6.18

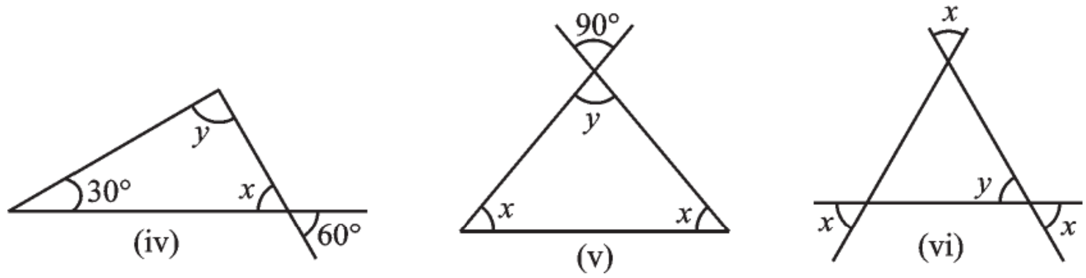
સ્વાધ્યાય 6.3

1. નીચેની આકૃતિમાં અજ્ઞાત xનું મૂલ્ય શોધો.



2. નીચેની આકૃતિઓમાં અજ્ઞાત x અને y નાં મૂલ્યો શોધો.





પ્રયત્ન કરો

1. ત્રિકોણના બે ખૂણા 30° અને 80° છે. ત્રીજો ખૂણો શોધો.
2. ત્રિકોણનો એક ખૂણો 80° નો છે અને બાકીના બંને ખૂણા સરખા છે. તે બંનેનાં માપ શોધો.
3. ત્રિકોણના ત્રણ ખૂણા 1 : 2 : 1 ના પ્રમાણમાં છે. આ ત્રિકોણના બધા ખૂણા શોધો. આ ત્રિકોણને બે ભિન્ન રીતે ઓળખો.

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

1. બે કાટખૂણાવાળો ત્રિકોણ મળી શકે ?
2. બે ગુરુકોણવાળો ત્રિકોણ મળી શકે ?
3. બે લઘુકોણવાળો ત્રિકોણ મળી શકે ?
4. જેના ત્રણે ખૂણા 60° કરતાં મોટા હોય તેવો ત્રિકોણ મળી શકે ?
5. જેના ત્રણે ખૂણા 60° હોય તેવો ત્રિકોણ મળી શકે ?
6. જેના ત્રણે ખૂણા 60° કરતાં નાના હોય તેનો ત્રિકોણ મળી શકે ?

6.6 બે વિશિષ્ટ ત્રિકોણ : સમબાજુ અને સમદ્વિબાજુ (Equilateral and Isosceles Triangles)

42TBH9

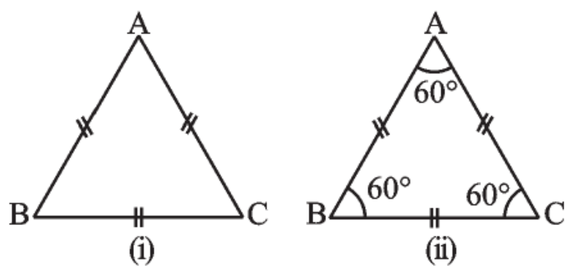
જે ત્રિકોણમાં બધી બાજુ સમાન લંબાઈની હોય તે ત્રિકોણને સમબાજુ ત્રિકોણ કહે છે.

સમબાજુ ત્રિકોણ ΔABCની બે નકલ કરો (આકૃતિ 6.19). તેમાંની એકને સ્થિર રાખો. બીજા ત્રિકોણને પહેલા પર મૂકો. તે પહેલા પર બરાબર બંધબેસતો આવે છે. તેને કોઈ પણ દિશામાં ફેરવો છતાં પણ તે બરાબર બંધબેસતો રહે છે. તમારા ધ્યાન પર આવ્યું હશે કે જ્યારે ત્રિકોણની ત્રણે બાજુનાં માપ સરખાં હોય ત્યારે ત્રણ ખૂણા પણ સમાન માપના છે ?

આપણે તારણ કાઢીએ કે સમબાજુ ત્રિકોણમાં

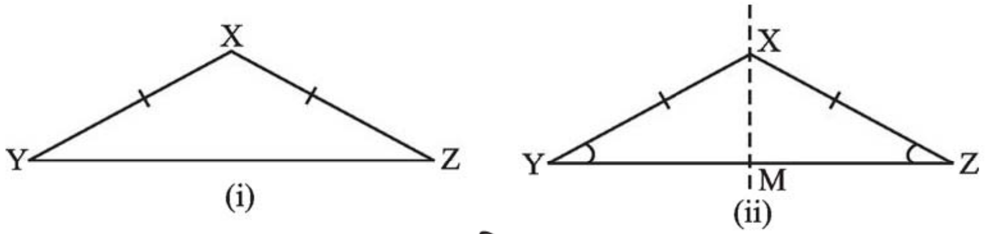
(i) બધી બાજુઓની લંબાઈ સમાન છે.

(ii) દરેક ખૂણાનું માપ 60° છે.



આકૃતિ 6.19

જે ત્રિકોણમાં બે બાજુ સમાન લંબાઈની હોય તેને સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ કહે છે.



આકૃતિ 6.20

કાગળમાંથી એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ XYZ કાપો, જેમાં XY = XZ છે (આકૃતિ 6.20). Z એ Y પર આવે તે રીતે એને વાળો. Xમાંથી મળતી રેખા (સળ) XM એ સંમિતિની અક્ષ છે. (જે તમે પ્રકરણ 14માં શીખશો). તમને જણાશે કે ∠Y અને ∠Z એકબીજા પર બંધબેસતા આવે છે. XY અને XZને સમાન બાજુ કહે છે. YZ ને આધાર કહે છે, ∠Y અને ∠Zને આધારના ખૂણા કહે છે અને તેઓ પણ સમાન છે.

આમ, એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણમાં-

(i) બે બાજુની લંબાઈ સરખી છે.

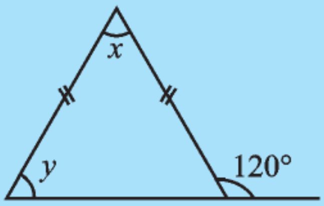
(ii) સમાન બાજુની સામેના ખૂણા સમાન છે.

પ્રયત્ન કરો

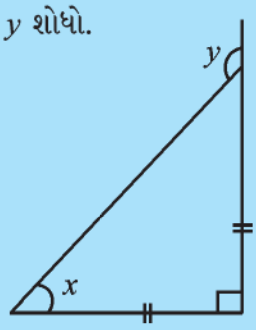
1. દરેક આકૃતિમાં ખૂણો x શોધો :

[redacted]

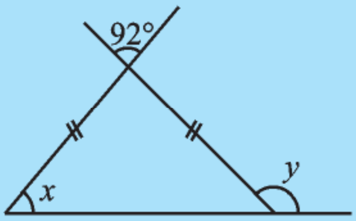
2. દરેક આકૃતિમાં ખૂણા x અને y શોધો.



(i)



(ii)

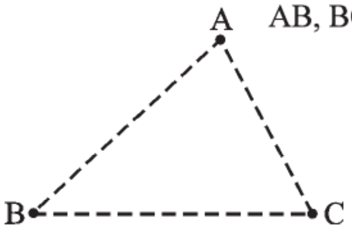


(iii)

6.7 ત્રિકોણની બે બાજુની લંબાઈનો સરવાળો

BSB8DN

1. રમતના મેદાનમાં ત્રણ અસમરેખ બિંદુઓ A, B અને C નક્કી કરો. ચૂનાના પાવડરથી AB, BC અને CA રસ્તા આંકો.



આકૃતિ 6.21

તમારા મિત્રને A થી ચાલવાનું શરૂ કરીને આમાંના એક અથવા વધુ રસ્તા પર ચાલીને C સુધી પહોંચવાનું કહો. જેમ કે તે પહેલાં $\overline{AB}$ પર અને પછી $\overline{BC}$ પર ચાલીને C સુધી પહોંચી જાય અથવા તે સીધો $\overline{AC}$ પર ચાલીને C પર પહોંચે. સ્વાભાવિક રીતે તે સીધો રસ્તો $\overline{AC}$ પસંદ કરશે. જો તે બીજો રસ્તો (પહેલાં $\overline{AB}$ અને પછી $\overline{BC}$ નો) પસંદ કરે તો વધારે ચાલવાનું થશે. બીજા શબ્દોમાં,

$$AB + BC > AC \qquad \text{(i)}$$

એ જ રીતે જો કોઈએ Bથી શરૂ કરીને A પર પહોંચવાનું હોય તો તે $\overline{BC}$ અને $\overline{CA}$ નો રસ્તો પસંદ નહિ કરે પણ $\overline{BA}$ પસંદ કરશે કારણ કે,

$$BC + CA > AB \qquad \text{(ii)}$$

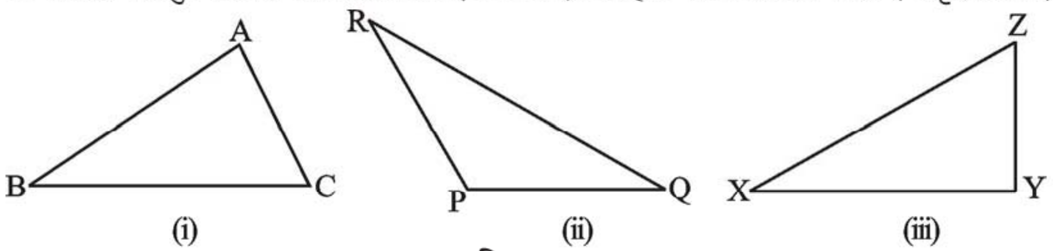
એ જ રીતે આપણને મળે કે,

$$CA + AB > BC \qquad \text{(iii)}$$

આ અવલોકનો પરથી સૂચન મળે છે કે **ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુની લંબાઈનો સરવાળો ત્રીજી બાજુ કરતાં વધુ છે.**

2. જુદી જુદી લંબાઈઓ, જેમ કે 6 સેમી, 7 સેમી, 8 સેમી, 9 સેમી, ..., 20 સેમીની 15 નાની લાકડીઓ (અથવા પટ્ટીઓ) લો. આમાંની કોઈ પણ ત્રણ લાકડી લો અને ત્રિકોણ બનાવવાનો પ્રયત્ન કરો. ત્રણ લાકડીઓ ભિન્ન ભિન્ન રીતે પસંદ કરી વારંવાર પ્રયત્ન કરો. ધારો કે તમે પહેલાં 6 સેમી અને 12 સેમી લંબાઈની બે દાંડીઓ પસંદ કરી છે. તમારી ત્રીજી લાકડીની લંબાઈ $12 - 6 = 6$ સેમી કરતાં વધુ અને $12 + 6 = 18$ સેમી કરતાં ઓછી જ હોવી જોઈએ. પ્રયત્ન કરો અને શોધો કે આવું શા માટે થાય છે ? ત્રિકોણ બનાવવા માટે તમારે એવી ત્રણ લાકડીઓ લેવી પડશે કે હંમેશાં તેમાંની કોઈ પણ બેની લંબાઈનો સરવાળો ત્રીજા કરતાં મોટો થવો જોઈએ. આ સૂચવે છે કે ત્રિકોણની બે બાજુની લંબાઈનો સરવાળો ત્રીજી બાજુથી વધુ હોય છે.

3. તમારી નોટબુકમાં કોઈ પણ ત્રણ ત્રિકોણ, ΔABC, ΔPQR અને ΔXYZ દોરો. (આકૃતિ 6.22)



આકૃતિ 6.22

તમારી માપપટ્ટીની મદદથી તેમની લંબાઈ માપો અને તમને મળેલાં પરિણામ નીચે પ્રમાણે કોષ્ટકમાં નોંધો :

Δનું નામ	બાજુઓની લંબાઈ	શું આ સાચું છે ?	
ΔABC	AB ___	AB − BC < CA	(હા / ના)
		___ + ___ > ___	
	BC ___	BC − CA < AB	(હા / ના)
		___ + ___ > ___	
	CA ___	CA − AB < BC	(હા / ના)
		___ + ___ > ___	
ΔPQR	PQ ___	PQ − QR < RP	(હા / ના)
		___ + ___ > ___	
	QR ___	QR − RP < PQ	(હા / ના)
		___ + ___ > ___	
	RP ___	RP − PQ < QR	(હા / ના)
		___ + ___ > ___	
ΔXYZ	XY ___	XY − YZ < ZX	(હા / ના)
		___ + ___ > ___	
	YZ ___	YZ − ZX < XY	(હા / ના)
		___ + ___ > ___	
	ZX ___	ZX − XY < YZ	(હા / ના)
		___ + ___ > ___	

આપણી અગાઉની ધારણા આનાથી વધુ **સુદૃઢ** થાય છે. આથી આપણે તારવીએ કે **ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુની લંબાઈનો સરવાળો ત્રીજી બાજુથી વધુ હોય છે.**

આપણને એ પરિણામ પણ મળે છે કે ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુની લંબાઈનો તફાવત ત્રીજી બાજુથી ઓછો હોય છે.

ઉદાહરણ 3 શું એવો ત્રિકોણ મળે કે જેની બાજુની લંબાઈ 10.2 સેમી, 5.8 સેમી અને 4.5 સેમી થાય ?

ઉકેલ ધારો કે આવો ત્રિકોણ શક્ય છે તો કોઈ પણ બે બાજુની લંબાઈનો સરવાળો ત્રીજી બાજુની લંબાઈ કરતાં વધુ થવો જોઈએ. ચાલો, આ ચકાસીએ.

$4.5 + 5.8 > 10.2$	થાય છે ?	હા
$5.8 + 10.2 > 4.5$	થાય છે ?	હા
$10.2 + 4.5 > 5.8$	થાય છે ?	હા

આથી આવો ત્રિકોણ શક્ય છે.

ઉદાહરણ 4 એક ત્રિકોણની બે બાજુની લંબાઈ 6 સેમી અને 8 સેમી છે. ત્રીજી બાજુની લંબાઈ કઈ બે સંખ્યાઓ વચ્ચે આવશે ?

ઉકેલ આપણે જાણીએ છીએ કે ત્રિકોણની બે બાજુનો સરવાળો હંમેશાં ત્રીજી બાજુ કરતાં વધુ હોય છે.

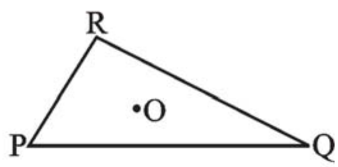
આથી ત્રીજી બાજુ આ બે બાજુનાં સરવાળા કરતાં નાની થવી જોઈએ. આમ, ત્રીજી બાજુ $8 + 6 = 14$ સેમી કરતાં નાની થવી જોઈએ.

ત્રીજી બાજુ, બે બાજુના તફાવતથી નાની ન હોઈ શકે. આમ, ત્રીજી બાજુ $8 - 6 = 2$ સેમી કરતાં મોટી હોવી જોઈએ.

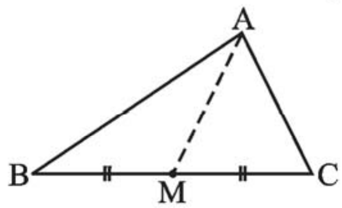
ત્રીજી બાજુ 2 સેમીથી મોટી અને 14 સેમીથી નાની કોઈ પણ લંબાઈની હોઈ શકે.

સ્વાધ્યાય 6.4

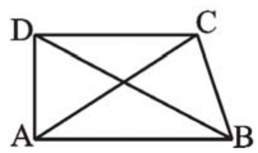
1. નીચે પ્રમાણેની બાજુઓ ધરાવતો ત્રિકોણ શક્ય છે ?
   (i) 2 સેમી, 3 સેમી, 5 સેમી (ii) 3 સેમી, 6 સેમી, 7 સેમી
   (iii) 6 સેમી, 3 સેમી, 2 સેમી



2. ΔPQRના અંદરના ભાગમાં કોઈ પણ બિંદુ O લો.
   (i) શું $OP + OQ > PQ$ છે ?
   (ii) શું $OQ + OR > QR$ છે ?
   (iii) શું $OR + OP > RP$ છે ?



3. ΔABCની મધ્યગા AM છે.
   $AB + BC + CA > 2AM$ થાય છે ?
   (ΔABM અને ΔAMCની બાજુઓને ધ્યાનમાં લો.)



4. ABCD એક ચતુષ્કોણ છે.
   $AB + BC + CD + DA > AC + BD$ થાય છે ?
5. ABCD એક ચતુષ્કોણ છે.
   $AB + BC + CD + DA < 2(AC + BD)$ થાય છે ?

6. એક ત્રિકોણની બે બાજુઓની લંબાઈ 12 સેમી અને 15 સેમી છે. ત્રીજી બાજુની લંબાઈ કયા બે માપની વચ્ચે આવવી જોઈએ ?

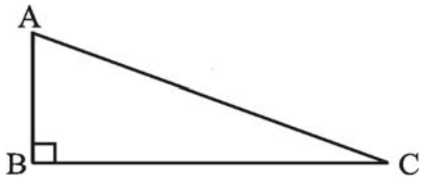
વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

1. શું ત્રિકોણના કોઈ પણ બે ખૂણાનો સરવાળો હંમેશાં ત્રીજા ખૂણા કરતાં વધુ હોય છે?

6.8 કાટકોણ ત્રિકોણ અને પાયથાગૉરસનો ગુણધર્મ (right-angled Triangle and pythagoras Property)

BSK4FB

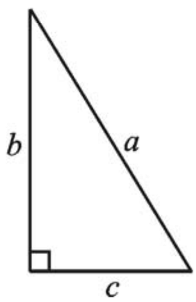
ઈ.સ. પૂર્વે છઠ્ઠી સદીમાં થયેલા ગ્રીક તત્ત્વજ્ઞાની પાયથાગૉરસે અહીં આપેલો કાટકોણ ત્રિકોણનો એક અગત્યનો ગુણધર્મ શોધ્યો હોવાનું કહેવાય છે. આથી આ ગુણધર્મ તેમના નામ સાથે જોડાયેલો છે. હકીકતે આ ગુણધર્મ બીજા કેટલાક દેશોના લોકો માટે પણ જાણીતો હતો. ભારતીય ગણિતશાસ્ત્રી બૌધાયને પણ આને સમકક્ષ ગુણધર્મ જણાવેલો છે. હવે આપણે પાયથાગૉરસનો ગુણધર્મ સમજવાનો પ્રયત્ન કરીએ.



આકૃતિ 6.23

કાટકોણ ત્રિકોણમાં બાજુઓનાં ખાસ નામ છે. કાટખૂણાની સામેની બાજુને **કર્ણ** કહેવામાં આવે છે. બાકીની બે બાજુઓને કાટકોણ ત્રિકોણના **પાયા** (કાટખૂણો બનાવતી બાજુઓ) કહેવામાં આવે છે.

ΔABCમાં (આકૃતિ 6.23) B આગળ કાટખૂણો છે. આથી AC કર્ણ છે. $\overline{AB}$ અને $\overline{BC}$ એ ΔABCના **પાયા** છે.

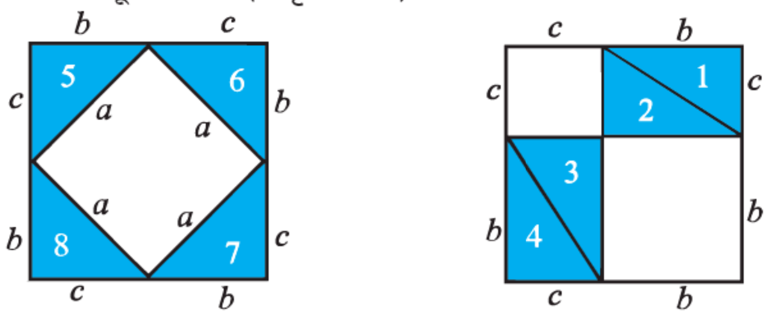


આકૃતિ 6.24

તમને યોગ્ય લાગે તે માપના કાટકોણ ત્રિકોણની 8 એકસરખી નકલો કરો. દા.ત. તમે એવો કાટકોણ ત્રિકોણ બનાવો જેનો કર્ણ a એકમ લંબાઈનો છે અને બીજી બાજુઓની લંબાઈ b અને c એકમ છે. (આકૃતિ 6.24)

એક કાગળ પર બે એકસરખા ચોરસ દોરો જેની બાજુની લંબાઈ $b + c$ જેટલી હોય.

નીચેની આકૃતિ 6.25માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે તમારે ચાર ત્રિકોણ એક ચોરસમાં અને બીજા ચાર ત્રિકોણ બીજા ચોરસમાં મૂકવાના છે. (આકૃતિ 6.25).



ચોરસ A ચોરસ B

આકૃતિ 6.25

ચોરસ એકસરખા છે અને જે આઠ ત્રિકોણ મૂક્યા (ગોઠવ્યા) તે પણ એકસરખા છે.

આથી ચોરસ Aના અનાવૃત્ત ભાગનું ક્ષેત્રફળ = ચોરસ Bના અનાવૃત્ત ભાગનું ક્ષેત્રફળ.

એટલે કે ચોરસ Aની અંદરના ચોરસનું ક્ષેત્રફળ = ચોરસ Bની અંદરના બંને અનાવૃત્ત ચોરસનું કુલ ક્ષેત્રફળ

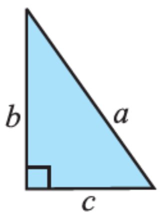
$$a^2 = b^2 + c^2$$

આ પાયથાગોરસનો ગુણધર્મ છે. તેને નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

કાટકોણ ત્રિકોણમાં કર્ણ પરનો ચોરસ = બાકીની બાજુઓ પરના ચોરસનો સરવાળો

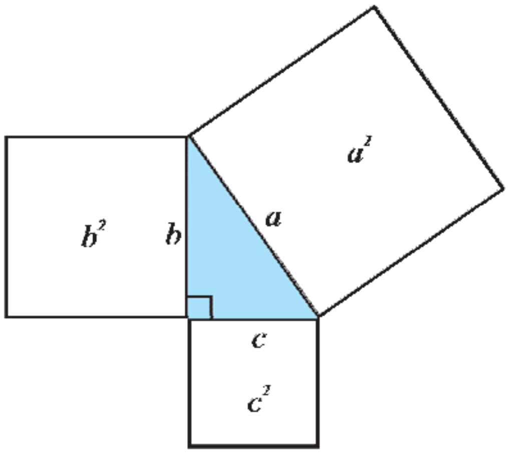
આ ગુણધર્મ ગણિતમાં ખૂબ જ ઉપયોગી **પરિણામ** છે. હવે પછીનાં ધોરણોમાં તમે એની સાબિતી શીખશો. અત્યારે તમને એનો અર્થ સ્પષ્ટ હોવો જોઈએ.

પરિણામ એ છે કે કોઈ પણ કાટકોણ ત્રિકોણ માટે કર્ણ પરના ચોરસનું ક્ષેત્રફળ બીજી બે બાજુઓ પરના ચોરસનાં ક્ષેત્રફળોના સરવાળા જેટલું હોય છે.



શક્ય હોય તો ચોરસ ખાનાંવાળા કાગળ પર કાટકોણ ત્રિકોણ દોરીને તેની બાજુઓ પર ચોરસ રચો. ચોરસનું ક્ષેત્રફળ ગણીને પ્રમેયને પ્રાયોગિક રીતે ચકાસો. (આકૃતિ 6.26).

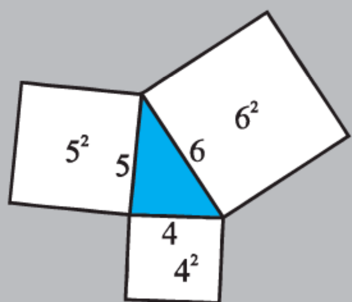
જો કાટકોણ ત્રિકોણ આપેલો હોય તો પાયથાગોરસનો ગુણધર્મ સાચો છે. જો કોઈ ત્રિકોણ માટે પાયથાગોરસનું પરિમાણ સાચું હોય તો તે કાટકોણ ત્રિકોણ છે ? (આવા પ્રશ્નો પ્રતિપ્રશ્નો તરીકે ઓળખાય છે.) આપણે એનો જવાબ આપવાનો પ્રયત્ન કરીશું. હવે આપણે એ બતાવીશું કે જો કોઈ ત્રિકોણ માટે તેની બે બાજુ પરના ચોરસનો સરવાળો તે ત્રીજી બાજુ પરના ચોરસ જેટલો થાય છે તો એ કાટકોણ ત્રિકોણ જ છે.



આકૃતિ 6.26

આ કરો

1. 4 સેમી, 5 સેમી અને 6 સેમી બાજુની લંબાઈવાળા ચોરસ કાપો. એ ચોરસના ખૂણાને યોગ્ય રીતે ગોઠવીને (આકૃતિ 6.27) ત્રિકોણાકાર ભાગ મેળવો. આ ભાગની નકલ કરીને ત્રિકોણ બનાવો. આ ત્રિકોણના દરેક ખૂણા માપો. તમને જણાશે કે કોઈ પણ ખૂણો કાટકોણ નથી. ખરેખર તો આ કિસ્સામાં દરેક ખૂણો લઘુકોણ છે ! નોંધો કે $4^2 + 5^2 \neq 6^2$, $5^2 + 6^2 \neq 4^2$ અને $6^2 + 4^2 \neq 5^2$.



આકૃતિ 6.27

2. ઉપરની પ્રવૃત્તિ 4 સેમી, 5 સેમી અને 7 સેમી લંબાઈની બાજુવાળા ચોરસ માટે ફરીથી કરો. તમને એક ગુરુકોણ ત્રિકોણ મળશે !

નોંધો કે $4^2 + 5^2 \neq 7^2$ વગેરે.

આ બતાવે છે કે પાયથાગૉરસનો ગુણધર્મ સાચો હોય તો અને તો જ ત્રિકોણ, કાટકોણ ત્રિકોણ હોય. આમ, આપણને નીચેની હકીકત મળે છે.

જો પાયથાગૉરસની શરત સાબિત થતી હોય તો તે કાટકોણ ત્રિકોણ જ હોય.

ઉદાહરણ 5 જેની બાજુની લંબાઈ 3 સેમી, 4 સેમી અને 5 સેમી છે તેવો ત્રિકોણ કાટકોણ ત્રિકોણ છે કે નહિ તે નક્કી કરો.

ઉકેલ $3^2 = 3 \times 3 = 9$; $4^2 = 4 \times 4 = 16$; $5^2 = 5 \times 5 = 25$ અને $3^2 + 4^2 = 5^2$ મળે છે.

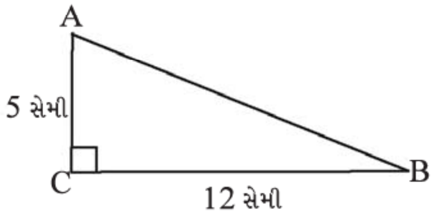
આથી આ ત્રિકોણ કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

નોંધ : કોઈ પણ કાટકોણ ત્રિકોણમાં કર્ણ સૌથી લાંબી બાજુ છે. આ ઉદાહરણમાં 5 સેમી લંબાઈ વાળી બાજુ કર્ણ છે.

ઉદાહરણ 6 ΔABCમાં $\angle C$ કાટખૂણો છે.

જો $AC = 5$ સેમી અને $BC = 12$ સેમી

તો ABની લંબાઈ શોધો.



આકૃતિ 6.28

ઉકેલ કાચી આકૃતિ આપણને મદદરૂપ બનશે (આકૃતિ 6.28) :

પાયથાગૉરસ પ્રમેય મુજબ

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$= 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$$

અથવા $AB^2 = 13^2$, આથી $AB = 13$ અથવા ABની લંબાઈ 13 સેમી છે.

નોંધ : પૂર્ણવર્ગ શોધવા માટે તમે અવિભાજ્ય અવયવોની રીતનો ઉપયોગ કરી શકો.

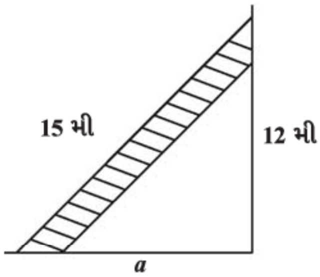
પ્રયત્ન કરો

નીચેની આકૃતિઓમાં અજ્ઞાત લંબાઈ x શોધો : (આકૃતિ 6.29)

આકૃતિ 6.29

સ્વાધ્યાય 6.5

1. ΔPQRમાં $\angle P$ કાટખૂણો છે. જો $PQ = 10$ સેમી અને $PR = 24$ સેમી હોય તો QR શોધો.
2. ΔABCમાં $\angle C$ કાટખૂણો છે. જો $AB = 25$ સેમી અને $AC = 7$ સેમી તો BC શોધો.
3. 15 મીટર લાંબી નિસરણીને દીવાલ સાથે ટેકવતાં તે જમીનથી 12 મીટર ઊંચી બારી સુધી પહોંચે છે. નિસરણીના જમીન પરના છેડાનું દીવાલથી અંતર a શોધો.



4. નીચેનામાંથી કાટકોણ ત્રિકોણની કઈ બાજુઓ હોઈ શકે ?

   (i) 2.5 સેમી, 6.5 સેમી, 6 સેમી

   (ii) 2 સેમી, 2 સેમી, 5 સેમી

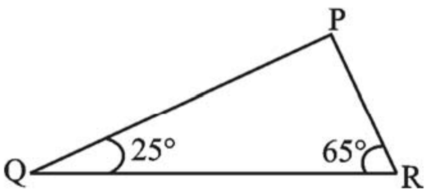
   (iii) 1.5 સેમી, 2 સેમી, 2.5 સેમી

   જો કાટકોણ ત્રિકોણ હોય તો કયો ખૂણો કાટકોણ છે તે નક્કી કરો.
5. એક ઝાડ જમીન પરથી 5 મીટર ઊંચાઈએથી તૂટી પડે છે અને તેની ટોચ ઝાડના થડથી 12 મીટર અંતરે જમીનને અડે છે. ઝાડની મૂળ ઊંચાઈ શોધો.
6. ΔPQRમાં $\angle Q$ અને $\angle R$ અનુક્રમે 25° અને 65° છે. નીચેના માંથી કયું સાચું છે તે લખો :

   (i) $PQ^2 + QR^2 = RP^2$

   (ii) $PQ^2 + RP^2 = QR^2$

   (iii) $RP^2 + QR^2 = PQ^2$



7. જેની બાજુની લંબાઈ 40 સેમી અને વિકર્ણની લંબાઈ 41 સેમી હોય તેવા લંબચોરસની પરિમિતિ શોધો.
8. સમબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણોના માપ 16 સેમી અને 30 સેમી છે. તેની પરિમિતિ શોધો.

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

1. P આગળ કાટખૂણો હોય તેવા ΔPQRની લાંબામાં લાંબી બાજુ કઈ ?
2. B આગળ કાટખૂણો હોય તેવા ΔABCની લાંબામાં લાંબી બાજુ કઈ ?
3. કાટકોણ ત્રિકોણની લાંબામાં લાંબી બાજુ કઈ ?
4. ''લંબચોરસના વિકર્ણ પર દોરેલા ચોરસનું ક્ષેત્રફળ, તેની લંબાઈ અને પહોળાઈ પર દોરેલા ચોરસના ક્ષેત્રફળના સરવાળા જેટલું થાય છે.'' આ બૌધાયનનું પ્રમેય છે. આને પાયથાગૉરસના પ્રમેય સાથે સરખાવો.

જાતે કરો

જ્ઞાનવર્ધક પ્રવૃત્તિ

પાયથાગોરસપ્રમેયની ''ટુકડા કરો'' અને ''પુનઃ ગોઠવો'' પ્રક્રિયાનો ઉપયોગ કરતી ઘણી સાબિતીઓ છે. તેમાંની કેટલીક શોધો, ભેગી કરો અને તેની સમજણ આપતા ચાર્ટ બનાવો.

આપણે શું ચર્ચા કરી ?

1. ત્રિકોણનાં **છ અંગો** એ તેની **ત્રણ બાજુ** અને **ત્રણ ખૂણા** છે.
2. ત્રિકોણના શિરોબિંદુને તેની સામેની બાજુના મધ્યબિંદુ સાથે જોડતો રેખાખંડ ત્રિકોણની મધ્યગા કહેવાય છે. ત્રિકોણમાં ત્રણ મધ્યગા છે.
3. ત્રિકોણના શિરોબિંદુમાંથી તેની સામેની બાજુ પર દોરેલા લંબ રેખાખંડને ત્રિકોણનો વેધ કહેવાય છે. ત્રિકોણમાં ત્રણ વેધ છે.
4. જ્યારે ત્રિકોણની કોઈ બાજુને લંબાવવામાં આવે ત્યારે બહિષ્કોણ બને છે. દરેક શિરોબિંદુ આગળ બે રીતે બહિષ્કોણ રચી શકાય.
5. બહિષ્કોણનો ગુણધર્મ :
   ત્રિકોણના કોઈ પણ બહિષ્કોણનું માપ તેના અંતઃસંમુખકોણના માપના સરવાળા જેટલું હોય છે.
6. ત્રિકોણના ખૂણાનો સરવાળો :
   ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણાનાં માપનો સરવાળો $180°$ છે.
7. જો કોઈ ત્રિકોણની ત્રણે બાજુની લંબાઈ સમાન હોય તો તેને **સમબાજુ ત્રિકોણ** કહેવાય. સમબાજુ ત્રિકોણમાં દરેક ખૂણાનું માપ $60°$ છે.
8. જો ત્રિકોણની ઓછામાં ઓછી બે બાજુની લંબાઈ સમાન હોય તો તેને સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ કહે છે. બે સમાન સિવાયની ત્રીજી બાજુને તેનો આધાર કહે છે. ત્રિકોણના આધાર પરના ખૂણાઓ સમાન હોય છે.
9. ત્રિકોણની બાજુની લંબાઈનો ગુણધર્મ :
   ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુની લંબાઈનો સરવાળો ત્રીજી બાજુની લંબાઈ કરતાં વધુ હોય છે.
   ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુની લંબાઈનો તફાવત ત્રીજી બાજુની લંબાઈ કરતાં ઓછો હોય છે.

જ્યારે ત્રણ બાજુની લંબાઈઓ આપી હોય ત્યારે ત્રિકોણ દોરી શકાય કે કેમ તે નક્કી કરવા માટે આ ગુણધર્મ ઉપયોગી છે.

10. કાટકોણ ત્રિકોણમાં કાટખૂણાની સામેની બાજુને **કર્ણ** કહેવાય છે. બાકીની બે બાજુને કર્ણ સિવાયની બાજુઓ કહે છે.

11. **પાયથાગૉરસનો ગુણધર્મ :**

કાટકોણ ત્રિકોણમાં,

કર્ણ પરનો ચોરસ = બાકીની બે બાજુ પરના ચોરસનો સરવાળો

જો કોઈ ત્રિકોણ કાટકોણ ન હોય તો આ પરિણામ સાચું નથી. આ પરિણામ ત્રિકોણ કાટકોણ છે કે નહિ તે નક્કી કરવા માટે ઉપયોગી છે.

પ્રકરણ 7

ત્રિકોણની એકરૂપતા

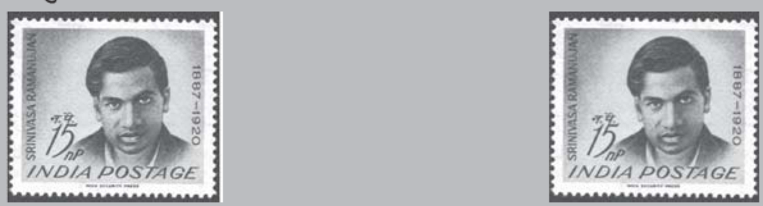
FJXUCE

7.1 પ્રસ્તાવના

હવે તમે ખૂબ અગત્યનો ભૌમિતિક ખ્યાલ શીખવા માટે તૈયાર છો જેને **'એકરૂપતા'** (Congruence) કહેવાય છે. તમારે ત્રિકોણની એકરૂપતા વિશે ઘણું શીખવાનું છે. એકરૂપતા શું છે એ સમજવા માટે આપણે કેટલીક પ્રવૃત્તિઓ કરીએ.

આ કરો

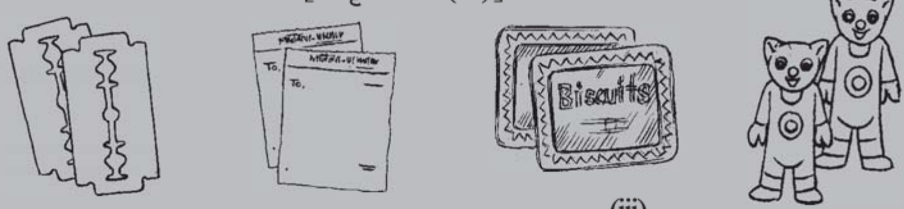
એકસરખા મૂલ્યની બે ટપાલ ટિકિટો લો. (આકૃતિ 7.1) એક ટિકિટ પર બીજી મૂકો. તમે શું અવલોકન કર્યું ?



આકૃતિ 7.1

એક ટિકિટ, બીજીને પૂરેપૂરી ચોકસાઈથી ઢાંકી દે છે. આનો અર્થ એ થયો કે બંને ટિકિટ એક જ આકાર અને માપની છે. આવી વસ્તુઓ એકરૂપ કહેવાય છે. તમે લીધેલી બે ટિકિટ એકબીજાને એકરૂપ છે. એકરૂપ વસ્તુઓ એકબીજાની નકલ હોય છે. શું હવે તમે કહી શકો કે નીચેની વસ્તુઓ એકરૂપ છે કે નહિ ?

1. એક જ ઉત્પાદકની બ્લૅડ [આકૃતિ 7.2 (i)]
2. એક જ **લેટરપેડ**ના કાગળ [આકૃતિ 7.2 (ii)]
3. એક જ પૅકેટમાંના બિસ્કિટ [આકૃતિ 7.2 (iii)]
4. એક જ બીબાંમાંથી બનેલાં રમકડાં [આકૃતિ 7.2 (iv)]



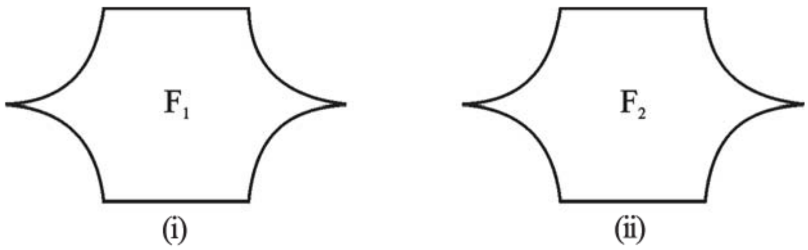
(i) (ii) (iii) (iv)

આકૃતિ 7.2

બે વસ્તુઓ એકરૂપ હોવાના સંબંધને **એકરૂપતા** કહે છે. અત્યારે આપણે માત્ર સમતલીય આકૃતિઓની જ વાત કરીશું, જો કે એકરૂપતા એ ત્રિપરિમાણીય આકારોને પણ લાગુ પડતો સામાન્ય ખ્યાલ છે. આપણે જે સમતલીય આકૃતિઓ જાણીએ છીએ તેની એકરૂપતાના ખ્યાલને ચોકસાઈભરી રીતે શીખીશું.

7.2 સમતલીય આકૃતિઓની એકરૂપતા (Congruence of Plane Figures)

અહીં આપેલી બે આકૃતિઓ જુઓ (આકૃતિ 7.3). શું તે એકરૂપ છે ?

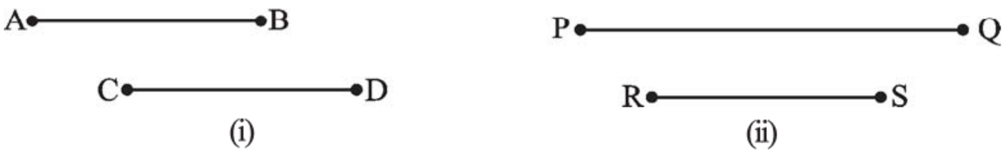


આકૃતિ 7.3

તમે એક પર બીજી આકૃતિ ગોઠવવાની રીતનો ઉપયોગ કરી શકો. એકની નકલ પારદર્શક કાગળ પર લો અને તેને બીજા ઉપર ગોઠવો. જો આકૃતિઓ એકબીજાને સંપૂર્ણપણે આવરી લે તો તેઓ એકરૂપ છે અથવા તમે એકને કાપીને બીજા પર ગોઠવી શકો. ધ્યાન રાખજો, કાપેલી કે દોરેલી આકૃતિને વાળવાની, ફેરવવાની કે ખેંચવાની નથી. આકૃતિ 7.3માં જો F_1 એ F_2 ને એકરૂપ હોય તો $F_1 \cong F_2$ લખાય.

7.3 રેખાખંડોમાં એકરૂપતા (Congruence among Line Segments)

બે રેખાખંડ એકરૂપ ક્યારે હોય ? નીચે આપેલ રેખાખંડની બે જોડનું અવલોકન કરો (આકૃતિ 7.4).



આકૃતિ 7.4

આકૃતિ7.4(i) માં આપેલ જોડી માટે નકલ કરીને એકને બીજા પર ગોઠવવાની રીતનો ઉપયોગ કરો. $\overline{CD}$ની નકલ કરો અને તેને $\overline{AB}$ પર મૂકો. તમે જોશો $\overline{CD}$, $\overline{AB}$ને આવરી લે છે અને C એ A પર અને D એ B પર આવે છે. આથી આ રેખાખંડો એકરૂપ છે. આપણે $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ લખીશું.

આ જ પ્રવૃત્તિ આકૃતિ7.4(ii)માં આપેલ જોડી માટે કરો. શું જોવા મળે છે ? તેઓ એકરૂપ નથી. તમને કેવી રીતે ખબર પડી ? જ્યારે એકને બીજા પર મૂકવામાં આવે ત્યારે પૂરેપૂરા આવરિત થતાં નથી.

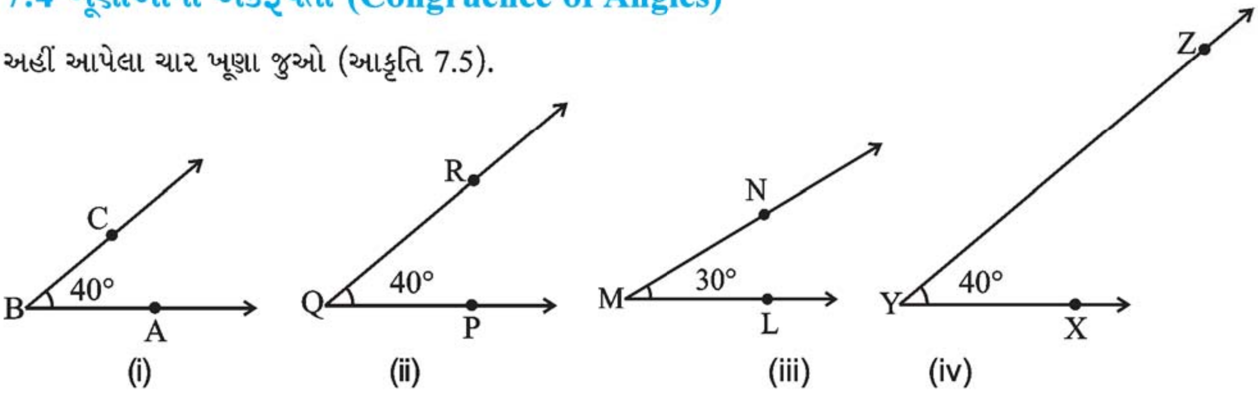
અત્યાર સુધીમાં તમે નોંધ્યું હશે કે આકૃતિ7.4(i)માંના રેખાખંડો બરાબર બંધબેસતા આવે છે કારણ તેમની લંબાઈ સમાન છે. જ્યારે આકૃતિ 7.4(ii) માટે આવું નથી.

જો બે રેખાખંડને સમાન (એટલે કે સરખી) લંબાઈ હોય તો તેઓ એકરૂપ છે. વળી, જો બે રેખાખંડ એકરૂપ હોય તો તેમની લંબાઈ સમાન છે.

ઉપરની હકીકતના સંદર્ભમાં, જ્યારે બે રેખાખંડ એકરૂપ હોય તો ક્યારેક એટલું જ કહીએ છીએ કે રેખાખંડો સમાન છે અને AB = CD એવું જ લખીએ છીએ. (જોકે આપણો કહેવાનો ભાવાર્થ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ છે.)

7.4 ખૂણાઓની એકરૂપતા (Congruence of Angles)

અહીં આપેલા ચાર ખૂણા જુઓ (આકૃતિ 7.5).



આકૃતિ 7.5

$\angle$PQRની નકલ પારદર્શક કાગળ પર કરો. તેને $\angle$ABC ઉપર મૂકો. એ માટે પહેલાં Qને B પર મૂકો અને $\overrightarrow{QP}$ને $\overrightarrow{BA}$ પર મૂકો. $\overrightarrow{QR}$ ક્યાં આવે છે ? જુઓ કે એ $\overrightarrow{BC}$ પર આવે છે.

આમ, $\angle$PQR, $\angle$ABC સાથે બરાબર બંધબેસતો આવે છે. એટલે કે $\angle$ABC અને $\angle$PQR એકરૂપ છે.

(નોંધો કે આ બંને એકરૂપ ખૂણાનાં માપ સરખાં છે.)

આપણે $\angle ABC \cong \angle PQR$ લખીશું. (i)

અથવા $m\angle ABC = m\angle PQR$ (અહીં માપ 40° છે.)

હવે તમે $\angle$LMNની પારદર્શક કાગળ પર નકલ કરો. તેને $\angle$ABCની ઉપર મૂકવાનો પ્રયત્ન કરો. Mને B પર અને $\overrightarrow{ML}$ ને $\overrightarrow{BA}$ પર ગોઠવો. $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{BC}$ પર આવે છે ? ના, અહીં એવું થતું નથી. તમને જોવા મળશે કે $\angle$ABC અને $\angle$LMN એકબીજાને પૂરેપૂરા આવરી લેતાં નથી. આથી તેઓ એકરૂપ નથી.

(નોંધો કે અહીં $\angle$ABC અને $\angle$LMN નાં માપ સરખાં નથી.)

$\angle$XYZ અને $\angle$ABC વિશે શું થશે ? આકૃતિ 7.5(iv)માંના કિરણ $\overrightarrow{YX}$ અને $\overrightarrow{YZ}$ અનુક્રમે $\overrightarrow{BA}$ અને $\overrightarrow{BC}$ કરતાં વધુ લાંબાં જણાય છે. આથી તમે કદાચ એવું વિચારો કે $\angle$ABC, $\angle$XYZ કરતાં નાનો છે. પરંતુ યાદ રાખો કે આકૃતિમાંનાં કિરણ માત્ર દિશા દર્શાવે છે, લંબાઈ નથી દર્શાવતાં. એકને બીજા પર ગોઠવતાં જણાશે કે આ બંને ખૂણા પણ એકરૂપ છે.

આપણે $\angle ABC \cong \angle XYZ$ લખીશું. (ii)

અથવા $m\angle ABC = m\angle XYZ$

(i) અને (ii) પરથી આપણે

$$\angle ABC \cong \angle PQR \cong \angle XYZ$$ પણ લખી શકીએ.

જો બે ખૂણાનાં માપ સમાન હોય તો તેઓ એકરૂપ છે. વળી, જો બે ખૂણા એકરૂપ હોય તો તેમનાં માપ સમાન હોય.

રેખાખંડની જેમ જ, ખૂણાની એકરૂપતા સંપૂર્ણપણે તેમનાં માપની સમાનતા પર જ આધારિત છે. આથી બે ખૂણા એકરૂપ છે એવું કહેવા માટે આપણે ક્યારેક એટલું જ કહીએ કે ખૂણાઓ સરખા છે અને

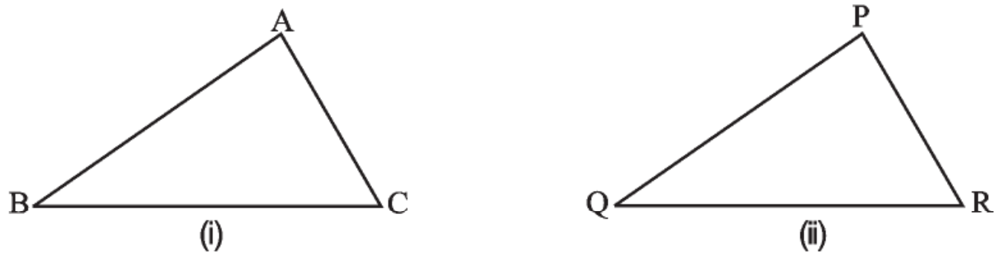
$\angle ABC = \angle PQR$ એમ લખીએ (જેનો અર્થ $\angle ABC \cong \angle PQR$ છે).

7.5 ત્રિકોણની એકરૂપતા (Congruence of Triangles)

આપણે જોયું કે બે રેખાખંડ એકરૂપ હોય તો તેમાંનો એક એ બીજાની નકલ જ હોય. તે જ રીતે એક ખૂણો બીજા ખૂણાની નકલ જ હોય તો તેઓ એકરૂપ છે. હવે આ જ ખ્યાલને ત્રિકોણ સુધી લઈ જઈએ.

BSTZGY

જો બે ત્રિકોણ એકબીજાની નકલ હોય અને જ્યારે એક પર બીજો મૂકવામાં આવે ત્યારે પરસ્પર પૂરેપૂરા આવરી લે તો તેઓ એકરૂપ છે.



આકૃતિ 7.6

ΔABC અને ΔPQRનાં માપ અને આકાર સમાન છે. તે એકરૂપ છે.

આને આપણે આ રીતે લખીશું. $\mathbf{\Delta ABC \cong \Delta PQR}$

આનો અર્થ એ થયો કે જ્યારે તમે ΔPQRને ΔABC પર મૂકશો ત્યારે P એ A પર Q એ B પર અને R એ C પર આવશે. એટલું જ નહિ પણ $\overline{PQ}$ એ $\overline{AB}$ પર $\overline{QR}$ એ $\overline{BC}$ પર અને $\overline{PR}$ એ $\overline{AC}$ પર આવશે. જો આપેલી સંગતતા માટે, બે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય તો તેના સંગત ભાગો (એટલે કે ખૂણા અને બાજુઓ) જે એકબીજા સાથે મળતા આવે છે તે સમાન છે. આમ, આ બે એકરૂપ ત્રિકોણમાં,

સંગત શિરોબિંદુઓ : A અને P, B અને Q, C અને R

સંગત બાજુઓ : $\overline{AB}$ અને $\overline{PQ}$, $\overline{BC}$ અને $\overline{QR}$, $\overline{AC}$ અને $\overline{PR}$

સંગત ખૂણાઓ : $\angle A$ અને $\angle P$, $\angle B$ અને $\angle Q$, $\angle C$ અને $\angle R$ છે.

જો તમે ΔPQRને ΔABC પર એવી રીતે ગોઠવો કે જેથી P એ B પર આવે તો બીજાં શિરોબિંદુઓ યોગ્ય રીતે સંગત થશે ? એમ થવું જરૂરી નથી ! ત્રિકોણની નકલ કરો અને પ્રયત્ન કરીને શોધો.

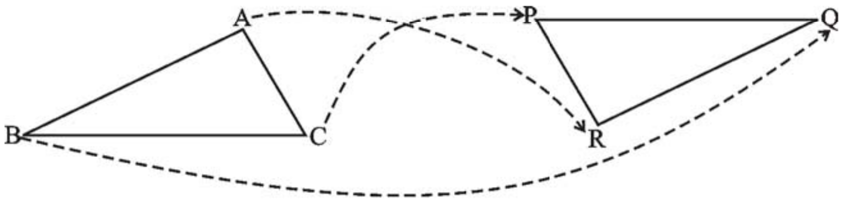
આના પરથી ફલિત થાય છે કે ત્રિકોણની એકરૂપતાની વાત કરતી વખતે માત્ર ખૂણાનાં માપ અને બાજુની લંબાઈ જ (ધ્યાનમાં લેવાની) અગત્યની નથી પરંતુ શિરોબિંદુની સંગતતા પણ જોવાની છે.

ઉપરના ઉદાહરણમાં $A \leftrightarrow P$ વંચાય: A સંગત P, $B \leftrightarrow Q$, $C \leftrightarrow R$ સંગતતા છે જેને આપણે $ABC \leftrightarrow PQR$ પણ લખી શકીએ.

ઉદાહરણ 1 ΔABC અને ΔPQR ની સંગતતા $ABC \leftrightarrow RQP$ માટે એકરૂપ છે.

(i) $\overline{PQ}$ (ii) $\angle Q$ (iii) $\overline{RP}$ ને સંગત ΔABC ના ભાગ લખો.

ઉકેલ સંગતતાની સારી સમજ માટે આપણે આકૃતિ (આકૃતિ 7.7)નો ઉપયોગ કરીએ.



આકૃતિ 7.7

સંગતતા $ABC \leftrightarrow RQP$ છે. એનો અર્થ એ કે,

$A \leftrightarrow R$; $B \leftrightarrow Q$ અને $C \leftrightarrow P$ છે.

આથી, (i) $\overline{PQ} \leftrightarrow \overline{CB}$ (ii) $\angle Q \leftrightarrow \angle B$ (iii) $\overline{RP} \leftrightarrow \overline{AC}$

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

1. જો બે ત્રિકોણ ABC અને PQR આપેલા હોય તો છ સંગતતાઓની શક્યતાઓ છે. તેમાંની બે (i) $ABC \leftrightarrow PQR$ અને (ii) $ABC \leftrightarrow QRP$ છે.

કાપેલા ત્રિકોણનો ઉપયોગ કરીને બાકીની ચાર સંગતતા મેળવો. શું આ બધી સંગતતા માટે એકરૂપતા મળશે ? વિચારો.

સ્વાધ્યાય 7.1

1. નીચેનાં વિધાનો પૂરાં કરો :

(a) બે રેખાખંડ એકરૂપ ત્યારે થાય જો ______ .

(b) બે એકરૂપ ખૂણાઓ પૈકી એક ખૂણાનું માપ 70° છે તો બીજા ખૂણાનું માપ ______ થાય.

(c) જ્યારે આપણે $\angle A = \angle B$ એમ લખીએ ત્યારે સાચો અર્થ ______ થાય.

2. એકરૂપ આકારનાં બે ઉદાહરણ રોજિંદા જીવનમાંથી આપો.

3. જો સંગતતા $ABC \leftrightarrow FED$ માટે $\Delta ABC \cong \Delta FED$ છે તો બંને ત્રિકોણના બધા અનુરૂપ એકરૂપ ભાગ લખો.

4. જો $\Delta DEF \cong \Delta BCA$ હોય તો ΔDEF નાં નીચેનાં અંગોને અનુરૂપ ΔBCAના ભાગ લખો :

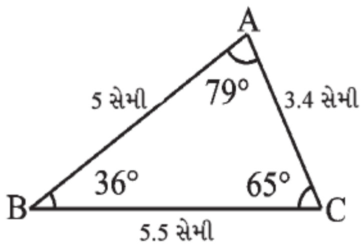
(i) $\angle E$ (ii) $\overline{EF}$ (iii) $\angle F$ (iv) $\overline{DF}$

7.6 ત્રિકોણની એકરૂપતા માટેની શરતો

C588XI

આપણે રોજિંદા જીવનમાં વારંવાર ત્રિકોણાકાર વસ્તુઓ અને પેટર્નનો ઉપયોગ કરીએ છીએ. આથી બે ત્રિકોણાકાર ક્યારે એકરૂપ થાય એ શોધવું લાભદાયી થશે. જો તમારી નોટમાં બે ત્રિકોણ દોરેલા હોય અને તે એકરૂપ છે કે નથી તે ચકાસવું હોય તો દરેક વખતે એક ત્રિકોણને કાપીને બીજા ઉપર ગોઠવવાની રીત ન કરી શકાય. તેને બદલે જો આપણે યોગ્ય માપના ઉપયોગથી એકરૂપતાનો નિર્ણય કરી શકીએ તો તે વધુ ઉપયોગી થશે. આપણે એવું કરવાનો પ્રયત્ન કરીએ.

એક રમત



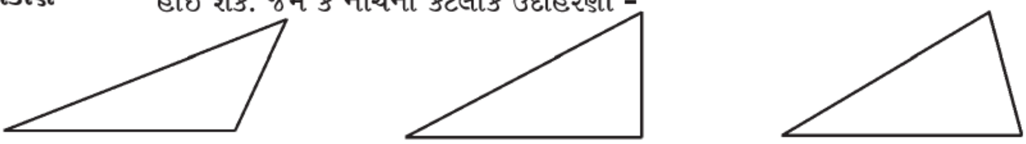
આકૃતિ 7.8
અપ્પુએ દોરેલ ત્રિકોણ

અપ્પુ અને ટપુ એક રમત રમે છે. અપ્પુએ એક ΔABC દોર્યો છે (આકૃતિ 7.8) અને તેની દરેક બાજુની લંબાઈ અને દરેક ખૂણાનાં માપ નોંધ્યાં છે. ટપુએ આ લખાણ જોયું નથી. અપ્પુ ટપુને પડકાર આપે છે કે એ ટપુને કેટલીક માહિતી આપે તેના પરથી તેણે ΔABCની નકલ બનાવવી. અપ્પુએ આપેલ માહિતીનો ઉપયોગ કરીને ટપુ ΔABCને એકરૂપ ત્રિકોણ બનાવવાનો પ્રયત્ન કરે છે. રમત શરૂ થાય છે. તેમના વચ્ચે થતી વાતચીત અને રમતને ધ્યાનપૂર્વક સમજવાનો પ્રયત્ન કરો.

બાબાબા (SSS) રમત

અપ્પુ : ΔABCની એક બાજુ 5.5 સેમીની છે.

ટપુ : આ માહિતી પરથી હું ઘણા બધા ત્રિકોણ દોરી શકું (આકૃતિ 7.9). પરંતુ તે બધા ΔABCની નકલ થવા જરૂરી નથી. મેં દોરેલો ત્રિકોણ ગુરૂકોણ, કાટકોણ કે લઘુકોણ હોઈ શકે. જેમ કે નીચેનાં કેટલાંક ઉદાહરણો -



5.5 સેમી (ગુરુકોણ ત્રિકોણ) | 5.5 સેમી (કાટકોણ ત્રિકોણ) | 5.5 સેમી (લઘુકોણ ત્રિકોણ)

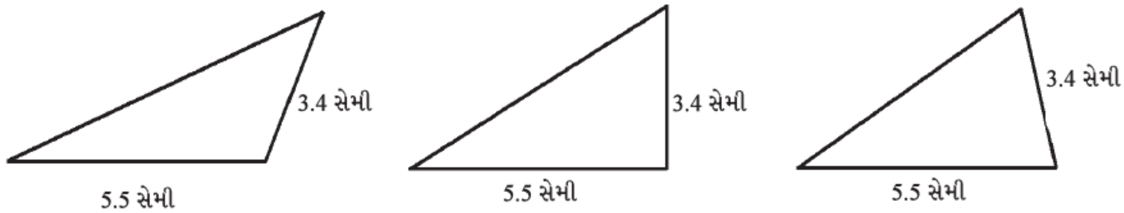
આકૃતિ 7.9

મેં બીજી બાજુનાં માપ યાદચ્છિક (ગમે તે) રાખ્યાં છે. આથી મને જેના પાયાનું માપ 5.5 સેમી હોય તેવા ઘણા ત્રિકોણ મળે છે.

આથી, ΔABCની નકલ કરવા માટે (અથવા એકરૂપ ત્રિકોણ રચવા માટે) એક બાજુનું માપ પૂરતું નથી.

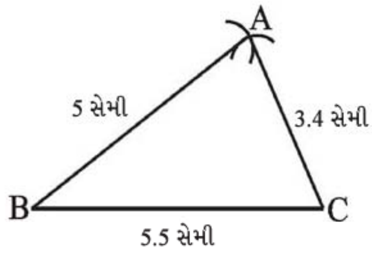
અપ્પુ : ભલે હું તને વધુ એક બાજુની લંબાઈ આપું છું. ΔABCની બે બાજુની લંબાઈ 5.5 સેમી અને 3.4 સેમી લો.

ટપુ : આટલું પણ પૂરતું થશે નહિ. આપેલી માહિતી પરથી હું ઘણા ત્રિકોણ દોરી શકું જે ΔABCની નકલ નહિ થાય જેમ કે - (આકૃતિ 7.10) અહીં મારી દલીલના સમર્થન માટે કેટલીક વિગત છે.



આકૃતિ 7.10

જો માત્ર બે બાજુની લંબાઈ આપી હોય તો કોઈ તારા ત્રિકોણ જેવો જ ત્રિકોણ ન દોરી શકે.



આકૃતિ 7.11

અપ્પુ : ભલે. હું ત્રણે બાજુની લંબાઈ આપું છું. ΔABCમાં AB = 5 સેમી, BC = 5.5 સેમી અને AC = 3.4 સેમી છે.

ટપુ : મને લાગે છે કે હવે શક્ય બનશે. હું પ્રયત્ન કરું પ્રથમ તો હું કાચી આકૃતિ દોરું જેથી મને લંબાઈ સહેલાઈથી યાદ રહે.

હું 5.5 સેમી લંબાઈની $\overline{BC}$ દોરું. Bને કેન્દ્ર લઈને હું 5 સેમી ત્રિજ્યાની ચાપ દોરું. બિંદુ A આ ચાપ પર ક્યાંક હશે. હવે Cને કેન્દ્ર લઈને 3.4 સેમી ત્રિજ્યા લઈ ચાપ દોરું. બિંદુ A આ ચાપ પર પણ ક્યાંક હશે.

આથી, બિંદુ A અહીં દોરેલી બંને ચાપ પર આવેલું છે. એનો અર્થ એ થયો કે A બિંદુ બંને ચાપનું છેદબિંદુ છે.

હવે મને બિંદુઓ A, B અને C નાં સ્થાન ખબર છે. ઓહો ! તેમને જોડીને હું ત્રિકોણ ABC મેળવી શકું છું (આકૃતિ 7.11).

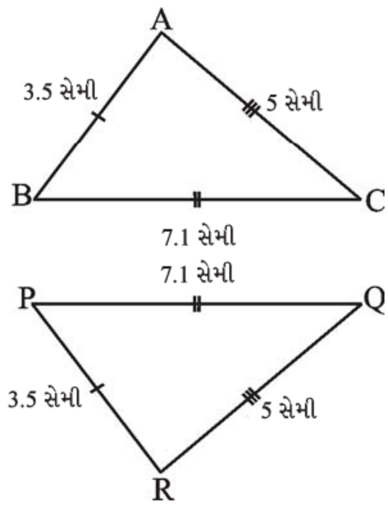
અપ્પુ : અદ્‌ભુત ! આમ, આપેલા ΔABC ની નકલ દોરવા માટે (એટલે કે ΔABCને એકરૂપ ત્રિકોણ દોરવા માટે) આપણને ત્રણ બાજુની લંબાઈની જરૂર પડે છે. આપણે આ શરતને બાજુ-બાજુ-બાજુ શરત કહી શકીએ ?

ટપુ : શા માટે એને ટૂંકમાં **બાબાબા** શરત ન કહીએ ?

એકરૂપતાની બાબાબા શરત :

જો આપેલી સંગતતા માટે, એક ત્રિકોણની ત્રણ બાજુ બીજા ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુ સાથે સરખી હોય તો તે ત્રિકોણો એકરૂપ છે.

ઉદાહરણ 2 ΔABC અને ΔPQR માટે AB = 3.5 સેમી, BC = 7.1 સેમી, AC = 5 સેમી, PQ = 7.1 સેમી, QR = 5 સેમી અને PR = 3.5 સેમી છે. આ બંને ત્રિકોણ એકરૂપ છે કે કેમ તે નક્કી કરો. જો હોય તો એકરૂપતાનો સંબંધ સંકેતમાં લખો.



આકૃતિ 7.12

ઉકેલ અહીં, AB = PR (= 3.5 સેમી),

BC = PQ (= 7.1 સેમી),

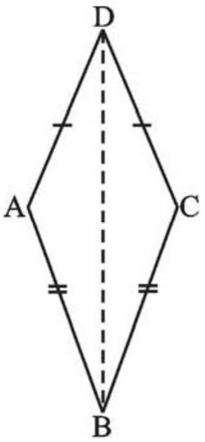
અને AC = QR (= 5 સેમી) છે.

આ બતાવે છે કે એક ત્રિકોણની ત્રણ બાજુ બીજા ત્રિકોણની ત્રણ બાજુ સાથે સમાન છે. આથી એકરૂપતાની **બાબાબા** શરત પ્રમાણે બંને ત્રિકોણ એકરૂપ છે.

ઉપરના ત્રણ સમાનતાના સંબંધો પરથી, એ સહેલાઈથી જોઈ શકાય છે કે $A \leftrightarrow R$, $B \leftrightarrow P$અને $C \leftrightarrow Q$.

આથી, $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$

અગત્યની નોંધ : એકરૂપ ત્રિકોણના નામમાં અક્ષરનો ક્રમ સંગતતાનો સંબંધ દર્શાવે છે. આથી જ્યારે તમે $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$ લખો ત્યારે તમે જાણી શકો કે A એ R ને સંગત છે. B એ P ને અને C એ Q ને તથા $\overline{AB}$ એ $\overline{RP}$ ને; $\overline{BC}$ એ $\overline{PQ}$ ને અને $\overline{AC}$ એ $\overline{RQ}$ ને સંગત છે.



આકૃતિ 7.13

ઉદાહરણ 3 આકૃતિ 7.13માં, AD = CD અને AB = CB છે.

(i) ΔABD અને ΔCBDમાં સમાન અંગની ત્રણ જોડ લખો.

(ii) ΔABD $\cong$ ΔCBD છે ? શા માટે અથવા શા માટે નહીં ?

(ii) $\angle$ABCને $\overline{\text{BD}}$ દુભાગે છે ? કારણ આપો.

ઉકેલ

(i) ΔABD અને ΔCBDમાં સમાન અંગોની ત્રણ જોડ નીચે પ્રમાણે છે :

AB = CB (પક્ષ)

AD = CD (પક્ષ)

અને BD = BD (બંનેમાં સામાન્ય)

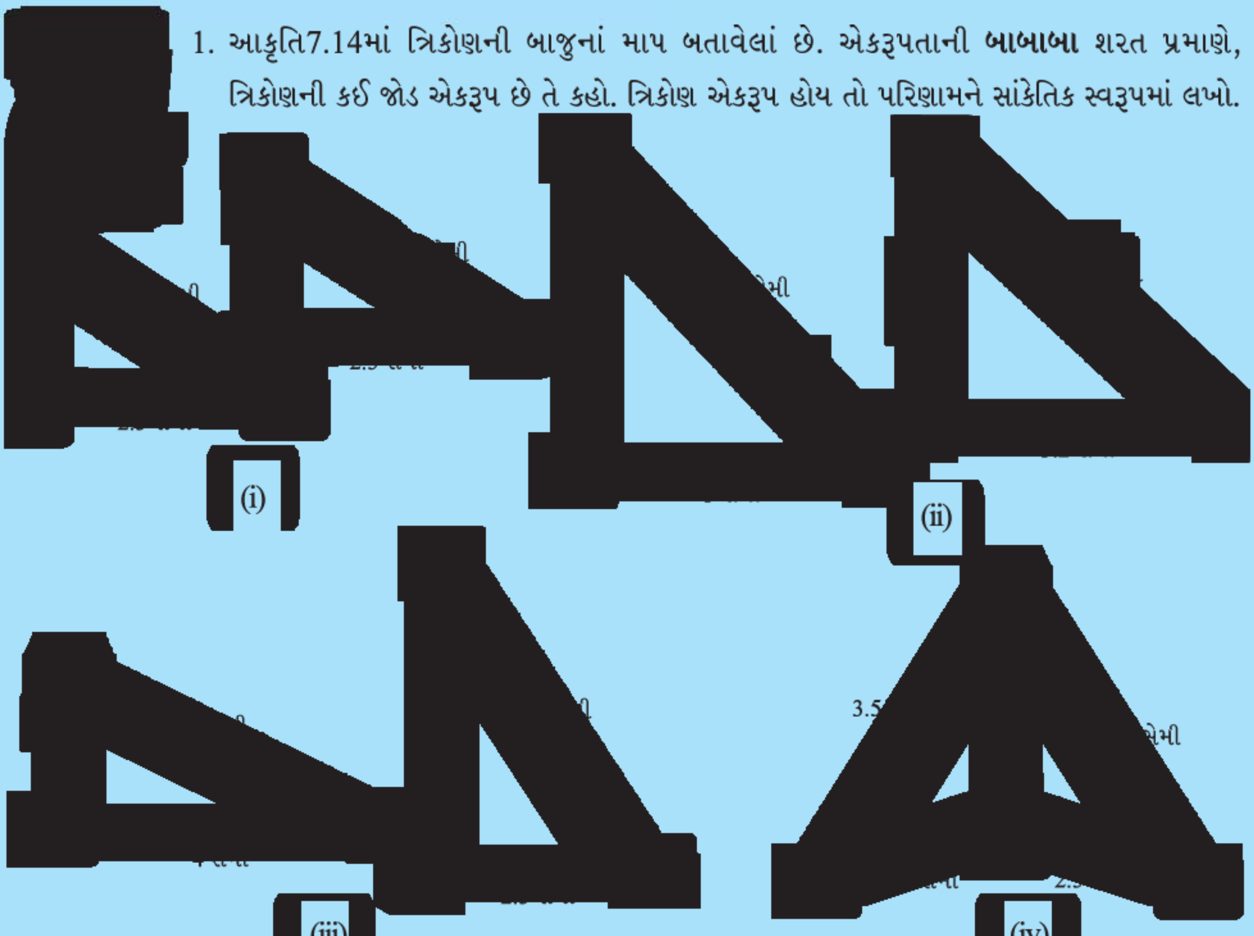
(ii) ઉપરના (i) પરથી ΔABD $\cong$ ΔCBD (બાબાબા શરત પ્રમાણે)

(iii) $\angle$ABD = $\angle$CBD (એકરૂપ ત્રિકોણનાં સંગત અંગ)

આથી, BD $\angle$ABCને દુભાગે છે.

જાતે કરો

1. આકૃતિ7.14માં ત્રિકોણની બાજુનાં માપ બતાવેલાં છે. એકરૂપતાની **બાબાબા** શરત પ્રમાણે, ત્રિકોણની કઈ જોડ એકરૂપ છે તે કહો. ત્રિકોણ એકરૂપ હોય તો પરિણામને સાંકેતિક સ્વરૂપમાં લખો.



આકૃતિ 7.14

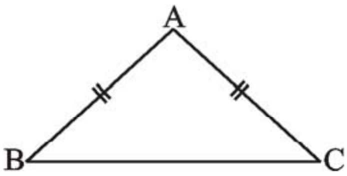
2. આકૃતિ 7.15માં AB=AC અને D એ $\overline{BC}$ નું મધ્યબિં[redacted]
   (i) ΔADB અને ΔADCમાં સમાન અંગની[redacted] જોડી જણાવો.
   (ii) $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ છે ? કારણ આપો.
   (iii) $\angle B = \angle C$ છે ? શા માટે ?
3. આકૃતિ 7.16માં AC=BD અને AD=BC છે. નીચેનામાંથી કયું વિધાન અર્થપૂર્ણ છે ?
   (i) $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ (ii) $\Delta ABC \cong \Delta BAD$

આકૃતિ 7.15

આકૃતિ 7.16

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

1. ABC એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે જેમાં AB=AC (આકૃતિ 7.17).
   ΔABCની પારદર્શક કાગળ પર નકલ કરો અને તેને પણ ΔABC નામ આપો.
   (i) ΔABC અને ΔACBનાં સમાન ભાગની ત્રણ જોડીનાં નામ આપો.
   (ii) $\Delta ABC \cong \Delta ACB$ છે ? શા માટે અથવા શા માટે નહિ ?
   (iii) $\angle B = \angle C$ છે ? શા માટે અથવા શા માટે નહિ ?



આકૃતિ 7.17

અપ્પુ અને ટપુ હવે ફરીથી થોડા ફેરફાર સાથે રમત રમવાનું શરૂ કરે છે.

બાખૂબા (SAS) રમત

અપ્પુ : હવે હું ત્રિકોણની નકલ કરવાની રમતના નિયમો બદલું છું.

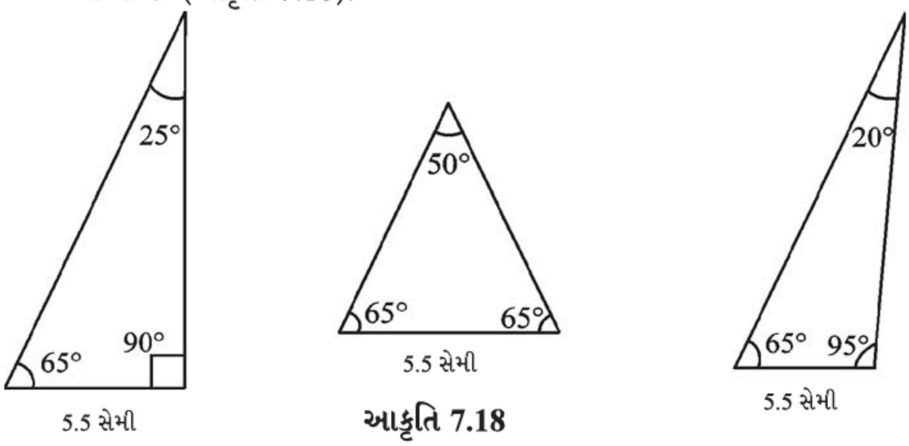
ટપુ : સારું, આગળ વધ

અપ્પુ : તને એ તો ખબર જ છે કે માત્ર એક જ બાજુની લંબાઈ આપવી ઉપયોગી નથી.

ટપુ : ચોક્કસ, હા.

અપ્પુ : તો હવે હું એમ કહીશ કે ΔABCમાં એક બાજુ 5.5 સેમી લંબાઈની અને એક ખૂણો 65° માપનો છે.

ટપુ : ફરીથી મારે કરવાનાં કામ માટે આ પણ પૂરતું નથી. તારી આપેલી માહિતી પ્રમાણે હું ઘણા ત્રિકોણ મેળવી શકું પરંતુ તે ΔABCની નકલ નથી. દાખલા તરીકે તેમાંના કેટલાક મેં નીચે આપ્યા છે (આકૃતિ 7.18).



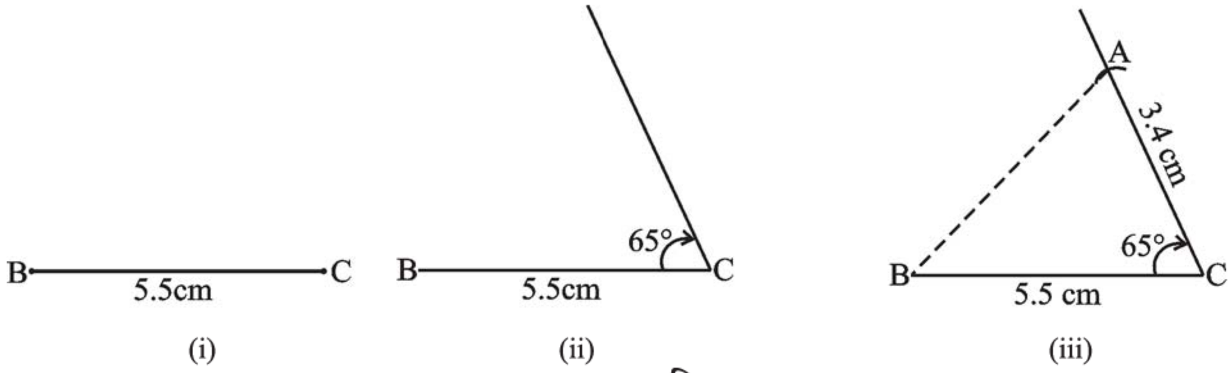
આકૃતિ 7.18

અપ્પુ : તો આપણે શું કરીશું ?

ટપુ : વધુ માહિતીની જરૂર છે.

અપ્પુ : તો હવે મને મારું આગળનું વિધાન સુધારવા દે. ΔABCમાં બે બાજુની લંબાઈ 5.5 સેમી અને 3.4 સેમી છે અને આ બે બાજુ વચ્ચેનો ખૂણો 65° નો છે.

ટપુ : આનાથી મને મદદ મળશે. પ્રયત્ન કરી જોઉં. હું પહેલાં $\overline{BC}$ દોરું છું જેની લંબાઈ 5.5 સેમી છે [આકૃતિ 7.19 (i)]. હવે હું C આગળ 65°નો ખૂણો બનાવું [આકૃતિ 7.19 (ii)].



આકૃતિ 7.19

હા, રસ્તો મળ્યો. Aનું સ્થાન C આગળ ખૂણો બનાવતી રેખા પર C થી 3.4 સેમી દૂર છે. હું C ને કેન્દ્ર લઈ 3.4 સેમી ત્રિજ્યાવાળો ચાપ દોરીશ. તે 65° ખૂણો બનાવતી રેખાને Aમાં કાપશે.

હવે, AB જોડીને ΔABC મેળવીશ. (આકૃતિ 7.19 (iii)).

અપ્પુ : તેં બાજુ-ખૂણો-બાજુનો ઉપયોગ કર્યો; જ્યાં ખૂણો બે બાજુની વચ્ચે સમાયેલો છે.

ટપુ : હા, આપણે આ શરતને શું નામ આપીશું ?

અપ્પુ : એ **બાખૂબા** શરત છે. તને સમજાય છે ને ?

ટપુ : હા, ચોક્કસ.

એકરૂપતાની બાખૂબા શરત

જો આપેલ સંગતતા માટે, એક ત્રિકોણની બે બાજુ અને તેમની વચ્ચેનો ખૂણો બીજા ત્રિકોણની બે અનુરૂપ બાજુ અને વચ્ચેના ખૂણા સાથે સમાન હોય તો તે બે ત્રિકોણો એકરૂપ છે.

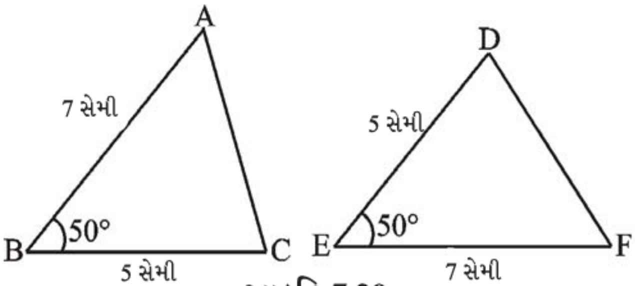
ઉદાહરણ 4 નીચે બે ત્રિકોણના કેટલાક ભાગનાં માપ આપેલાં છે. **બાખૂબા** એકરૂપતાનો ઉપયોગ કરીને બે ત્રિકોણ એકરૂપ છે કે નથી તે નક્કી કરો. જો ત્રિકોણ એકરૂપ હોય તો તેને સાંકેતિક રીતે લખો.

	ΔABC	ΔDEF
(a)	AB = 7 સેમી, BC = 5 સેમી, $\angle B = 50°$	DE = 5 સેમી, EF = 7 સેમી, $\angle E = 50°$
(b)	AB = 4.5 સેમી, AC = 4 સેમી, $\angle A = 60°$	DE = 4 સેમી, FD = 4.5 સેમી, $\angle D = 55°$
(c)	BC = 6 સેમી, AC = 4 સેમી, $\angle B = 35°$	DF = 4 સેમી, EF = 6 સેમી, $\angle E = 35°$

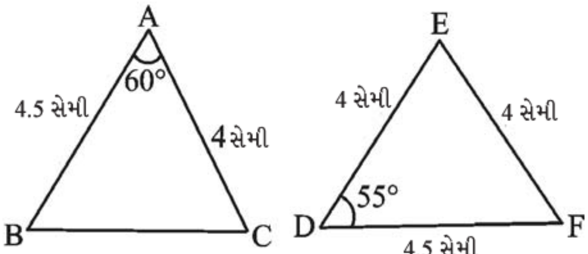
(કાચી આકૃતિ દોરી તેમાં માપ લખીને પ્રશ્નનો વિચાર કરવાથી પ્રશ્ન ઉકેલવામાં મદદ મળશે.)

ઉકેલ

(a) અહીં, AB = EF (= 7 સેમી), BC = DE (= 5 સેમી) અને
વચ્ચેનો ખૂણો ∠B = વચ્ચેનો ખૂણો ∠E (= 50°) છે. વળી A ↔ F, B ↔ E અને C ↔ D છે.
આથી, ΔABC ≅ Δ FED (**બાખૂબા** શરત મુજબ) (આકૃતિ 7.20).



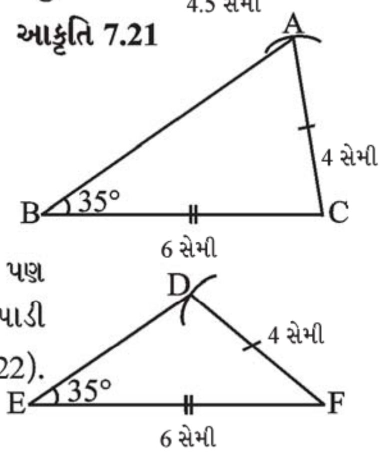
આકૃતિ 7.20



આકૃતિ 7.21

(b) અહીં, AB = FD અને AC = DE (આકૃતિ 7.21).
પરંતુ બાજુઓ વચ્ચેનો ખૂણો ∠A ≠ બાજુઓ વચ્ચેનો ખૂણો ∠D. આથી,
ત્રિકોણો એકરૂપ છે એમ ન કહી શકાય.

(c) અહીં, BC = EF, AC = DF અને ∠B = ∠E
પરંતુ ∠B એ બાજુ $\overline{AC}$ અને $\overline{BC}$ની વચ્ચેનો ખૂણો નથી. તે જ રીતે, ∠E પણ બાજુ $\overline{EF}$ અને $\overline{DF}$ વચ્ચેનો ખૂણો નથી. આથી **બાખૂબા** શરત લાગુ પાડી શકાય નહીં અને આપણે કહી ન શકીએ કે બંને ત્રિકોણ એકરૂપ છે (આકૃતિ 7.22).



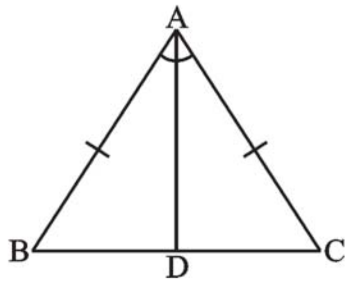
આકૃતિ 7.22

ઉદાહરણ 5 આકૃતિ 7.23માં AB = AC અને ∠BACનો દ્વિભાજક $\overline{AD}$ છે.

(i) ΔADB અને ΔADCમાં સમાન ભાગની ત્રણ જોડી લખો.

(ii) ΔADB ≅ ΔADC છે ? કારણ આપો.

(iii) ∠B = ∠C છે ? કારણ આપો.



આકૃતિ 7.23

ઉકેલ

(i) સમાન ભાગની ત્રણ જોડી નીચે પ્રમાણે છે :

AB = AC (આપેલ છે.)

∠BAD = ∠CAD ($\overline{AD}$ એ ∠BACને દુભાગે છે.)

અને AD = AD (સામાન્ય)

(ii) હા, ΔADB ≅ ΔADC (એકરૂપતાની બાખૂબા શરત પ્રમાણે)

(iii) ∠B = ∠C (એકરૂપ ત્રિકોણનાં અનુરૂપ અંગ)

પ્રયત્ન કરો

1. ΔDEF માં બાજુઓ $\overline{DE}$ અને $\overline{EF}$ વચ્ચે કયો ખૂણો આવેલો છે ?

2. એકરૂપતાની **બાખૂબા** શરત લગાવીને તમારે સાબિત કરવું છે કે ΔPQR ≅ ΔFED. તમને PQ = FE અને RP = DF આપેલ છે. એકરૂપતા સાબિત કરવા માટે વધુ કઈ માહિતીની જરૂર છે ?

3. આકૃતિ 7.24 માં ત્રિકોણના કેટલાક ભાગોનાં માપ દર્શાવેલાં છે. દરેકમાં ત્રિકોણની જોડી, એકરૂપતાની **બાખૂબા** શરત પ્રમાણે એકરૂપ છે કે નહિ તે નક્કી કરો. જો ત્રિકોણ એકરૂપ હોય તો તેને સાંકેતિક સ્વરૂપમાં લખો.

આકૃતિ 7.24

4. આકૃતિ 7.25માં $\overline{AB}$ અને $\overline{CD}$ પરસ્પર Oમાં દુભાગે છે.

   (i) ΔAOC અને ΔBODમાંનાં સમાન અંગોની ત્રણ જોડી લખો.

   (ii) નીચેનામાંથી કયું વિધાન સાચું છે ?

      (a) $\Delta AOC \cong \Delta DOB$

      (b) $\Delta AOC \cong \Delta BOD$

આકૃતિ 7.25

ખૂબાખૂ (ASA) રમત

જો તમે નીચેનામાંથી કોઈ પણ એક જ વિગત જાણતા હોય તો અપ્પુનો ત્રિકોણ દોરી શકો ?

(i) માત્ર એક જ ખૂણો (ii) માત્ર બે જ ખૂણા

(iii) બે ખૂણા અને કોઈ પણ એક બાજુ

(iv) બે ખૂણા અને તેમની વચ્ચે આવેલી બાજુ

ઉપરના પ્રશ્નોના જવાબ આપવાના પ્રયત્નો આપણને નીચેની શરત તરફ દોરી જાય છે :

એકરૂપતાની ખૂબાખૂ શરત

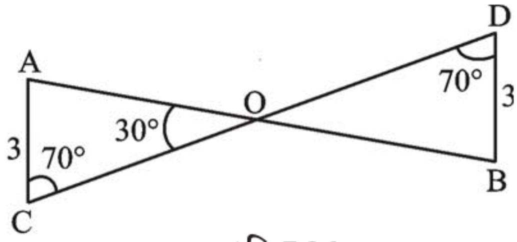
કોઈ સંગતતા માટે એક ત્રિકોણના બે ખૂણા અને તેમની વચ્ચેની બાજુ બીજા ત્રિકોણના અનુરૂપ બે ખૂણા અને તેમની વચ્ચેની બાજુ સાથે સરખાં હોય તો તે ત્રિકોણો એકરૂપ છે.

ઉદાહરણ 6 એકરૂપતાની **ખૂબાખૂ** શરતનો ઉપયોગ કરીને $\Delta ABC \cong \Delta QRP$ સાબિત કરવું છે અને $BC = RP$ આપેલ છે. એકરૂપતા સાબિત કરવા માટે વધુ કઈ માહિતી જોઈશે ?

ઉકેલ **ખૂબાખૂ** શરતમાં આપણને એ બે ખૂણાની માહિતી જોઈએ જેમની વચ્ચે બાજુ BC અને RP આવેલ છે. આમ, જરૂરી વધુ માહિતી નીચે મુજબ છે :

$\angle B = \angle R$ અને $\angle C = \angle P$

ઉદાહરણ 7 આકૃતિ 7.26માં શું તમે એકરૂપતાની **ખૂબાખૂ** શરતનો ઉપયોગ કરીને તારવી શકો કે $\Delta AOC \cong \Delta BOD$?



આકૃતિ 7.26

ઉકેલ બે ત્રિકોણ AOC અને BODમાં, $\angle C = \angle D$ (દરેક 70°)

વળી, $\angle AOC = \angle BOD = 30°$ (અભિકોણ)

આથી, ΔAOCનો $\angle A = 180° - (70° + 30°) = 80°$

(ત્રિકોણના ખૂણાના સરવાળાના ગુણધર્મ પરથી)

તે જ રીતે ΔBOD નો $\angle B = 180° - (70° + 30°) = 80°$

આમ, હવે આપણને $\angle A = \angle B$, $AC = BD$ અને $\angle C = \angle D$ મળે છે.

આથી, એકરૂપતાની **ખૂબાખૂ** શરત પ્રમાણે $\Delta AOC \cong \Delta BOD$.

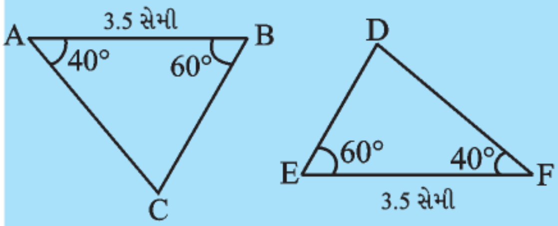
નોંધ :

ત્રિકોણના બે ખૂણા આપ્યા હોય તો તમે હંમેશાં ત્રીજો ખૂણો શોધી શકો. આથી, જ્યારે એક ત્રિકોણના બે ખૂણા અને એક બાજુ બીજા ત્રિકોણના અનુરૂપ બે ખૂણા અને એક બાજુ સાથે સમાન હોય ત્યારે તમે એને એકરૂપતાની "બે ખૂણા અને અંતર્ગત બાજુ" સ્વરૂપમાં ફેરવી શકો અને પછી એકરૂપતાની **ખૂબાખૂ** શરતનો ઉપયોગ કરી શકો.

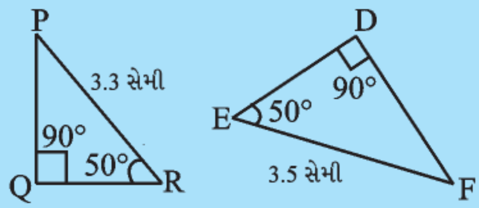
પ્રયત્ન કરો

1. ΔMNPમાં ખૂણા M અને Nની વચ્ચે કઈ બાજુ આવેલી છે ?
2. એકરૂપતાની **ખૂબાખૂ** શરતનો ઉપયોગ કરીને તમારે $\Delta DEF \cong \Delta MNP$ સાબિત કરવું છે. $\angle D = \angle M$ અને $\angle F = \angle P$ આપેલ છે. એકરૂપતા સાબિત કરવા માટે કઈ માહિતીની જરૂર છે ? (કાચી આકૃતિ દોરી પ્રયત્ન કરો !)

3. આકૃતિ 7.27માં કેટલાક ભાગનાં માપ બતાવેલાં છે. એકરૂપતાની **ખૂબાખૂ** શરતનો ઉપયોગ કરીને કઈ જોડના ત્રિકોણ એકરૂપ છે તે કહો. જો એકરૂપ હોય તો તેને સાંકેતિક સ્વરૂપમાં લખો.



(i)



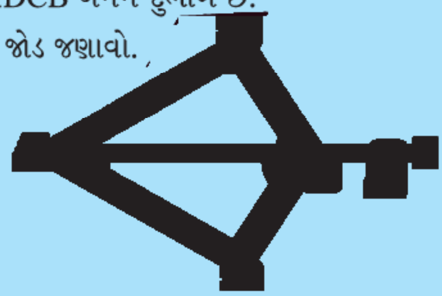
(ii)

આકૃતિ 7.27

4. નીચે બે ત્રિકોણના કેટલાક ભાગનાં માપ આપેલાં છે. એકરૂપતાની **ખૂબાખૂ** શરતના ઉપયોગથી ચકાસો કે ત્રિકોણ એકરૂપ છે કે નહિ. એકરૂપતા હોય તો તેને સાંકેતિક સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

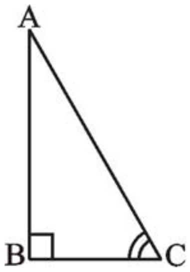
	ΔDEF	ΔPQR
(i)	$\angle D = 60°$, $\angle F = 80°$, DF = 5 સેમી	$\angle Q = 60°$, $\angle R = 80°$, QR = 5 સેમી
(ii)	$\angle D = 60°$, $\angle F = 80°$, DF = 6 સેમી	$\angle Q = 60°$, $\angle R = 80°$, QP = 6 સેમી
(iii)	$\angle E = 80°$, $\angle F = 30°$, EF = 5 સેમી	$\angle P = 80°$, PQ = 5 સેમી, $\angle R = 30°$

5. આકૃતિ 7.28માં કિરણ $\overrightarrow{AZ}$ એ $\angle DAB$ અને $\angle DCB$ બંનેને દુભાગે છે.
   (i) ΔBAC અને ΔDACમાં સમાન ભાગની ત્રણ જોડ જણાવો.
   (ii) $\Delta BAC \cong \Delta DAC$ છે ? કારણ આપો.
   (iii) AB = AD છે ? તમારો જવાબ ચકાસો.
   (iv) CD = CB છે ? કારણ આપો.



આકૃતિ 7.28

7.7 કાટકોણ ત્રિકોણમાં એકરૂપતા



આકૃતિ 7.29

બે કાટકોણ ત્રિકોણની એકરૂપતા ખાસ ધ્યાન માગે છે. સ્વાભાવિક રીતે જ આવા ત્રિકોણમાં કાટખૂણો તો સરખો હોય જ. આથી એકરૂપતાની શરતો સરળ બને છે.

ΔABCમાં $\angle B = 90°$ આપેલ હોય તો નીચેનામાંથી કઈ સ્થિતિમાં તમે ΔABC દોરી શકો ? (આકૃતિ 7.29)

(i) માત્ર BC આપેલ હોય. (ii) માત્ર $\angle C$ આપેલ હોય.
(iii) $\angle A$ અને $\angle C$ આપેલ હોય. (iv) AB અને BC આપેલ હોય.
(v) AC અને AB કે BCમાંથી એક આપેલ હોય.

કાચી આકૃતિ દોરી પ્રયત્ન કરો. તમને જણાશે કે (iv) અને (v)માં તમે ત્રિકોણ દોરી શકો છો. પણ (iv)માં **બાખૂબા** શરતનો જ ઉપયોગ છે. (v)માં કંઈક નવી વાત છે, જે તમને નીચેની શરત તરફ લઈ જશે.

એકરૂપતાની કાકબા (RHS) શરત

આપેલ સંગતતા માટે, એક કાટકોણ ત્રિકોણનો કર્ણ અને એક બાજુ બીજા કાટકોણ ત્રિકોણના અનુક્રમે કર્ણ અને બાજુ સાથે સમાન હોય તો તે ત્રિકોણો એકરૂપ છે.

વિચારો કે આને આપણે **કાકબા** શા માટે કહીએ છીએ ?

ઉદાહરણ 8 નીચે બે ત્રિકોણના કેટલાક ભાગનાં માપ આપ્યાં છે. એકરૂપતાની **"કાકબા"** શરતનો ઉપયોગ કરી ચકાસો કે ત્રિકોણ એકરૂપ છે કે નહીં. જો ત્રિકોણ એકરૂપ હોય તો પરિણામને સાંકેતિક સ્વરૂપમાં લખો.

	Δ**ABC**	Δ**PQR**
(i)	$\angle B = 90°$, AC = 8 સેમી, AB = 3 સેમી	$\angle P = 90°$, PR = 3 સેમી, QR = 8 સેમી
(ii)	$\angle A = 90°$, AC = 5 સેમી, BC = 9 સેમી	$\angle Q = 90°$, PR = 8 સેમી, PQ = 5 સેમી

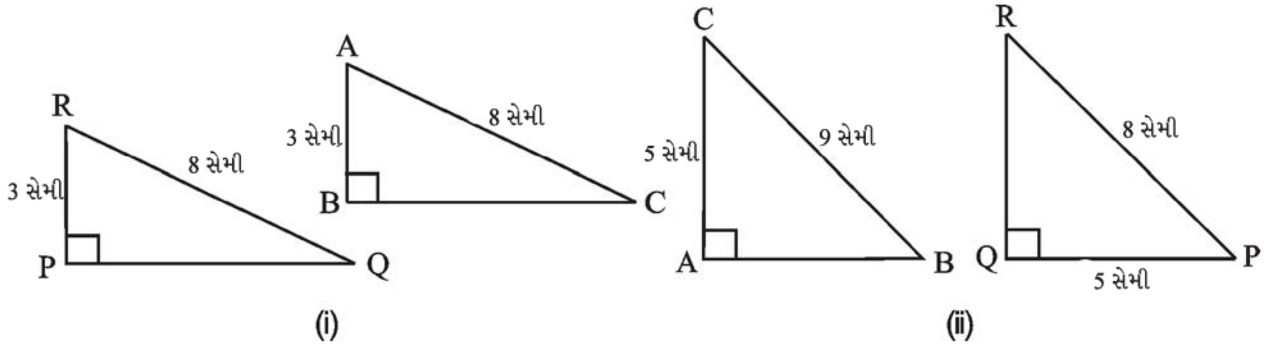
ઉકેલ

(i) અહીં $\angle B = \angle P = 90°$,

કર્ણ AC = કર્ણ RQ (= 8 સેમી) અને

બાજુ AB = બાજુ RP (= 3 સેમી)

આથી, $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$ (એકરૂપતાની **કાકબા** શરત પ્રમાણે) [આકૃતિ 7.30 (i)]



આકૃતિ 7.30

(ii) અહીં, $\angle A = \angle Q$ (= 90°) અને

બાજુ AC = બાજુ PQ (=5 સેમી)

પરંતુ કર્ણ BC $\neq$ કર્ણ PR [આકૃતિ 7.30 (ii)]

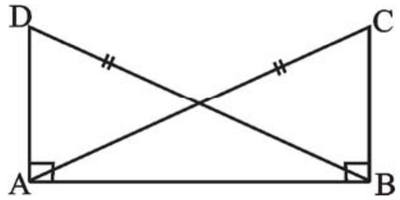
આથી, ત્રિકોણ એકરૂપ નથી.

ઉદાહરણ 9 આકૃતિ 7.31માં $\overline{DA} \perp \overline{AB}$, $\overline{CB} \perp \overline{AB}$ અને AC = BD છે.

ΔABC અને ΔDABમાં સમાન અંગોની ત્રણ જોડ લખો.

નીચેનામાંથી કયું વિધાન અર્થપૂર્ણ છે ?

(i) $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ (ii) $\Delta ABC \cong \Delta ABD$



આકૃતિ 7.31

ઉકેલ સમાન અંગની ત્રણ જોડી :

$\angle ABC = \angle BAD$ (= 90°)

AC = BD (પક્ષ)

AB = BA (સામાન્ય બાજુ)

આથી, ઉપરનામાંથી $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ (**કાકબા** શરત પ્રમાણે)

આથી વિધાન (i) સાચું છે.

વિધાન (ii) અર્થપૂર્ણ નથી, કેમ કે શિરોબિંદુની સંગતતા સંતોષાતી નથી.

જાતે કરો :

1. આકૃતિ 7.32માં ત્રિકોણના કેટલાક ભાગનાં માપ આપેલાં છે. એકરૂપતાની **કાકબા** શરતનો ઉપયોગ કરી કઈ જોડના ત્રિકોણ એકરૂપ છે તે નક્કી કરો. જો એકરૂપતા હોય તો પરિણામને સાંકેતિક [redacted]

આકૃતિ 7.32

આકૃતિ 7.33

2. $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$ સાબિત કરવા માટે **કાકબા** શરતનો ઉપયોગ કરવાનો છે. જો $\angle B = \angle P = 90°$ અને $AB = RP$ આપેલ હોય, તો વધુ કઈ માહિતીની જરૂર છે ?
3. આકૃતિ 7.33માં, ΔABCમાં $\overline{BD}$ અને $\overline{CE}$ વેધ છે અને $BD = CE$ છે.
   (i) ΔCBD અને ΔBCEમાં સમાન ભાગની ત્રણ જોડ જણાવો.
   (ii) $\Delta CBD \cong \Delta BCE$ છે ? શા માટે અથવા શા માટે નહિ ?
   (iii) $\angle DCB = \angle EBC$ છે ? શા માટે અથવા શા માટે નહિ ?
4. ΔABC સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે જેમાં $AB = AC$ છે અને $\overline{AD}$ તેનો એક વેધ છે (આકૃતિ 7.34).
   (i) ΔADB અને ΔADCમાં સમાન ભાગની ત્રણ જોડ જણાવો.
   (ii) $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ છે ? શા માટે અથવા શા માટે નહિ ?
   (iii) $\angle B = \angle C$ છે ? શા માટે અથવા શા માટે નહિ ?
   (iv) $BD = CD$ છે ? શા માટે અથવા શા માટે નહિ ?

આકૃતિ 7.34

હવે આપણે અત્યાર સુધીમાં શીખેલી શરતો પર આધારિત દાખલાઓ અને પ્રશ્નો જોઈશું.

સ્વાધ્યાય 7.2

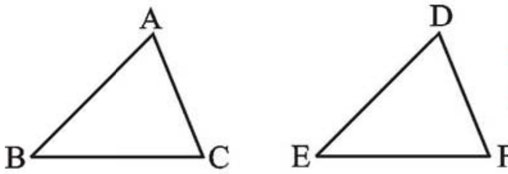
1. નીચેનામાં એકરૂપતાની કઈ શરતનો ઉપયોગ કરશો ?

(a) પક્ષ : AC = DF

AB = DE

BC = EF

આથી, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

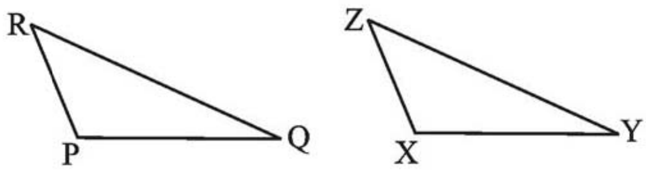


(b) પક્ષ : ZX = RP

RQ = ZY

$\angle PRQ = \angle XZY$

આથી, $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$

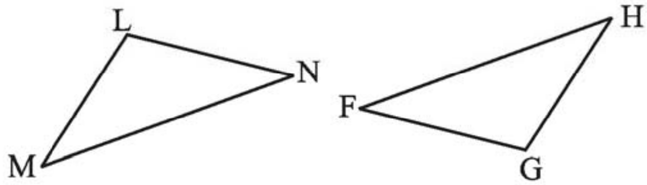


(c) પક્ષ : $\angle MLN = \angle FGH$

$\angle NML = \angle GFH$

ML = FG

આથી, $\Delta LMN \cong \Delta GFH$

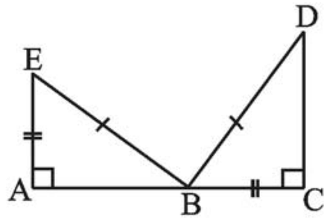


(d) પક્ષ : EB = DB

AE = BC

$\angle A = \angle C = 90°$

આથી, $\Delta ABE \cong \Delta CDB$



2. તમારે સાબિત કરવું છે કે $\Delta ART \cong \Delta PEN$,

(a) જો તમારે **બાબાબા** શરતનો ઉપયોગ કરવો હોય, તો તમારે

(i) AR = (ii) RT = (iii) AT =

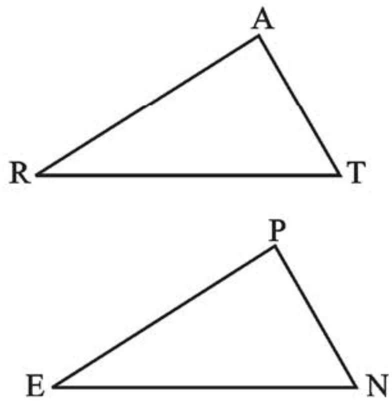
બતાવવું પડે.

(b) જો $\angle T = \angle N$ આપેલ હોય અને **બાખૂબા** શરતનો ઉપયોગ કરવો હોય, તો

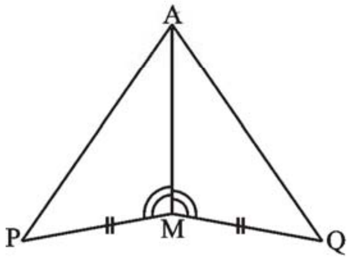
(i) RT = અને (ii) PN = હોવું જોઈએ.

(c) જો AT = PN આપેલ હોય અને તમારે **ખૂબાખૂ** શરતનો ઉપયોગ કરવો હોય, તો કયાં બે પરિણામ હોવાં જોઈએ ?

(i) ? (ii) ?



3. તમારે $\Delta AMP \cong \Delta AMQ$ સાબિત કરવાનું છે નીચેની સાબિતીમાં ખૂટતાં કારણો આપો.

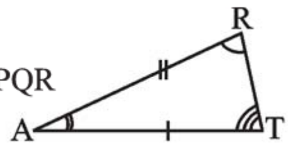


પગલું	કારણ
(i) $PM = QM$	(i) ...
(ii) $\angle PMA = \angle QMA$	(ii) ...
(iii) $AM = AM$	(iii) ...
(iv) $\Delta AMP \cong \Delta AMQ$	(iv) ...

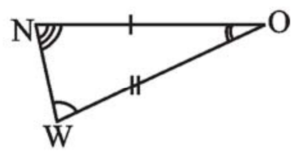
4. ΔABCમાં $\angle A = 30°$, $\angle B = 40°$ અને $\angle C = 110°$

ΔPQRમાં $\angle P = 30°$, $\angle Q = 40°$ અને $\angle R = 110°$

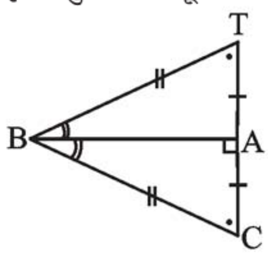
એક વિદ્યાર્થી કહે છે કે **ખૂખૂખૂ** શરત પ્રમાણે $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ છે. શું એ સાચો છે ? શા માટે ? શા માટે નહિ ?

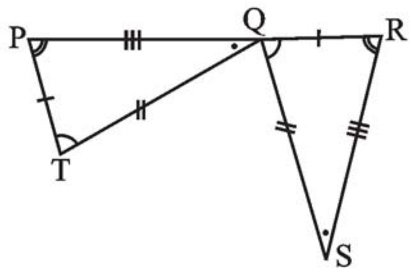


5. બાજુની આકૃતિમાં બે ત્રિકોણો એકરૂપ છે. અનુરૂપ અંગો નિશાનીથી દર્શાવેલા છે. $\Delta RAT \cong$ ... શું લખી શકાય ?



6. એકરૂપતાનું વિધાન પૂર્ણ કરો :



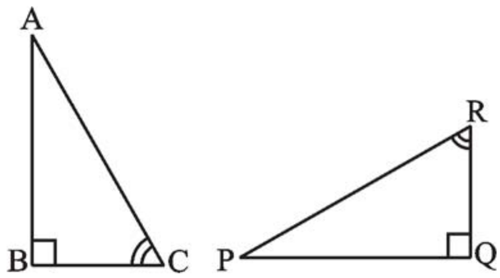


$\Delta BCA \cong ?$ $\Delta QRS \cong ?$

7. ચોરસ ખાનાંવાળા કાગળ પર સમાન ક્ષેત્રફળવાળા બે એવા ત્રિકોણ દોરો કે,

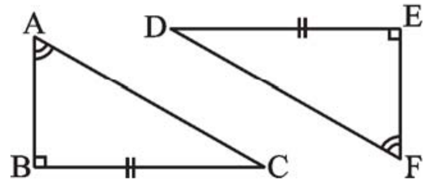
(i) જે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય.

(ii) જે ત્રિકોણ એકરૂપ નથી,
તેમની પરિમિતિ વિશે શું કહી શકાય ?



8. બે ત્રિકોણની એવી કાચી આકૃતિ દોરો કે જેમાં એકરૂપ ભાગની પાંચ જોડી હોય છતાં ત્રિકોણ એકરૂપ ન હોય.

9. ΔABC અને ΔPQR એકરૂપ બને તે માટે અનુરૂપ અંગની વધુ એક જોડી આપો. તમે કઈ શરતનો ઉપયોગ કર્યો ?



10.સમજાવો : $\Delta ABC \cong \Delta FED$ શા માટે છે ?

જ્ઞાનવર્ધક પ્રવૃત્તિ

સમતલીય આકૃતિઓની એકરૂપતા સાબિત કરવા માટે એક આકૃતિ પર બીજી આકૃતિને ગોઠવવાની પદ્ધતિ ઉપયોગી છે એ જોયું. આપણે રેખાખંડ, ખૂણા અને ત્રિકોણની એકરૂપતાની શરતની ચર્ચા કરી. હવે તમે આ ખ્યાલને બીજી સમતલીય આકૃતિઓ માટે આગળ વધારી શકો.

1. અલગ અલગ માપના કાપેલા ચોરસ લો. ચોરસની એકરૂપતા માટેની શરત શોધવા માટે એકબીજા પર ગોઠવવાની રીતનો ઉપયોગ કરો. એકરૂપતા માટે અનુરૂપ અંગનો ખ્યાલ કેવી રીતે ઉપયોગમાં આવે છે ? અનુરૂપ બાજુ મળે છે ? અનુરૂપ વિકર્ણ મળે છે ?
2. વર્તુળ લેશો તો શું થશે ? બે વર્તુળ એકરૂપ હોવાની શરત કઈ ? તમે એકબીજા પર ગોઠવવાની રીતનો ઉપયોગ કરી શકો છો. શોધો.
3. આ જ ખ્યાલને નિયમિત ષટ્કોણ વગેરે બીજી સમતલીય આકૃતિઓ માટે વિકસાવો.
4. એક ત્રિકોણની બે એકરૂપ નકલ લો. કાગળને વાળીને તેમના વેધ સમાન છે કે કેમ તે જુઓ. શું તેમાં મધ્યગા સમાન છે ? તમે તેમની પરિમિતિ અને ક્ષેત્રફળ વિશે શું કહી શકો ?

આપણે શું ચર્ચા કરી ?

1. એકરૂપ વસ્તુઓ એકબીજાની ચોક્સાઈ ભરેલી નકલ હોય છે.
2. સમતલીય આકૃતિઓની એકરૂપતા ચકાસવા માટે એકને બીજા પર ગોઠવવાની રીત વાપરી શકાય.
3. બે સમતલીય આકૃતિ F_1 અને F_2 માટે જો F_1 ની નકલ F_2 પર બંધબેસતી આવે તો તે એકરૂપ છે અને તેને $F_1 \cong F_2$ લખાય.
4. જો બે રેખાખંડની, કહો કે, $\overline{AB}$ અને $\overline{CD}$ની લંબાઈ સરખી હોય તો તેઓ એકરૂપ છે. આને $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ લખાય. જોકે સામાન્ય રીતે $AB = CD$ લખવામાં આવે છે.
5. જો બે ખૂણા, ધારો કે $\angle ABC$ અને $\angle PQR$નાં માપ સમાન હોય તો તેઓ એકરૂપ છે. આને $\angle ABC \cong \angle PQR$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે અથવા $m\angle ABC = m\angle PQR$ પણ લખાય છે. જોકે સામાન્ય રીતે વ્યવહારમાં $\angle ABC = \angle PQR$ લખવામાં આવે છે.
6. બે ત્રિકોણની **બાબાબા** એકરૂપતા :

   આપેલી સંગતતા માટે જો એક ત્રિકોણની ત્રણ બાજુ બીજા ત્રિકોણની અનુરૂપ (સંગત) બાજુ સાથે સમાન હોય તો તે બે ત્રિકોણ એકરૂપ છે.
7. બે ત્રિકોણની **બાખૂબા** એકરૂપતા :

   આપેલી સંગતતા માટે, એક ત્રિકોણની બે બાજુ અને વચ્ચેનો ખૂણો બીજા ત્રિકોણની અનુરૂપ (સંગત) બાજુ અને વચ્ચેના ખૂણા સાથે સમાન હોય તો તે બે ત્રિકોણ એકરૂપ છે.

8. બે ત્રિકોણની **ખૂબાખૂ** એકરૂપતા :

આપેલી સંગતતા માટે, એક ત્રિકોણના બે ખૂણા અને તેમની વચ્ચેની બાજુ બીજા ત્રિકોણના અનુરૂપ ખૂણા અને વચ્ચેની બાજુ સાથે સમાન હોય તો તે બે ત્રિકોણ એકરૂપ છે.

9. બે કાટકોણ ત્રિકોણની **કાકબા** એકરૂપતા :

આપેલી સંગતતા માટે, એક કાટકોણ ત્રિકોણનો કર્ણ અને એક બાજુ બીજા કાટકોણ ત્રિકોણના કર્ણ અને અનુરૂપ બાજુ સાથે સમાન હોય તો તે બે કાટકોણ ત્રિકોણ એકરૂપ છે.

10. બે ત્રિકોણ માટે **ખૂખૂખૂ** એકરૂપતા નથી :

અનુરૂપ ખૂણા સમાન હોય તેવા બે ત્રિકોણ એકરૂપ હોવા જરૂરી નથી. આવી સંગતતા માટે તેમાંનો એક ત્રિકોણ બીજા ત્રિકોણની મોટી કરેલી નકલ હોઈ શકે. (જો તેઓ એકબીજાની ચોકસાઈપૂર્વકની નકલ હોય તો જ તેઓ એકરૂપ હશે.)

પ્રકરણ 8

રાશિઓની તુલના

8.1 પ્રસ્તાવના

આપણા રોજિંદા જીવનમાં, એવા ઘણા અવસરો આવે છે, જેમાં આપણે બે રાશિઓની તુલના કરીએ છીએ.

ધારો કે આપણે હીના અને આમિરની ઊંચાઈની તુલના કરી રહ્યા છીએ.

આપણને માલૂમ પડે છે કે,

1. હીનાની ઊંચાઈ આમિરની ઊંચાઈ કરતાં બમણી છે અથવા
2. આમિરની ઊંચાઈ હીનાની ઊંચાઈ કરતાં અડધી છે.

બીજા ઉદાહરણ પર વિચાર કરીએ, જેમાં રીટા અને અમિત વચ્ચે 20 લખોટીઓ એવી રીતે વહેંચવામાં આવે છે કે જેથી રીટાને 12 લખોટીઓ અને અમિતને 8 લખોટીઓ મળે છે. આ પરથી આપણે કહી શકીએ કે,

1. રીટા પાસે અમિત કરતાં $\frac{3}{2}$ ગણી લખોટીઓ છે.

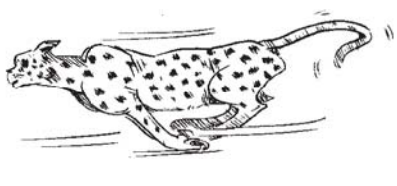
અથવા

2. અમિત પાસે રીટાની લખોટીઓનો $\frac{2}{3}$ ભાગ છે.

આવા જ એક બીજા ઉદાહરણમાં આપણે ચિત્તા અને માણસની ઝડપની સરખામણી કરીએ. અહીં, ચિત્તાની ઝડપ એ માણસની ઝડપ કરતાં 6 ગણી છે.

અથવા

માણસની ઝડપ એ ચિત્તાની ઝડપ કરતાં છઠ્ઠા ભાગની છે.



ચિત્તાની ઝડપ
120 કિમી પ્રતિ કલાક

માણસની ઝડપ
20 કિમી પ્રતિ કલાક

શું તમને આ રીતની કોઈ બીજી તુલનાઓ યાદ છે ? ધોરણ 6માં આપણે બે રાશિઓની તુલના કરવાનું શીખી ગયાં. જેમાં આપણે કહ્યું હતું કે એક રાશિ બીજી રાશિ કરતાં કેટલા ગણી હોય છે. અહીં આપણે જોઈશું કે, રાશિઓની સરખામણીનો ક્રમ બદલી શકાય છે અને તે પરથી એક રાશિ બીજી રાશિનો કેટલામો ભાગ છે તે કહી શકાય છે.

અહીં આપેલાં ઉદાહરણોમાં, આપણે ઊંચાઈનો ગુણોત્તર આ રીતે દર્શાવીએ.

હીનાની ઊંચાઈ : આમિરની ઊંચાઈ = 150 : 75 અથવા 2 : 1

શું હવે તમે અન્ય તુલનાઓ માટે ગુણોત્તર લખી શકો ?

આ પ્રકારની સરખામણીઓ સાપેક્ષ હોય છે અને બે જુદી-જુદી પરિસ્થિતિ માટે તે સમાન પણ હોઈ શકે.

જો હીનાની ઊંચાઈ 150 સેમી અને આમિરની ઊંચાઈ 100 સેમી હોત, તો તેમની ઊંચાઈનો ગુણોત્તર નીચે પ્રમાણે થાત.

હીનાની ઊંચાઈ : આમિરની ઊંચાઈ = 150 : 100= $\frac{150}{100}=\frac{3}{2}$ અથવા 3 : 2

આ એ જ પ્રમાણ છે, લખોટીઓની વહેચણીમાં પણ રીટાની અને અમિતની લખોટીઓ વચ્ચે થાત.

આમ, અહીં આપણે જોયું કે બે જુદી-જુદી તુલનાઓ માટે ગુણોત્તર સમાન હોઈ શકે. યાદ રાખો કે બે રાશિઓની સરખામણી માટે બંને માપનાં એકમો સરખાં હોવાં જોઈએ.

ગુણોત્તરને એકમ હોતો નથી.

ઉદાહરણ 1 3 કિમીનો 300 મી સાથે ગુણોત્તર શોધો.

ઉકેલ સૌપ્રથમ બંને અંતરોને એક એકમમાં લખીએ.

તેથી, 3 કિમી = 3 × 1000 મી = 3000 મી

આથી, ગુણોત્તર, 3 કિમી : 300 મી = 3000 : 300 = 10:1

8.2 સમાન ગુણોત્તર (Equivalent Ratios)

જુદાં જુદાં ગુણોત્તરની એકબીજા સાથે સરખામણી કરી જાણી શકાય કે તેઓ એકબીજા સાથે સમાન છે કે નહિ. આમ, કરવા માટે આપણે ગુણોત્તરોને અપૂર્ણાંકોના સ્વરૂપમાં લખવાં પડે અને ત્યાર બાદ તેઓને સમાન છેદવાળા અપૂર્ણાંકોમાં ફેરવી તુલના કરવામાં આવે છે. જો આ સમાન છેદવાળા અપૂર્ણાંકો સરખા હોય તો આપેલા ગુણોત્તરો સમાન છે એમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 2 ગુણોત્તરો 1:2 અને 2:3 સમાન છે ?

ઉકેલ આ તપાસવા માટે, આપણે $\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$ થાય કે નહિ એ તપાસવું પડે.

અહીં, $\frac{1}{2}=\frac{1\times 3}{2\times 3}=\frac{3}{6};\ \frac{2}{3}=\frac{2\times 2}{3\times 2}=\frac{4}{6}$

આપણે શોધ્યું કે, $\frac{3}{6}<\frac{4}{6}$, અર્થાત્ $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$ તેથી ગુણોત્તર 1:2 અને 2:3 સમાન નથી.

આ પ્રકારની તુલનાઓનો ઉપયોગ આપણે નીચેના ઉદાહરણમાં જોઈ શકીએ છીએ.

ઉદાહરણ 3 એક ક્રિકેટ ટીમનું બે મૅચોમાં રમતનું પ્રદર્શન નીચે પ્રમાણે છે :

વર્ષ	જીત	હાર
ગયા વર્ષે	8	2
આ વર્ષે	4	2

કયા વર્ષમાં રેકૉર્ડ વધારે સારો હતો ? એવું તમે કયા આધારે કહી શકો ?

ઉકેલ ગયા વર્ષે, જીત : હાર = 8:2 = 4:1

આ વર્ષે, જીત : હાર = 4:2 = 2:1

સ્પષ્ટ રૂપે, 4:1 > 2:1 (અપૂર્ણાંક સ્વરૂપમાં $\frac{4}{1} > \frac{2}{1}$)

આથી, આપણે કહી શકીએ કે ટીમનું પ્રદર્શન ગયા વર્ષે વધારે સારું હતું.

ધોરણ 6 માં આપણે સમાન ગુણોત્તરોની અગત્યતા પણ જોઈ ગયા. જે ગુણોત્તરો સમાન હોય તે ગુણોત્તરો પ્રમાણમાં છે એમ કહેવાય. ચાલો, આપણે પ્રમાણના ઉપયોગને યાદ કરીએ.

વસ્તુઓને પ્રમાણમાં રાખવી અને ઉકેલ મેળવવો

અરુણાએ પોતાના ઘરનું ચિત્ર બનાવ્યું અને ઘરની બાજુમાં મમ્મીને ઊભેલાં બતાવ્યાં.

આ ચિત્ર જોઈ મોનાએ કહ્યું, ''આ ચિત્રમાં કંઈક ભૂલ દેખાય છે.''

તમે કહી શકો ચિત્રમાં શું ભૂલ છે ?

તમે આવું કેવી રીતે કહી શકો ?

અહીં, ચિત્રમાં ઊંચાઈનો ગુણોત્તર અને વાસ્તવિક ઊંચાઈનો ગુણોત્તર સમાન હોવો જોઈએ.

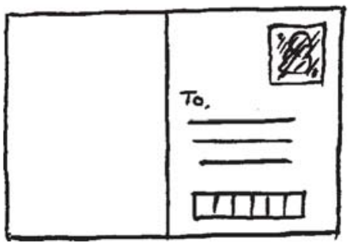
એટલે કે, $\frac{\text{મકાનની વાસ્તવિક ઊંચાઈ}}{\text{માતાની વાસ્તવિક ઊંચાઈ}} = \frac{\text{ચિત્રમાં મકાનની ઊંચાઈ}}{\text{ચિત્રમાં માતાની ઊંચાઈ}}$

આવું હશે, તો જ ચિત્ર પ્રમાણમાં કહેવાશે. જે ચિત્રોમાં પ્રમાણ જળવાયું હોય તે ચિત્રો જોવામાં મોહક અને આકર્ષક લાગે છે.

બીજું ઉદાહરણ કે જેમાં પ્રમાણનો ઉપયોગ થાય છે તે છે વિવિધ રાષ્ટ્રધ્વજની બનાવટ.

શું તમે જાણો છો રાષ્ટ્રધ્વજ હંમેશાં લંબાઈ અને પહોળાઈના એક નિશ્ચિત ગુણોત્તરમાં બનાવાય છે. તે જુદા જુદા દેશો માટે જુદું જુદું હોઈ શકે. પણ મોટે ભાગે 1.5 : 1 અથવા 1.7 : 1 ની આસપાસ હોય છે.

આપણે આ ગુણોત્તર આશરે 3:2 લઈ શકીએ. ભારતીય પોસ્ટકાર્ડમાં પણ ગુણોત્તરનું લગભગ આ જ માપ હોય છે. હવે, શું તમે કહી શકો કે 4.5 સેમી લાંબા અને 3.0 સેમી પહોળા કાર્ડમાં આ જ ગુણોત્તર છે ? આ માટે આપણે ગુણોત્તર 4.5 : 3.0 ની ગુણોત્તર 3:2 સાથે સરખામણી તપાસવી પડશે.



આપણે નોંધીએ કે, $4.5 : 3.0 = \frac{4.5}{3.0} = \frac{45}{30} = \frac{3}{2}$

આમ, આપણે જોયું કે, 4.5 : 3.0 અને 3:2 સમાન છે.

વાસ્તવિક જીવનમાં આપણે ઘણી જગ્યાએ આવા પ્રમાણનો ઉપયોગ જોઈએ છીએ. શું તમે આવી કોઈ પરિસ્થિતિ વિચારી શકો ?

આગલાં ધોરણોમાં આપણે એકમ પદ્ધતિ વિશે શીખી ગયાં. આ પદ્ધતિમાં પ્રથમ આપણે એક એકમનું માપ શોધીએ છીએ ત્યાર પછી જરૂરી સંખ્યા માટે માપ શોધીએ છીએ.

ચાલો, આપણે જોઈએ કે એક જ પ્રશ્ન ઉકેલવામાં ઉપરની બંને પદ્ધતિઓ કેવી રીતે વપરાય છે.

ઉદાહરણ 4 એક નકશો 2 સેમી = 1000 કિમીના પ્રમાણમાપ સાથે આપેલો છે, જો બે સ્થળો વચ્ચેનું અંતર નકશામાં 2.5 સેમી હોય તો તે બે સ્થળો વચ્ચેનું વાસ્તવિક અંતર કિમીમાં શોધો.

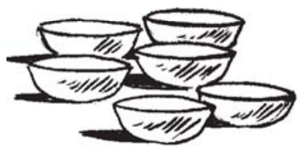
ઉકેલ

અરૂણ આમ કરે છે.	**મીરાં આમ કરે છે.**
ધારો કે અંતર = x કિમી	2 સેમી અર્થાત્ 1000 કિમી તેથી
ત્યારે $1000 : x = 2 : 2.5$	1 સેમી અર્થાત્ $\frac{1000}{2}$ કિમી
$\frac{1000}{x} = \frac{2}{2.5}$	આમ, 2.5 સેમી અર્થાત્
$\frac{1000 \times x \times 2.5}{x} = \frac{2}{2.5} \times x \times 2.5$	$\frac{1000}{2} \times 2.5$ કિમી
$1000 \times 2.5 = x \times 2$	= 1250 કિમી
$x = 1250$	

અરુણે પ્રથમ ગુણોત્તરોને પ્રમાણમાં બનાવી સમીકરણ મેળવ્યું અને સમીકરણનો ઉકેલ મેળવ્યો. મીરાંએ પ્રથમ 1 સેમીને અનુલક્ષીને અંતર શોધ્યું. ત્યાર બાદ તેનો ઉપયોગ કરી 2.5 સેમીને અનુલક્ષીને અંતર શોધ્યું. તેણે એકમ પદ્ધતિનો ઉપયોગ કર્યો.

ચાલો, આપણે એકમ પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરી થોડા વધુ પ્રશ્નો ઉકેલીએ.

ઉદાહરણ 5 6 કટોરાની કિંમત ₹ 90 છે તો આવા 10 કટોરાની કિંમત કેટલી થશે ?



ઉકેલ 6 કટોરાની કિંમત ₹ 90 છે.

તેથી, 1 કટોરાની કિંમત = ₹ $\frac{90}{6}$

તેથી, 10 કટોરાની કિંમત = ₹ $\frac{90}{6} \times 10$ = ₹ 150

ઉદાહરણ 6 મારી કાર 25 લિટર પેટ્રોલથી 150 કિમી અંતર કાપે છે તો આ જ કાર 30 લિટર પેટ્રોલથી કેટલું અંતર કાપશે ?

ઉકેલ 25 લિટર પેટ્રોલથી કારે કાપેલું અંતર = 150 કિમી

1 લિટર પેટ્રોલથી કારે કાપેલું અંતર = $\frac{150}{25}$ કિમી

તેથી, 30 લિટર પેટ્રોલથી કારે કાપેલું અંતર = $\frac{150}{25} \times 30$ કિમી = 180 કિમી

આ પદ્ધતિમાં પ્રથમ આપણે એક એકમ અથવા એકમ દરનું મૂલ્ય શોધ્યું. બે જુદા-જુદા ગુણધર્મોની સરખામણી દ્વારા આ કરી શકાય છે. ઉદાહરણ તરીકે જ્યારે આપણે ઘણી વસ્તુઓની કુલ કિંમત સાથે સરખામણી કરીએ છીએ ત્યારે આપણને કિંમત પ્રતિ વસ્તુ મળે છે અથવા જો તમે મુસાફરીના અંતરને તે માટે લાગતા સમય સાથે સરખાવો તો અંતર પ્રતિ એકમ સમય શોધી શકો. અહીં તમે જોઈ શકો કે આપણે વારંવાર ‘દરેક માટે’ શબ્દના બદલે ‘પ્રતિ’ શબ્દનો ઉપયોગ કરીએ છીએ.

ઉદાહરણ તરીકે, કિમી પ્રતિ કલાક, બાળકો પ્રતિ શિક્ષક વગેરે એકમ દર દર્શાવે છે.

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

એક કીડી પોતાના વજન કરતાં 50 ગણું વજન ઊંચકી શકે છે. જો આ તથ્ય માણસ પર લાગુ પાડવામાં આવે તો તમે કેટલું વજન ઊંચકી શકો ?

સ્વાધ્યાય 8.1

1. નીચેનાનો ગુણોત્તર શોધો :

   (a) ₹ 5નો 50 પૈસા સાથે (b) 15 કિગ્રાનો 210 ગ્રામ સાથે

   (c) 9 મીનો 27 સેમી સાથે (b) 30 દિવસનો 36 કલાક સાથે

2. એક કમ્પ્યૂટર લેબમાં 6 વિદ્યાર્થી દીઠ 3 કમ્પ્યૂટર છે. તો 24 વિદ્યાર્થીઓ માટે કેટલા કમ્પ્યૂટર જોઈશે ?

3. રાજસ્થાનની વસ્તી = 570 લાખ અને ઉત્તરપ્રદેશની વસ્તી = 1660 લાખ.
   રાજસ્થાનનું ક્ષેત્રફળ = 3 લાખ કિમી^{2} અને ઉત્તરપ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ = 2 લાખ કિમી^{2}.

   (i) આ બંને રાજ્યોમાં પ્રતિ કિમી^{2} કેટલી વ્યક્તિ છે ?

   (ii) કયા રાજ્યમાં વસ્તી ઓછી છે ?

8.3 ટકાવારી - રાશિઓની સરખામણી કરવાની બીજી રીત (Percentage Another way of Comparing Quantities)

C5H4Z6

અનિતાનો રિપૉર્ટ
કુલ 320/400
ટકા : 80

રીટાનો રિપૉર્ટ
કુલ 300/360
ટકા : 83.3

અનિતા કહે છે કે તેનું પરિણામ વધારે સારું છે કારણ કે તેણે 320 ગુણ પ્રાપ્ત કર્યા છે. જ્યારે રીટાએ માત્ર 300 ગુણ પ્રાપ્ત કર્યા છે. શું તમે અનિતા સાથે સહમત છો ? તમારા મતે કોનું પરિણામ વધારે સારું છે ?

માનસીએ તેમને કહ્યું કે માત્ર મેળવેલા ગુણોની સરખામણી કરી કોનું પરિણામ વધારે સારું છે તે ન કહી શકાય. કારણ કે જેમાંથી તે બંનેએ ગુણ પ્રાપ્ત કર્યા છે તે કુલ ગુણ બંનેના સમાન નથી.

તે કહે છે કે તમે તમારા પરિણામ પત્રકમાં આપવામાં આવેલા ટકા કેમ નથી જોતાં ?
અનિતાના ટકા 80 અને રીટાના ટકા 83.3 હતા. જે બતાવે છે કે રીટાનું પરિણામ વધારે સારું છે. શું તમે સહમત છો ?

ટકા એ એવા અપૂર્ણાંકોનો અંશ છે જેનો છેદ 100 હોય. તેનો ઉપયોગ પરિણામોની સરખામણી કરવા માટે થાય છે. ચાલો, આપણે ટકાને વિસ્તારથી સમજવાનો પ્રયત્ન કરીએ.

8.3.1 ટકાવારીનો અર્થ (Meaning of Percentage)

ટકા શબ્દ લેટિન શબ્દ 'Per centum' પરથી આવ્યો છે, જેનો અર્થ 'પ્રતિ સો' થાય છે.

ટકા દર્શાવવા માટેનો સંકેત % છે જેનો અર્થ શતાંશ પણ થાય છે એટલે કે 1% નો અર્થ 100માંથી એક અથવા સોમો ભાગ થાય. જેને આ પ્રમાણે લખી શકાય : 1% = $\frac{1}{100}$ =0.01.

આ સમજવા માટે નીચેનાં કેટલાંક ઉદાહરણો પર વિચાર કરીએ.

રીનાએ એક ટેબલનો ઉપરનો ભાગ બનાવવા માટે જુદા જુદા રંગની 100 ટાઈલ્સનો ઉપયોગ કર્યો. તેણે પીળા, લીલા, લાલ અને વાદળી રંગની ટાઈલ્સ અલગ-અલગ ગણી અને કોષ્ટકમાં નીચે પ્રમાણે નોંધ કરી. શું તમે કોષ્ટક પૂર્ણ કરવામાં મદદ કરી શકો ?

રંગ	ટાઈલ્સની સંખ્યા	દર પ્રતિ સો	અપૂર્ણાંક	આ રીતે લખાય	આ રીતે વંચાય
પીળો	14	14	$\frac{14}{100}$	14%	14 ટકા
લીલો	26	26	$\frac{26}{100}$	26%	26 ટકા
લાલ	35	35	....	....	....
વાદળી	25	....	....	....	....
કુલ	**100**				

પ્રયત્ન કરો

1. નીચે આપેલી માહિતી માટે જુદી-જુદી ઊંચાઈ ધરાવતાં બાળકોની સંખ્યાના ટકા શોધો.

ઊંચાઈ	બાળકોની સંખ્યા	અપૂર્ણાંકમાં	ટકામાં
110 સેમી	22		
120 સેમી	25		
128 સેમી	32		
130 સેમી	21		
કુલ	**100**		

2. એક દુકાનમાં જુદા જુદા માપના બૂટની જોડની સંખ્યા નીચે પ્રમાણે છે :

   માપ 2:20 માપ 3:30 માપ 4:28

   માપ 5:14 માપ 6:8

   આ માહિતીને કોષ્ટક સ્વરૂપે લખો અને દુકાનમાં ઉપલબ્ધ દરેક માપના બૂટની સંખ્યાના ટકા શોધો.

જ્યારે કુલ સરવાળો 100 ન હોય ત્યારે ટકા

ઉપરનાં બધાં જ ઉદાહરણોમાં, વસ્તુઓની સંખ્યાનો સરવાળો 100 હતો. ઉદાહરણ તરીકે, રીના પાસે 100 ટાઈલ્સ હતી, બાળકોની સંખ્યા 100 અને બૂટની સંખ્યા પણ 100 હતી. જો વસ્તુઓની કુલ સંખ્યા 100 ન હોય તો દરેક વસ્તુની સંખ્યાના ટકા કેવી રીતે ગણી શકાય ? આ સ્થિતિમાં આપણે અપૂર્ણાંકને એવા સમ અપૂર્ણાંકમાં ફેરવવા પડે કે જેનો છેદ 100 હોય. નીચેના ઉદાહરણ પર વિચાર કરીએ. તમારી પાસે એક એવી માળા છે, જેમાં બે જુદા-જુદા રંગના વીસ મણકાઓ પરોવેલા છે.

રંગ	મણકાની સંખ્યા	અપૂર્ણાંક	છેદ 100	ટકામાં
લાલ	8	$\frac{8}{20}$	$\frac{8}{20} \times \frac{100}{100} = \frac{40}{100}$	40 %
વાદળી	12	$\frac{12}{20}$.	$\frac{12}{20} \times \frac{100}{100} = \frac{60}{100}$	60 %
કુલ	**20**			

અનવરે લાલ મણકાની સંખ્યાના ટકા આ રીતે શોધ્યા

20 મણકામાંથી લાલ મણકાની સંખ્યા 8 છે. તેથી 100 મણકામાંથી લાલ મણકાની સંખ્યા $= \frac{8}{20} \times 100$

$= 40$ (100 માંથી)

$= 40\%$

આશા આ રીતે કરે છે.

$$\frac{8}{20} = \frac{8 \times 5}{20 \times 5}$$

$$= \frac{40}{100} = 40\ \%$$

આપણે જોયું કે જ્યારે સરવાળો 100 ન આપેલો હોય ત્યારે ટકાવારી ત્રણ રીતે શોધી શકાય. કોષ્ટકમાં બતાવેલ રીતમાં આપણે અપૂર્ણાંકને $\frac{100}{100}$ વડે ગુણીએ છીએ. આમ કરવાથી અપૂર્ણાંકની કિંમત બદલાતી નથી. પાછળથી, અપૂર્ણાંકના છેદમાં માત્ર 100 જ બાકી રહે છે.

અનવરે એકમ પદ્ધતિનો ઉપયોગ કર્યો. આશાએ છેદમાં 100 મેળવવા માટે અપૂર્ણાંકનો $\frac{5}{5}$ વડે ગુણાકાર કર્યો. તમને જે રીત યોગ્ય લાગે તે વાપરી શકો. કદાચ તમે જાતે પણ કોઈ રીત બનાવી શકો.

અનવરે જે રીતનો ઉપયોગ કર્યો તે રીત બધાં જ ગુણોત્તર માટે વાપરી શકાય. શું આશા દ્વારા વપરાયેલી રીત બધાં જ પ્રમાણો માટે વાપરી શકાય ? અનવર કહે છે કે આશા દ્વારા વપરાયેલી રીત ત્યારે જ ઉપયોગમાં લઈ શકાય જ્યારે તમે કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યા શોધી શકો જેનો અપૂર્ણાંકના છેદ સાથેનો ગુણાકાર 100 આવે. છેદ 20 હોવાના કારણે તે 5 વડે ગુણી 100 મેળવી શકી. જો છેદ 6 હોત તો આશા આ રીત વાપરી ન શકત. શું તમે સહમત છો ?

પ્રયત્ન કરો

1. જુદા-જુદા રંગની 10 કુકરીનો સંગ્રહ આપેલો છે.

રંગ	સંખ્યા	અપૂર્ણાંક	છેદ 100	ટકામાં
લીલો				
વાદળી				
લાલ				
કુલ				

કોષ્ટક પૂર્ણ કરો અને દરેક રંગની કુકરીની સંખ્યાના ટકા શોધો.

2. માલા પાસે બંગડીઓનો સંગ્રહ છે. તેણી પાસે 20 સોનાની બંગડીઓ અને 10 ચાંદીની બંગડીઓ છે, તો આ દરેક પ્રકારની બંગડીઓની સંખ્યાના ટકા શોધો. ઉપરના ઉદાહરણ પ્રમાણે શું તમે આ માહિતી કોષ્ટકમાં દર્શાવી શકો ?

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

1. નીચેનાં ઉદાહરણો જુઓ અને દરેકમાં તુલના કરવા માટે કઈ પદ્ધતિ યોગ્ય ગણાય તેની ચર્ચા કરો.

વાતાવરણની 1 ગ્રામ હવામાં :

.78 ગ્રામ નાઈટ્રોજન
.21 ગ્રામ ઑક્સિજન
.01 ગ્રામ અન્ય વાયુઓ

અથવા

78% નાઈટ્રોજન
21% ઑક્સિજન
1% અન્ય વાયુઓ

2. એક શર્ટમાં :

$\frac{3}{5}$ કૉટન
$\frac{2}{5}$ પૉલિસ્ટર

અથવા

60% કૉટન
40% પૉલિસ્ટર

8.3.2 અપૂર્ણાંક સંખ્યાઓને ટકામાં ફેરવવી (Converting Fractional Number to Percentage)

અપૂર્ણાંક સંખ્યાઓના છેદ જુદા-જુદા હોઈ શકે. અપૂર્ણાંક સંખ્યાઓની તુલના કરવા માટે તેમના છેદ સમાન કરવા પડે અને આપણે જોયું કે જો અપૂર્ણાંકનો છેદ 100 હોય તો સરખામણી કરવી સરળ થઈ જાય છે એટલે કે આપણે અપૂર્ણાંકને ટકામાં ફેરવીએ છીએ. ચાલો, આપણે જુદા-જુદા અપૂર્ણાંકોને ટકામાં ફેરવવાનો પ્રયત્ન કરીએ.

ઉદાહરણ 7 $\frac{1}{3}$ને ટકામાં ફેરવો.

ઉકેલ અહીં, $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{100}{100} = \frac{1}{3} \times 100\ \%$

$= \frac{100}{3}\ \% = 33\frac{1}{3}\ \%$

ઉદાહરણ 8 એક વર્ગમાં 25 બાળકો છે, તેમાંથી 15 છોકરીઓ છે. તો વર્ગમાં કેટલા ટકા છોકરીઓ છે ?

ઉકેલ 25 બાળકોમાંથી 15 છોકરીઓ છે, તેથી છોકરીઓની સંખ્યાના ટકા

$= \frac{15}{25} \times 100 = 60$ વર્ગમાં 60 % છોકરીઓ છે.

ઉદાહરણ 9 $\frac{5}{4}$ને ટકામાં ફેરવો.

ઉકેલ અહીં, $\frac{5}{4} = \frac{5}{4} \times 100\ \% = 125\ \%$

ઉપરનાં ઉદાહરણો પરથી આપણે શોધ્યું કે સાદા અપૂર્ણાંકો સાથે સંબંધિત ટકાવારી 100 કરતાં ઓછી અને મિશ્ર અપૂર્ણાંકો સાથે સંબંધિત ટકાવારી 100 થી વધુ હોય છે.

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

(i) શું તમે કેકનો 50 % ભાગ ખાઈ શકો ? શું તમે 100 % કેક ખાઈ શકો ?

શું તમે કેકનો 150 % ભાગ ખાઈ શકો ?

(ii) શું વસ્તુની કિંમત 50 % થી ઉપર જઈ શકે ? શું વસ્તુની કિંમત 100 % થી ઉપર જઈ શકે ?

શું વસ્તુની કિંમત 150 % થી ઉપર જઈ શકે ?

8.3.3 દશાંશોનું ટકામાં રૂપાંતર

આપણે અપૂર્ણાંકોને ટકામાં કેવી રીતે ફેરવી શકાય તે જોયું. હવે આપણે દશાંશોને ટકામાં કેવી રીતે ફેરવી શકાય તે જોઈએ.

ઉદાહરણ 10 દશાંશોને ટકામાં ફેરવો.

(a) 0.75 (b) 0.09 (c) 0.2

ઉકેલ

(a) $0.75 = 0.75 \times 100\ \%$

$= \frac{75}{100} \times 100\ \% = 75\ \%$

(b) $0.09 = \frac{9}{100} = 9\ \%$

(c) $0.2 = \frac{2}{10} \times 100\ \% = 20\ \%$

પ્રયત્ન કરો

1. નીચનાને ટકામાં ફેરવો :

(a) $\frac{12}{16}$ (b) 3.5 (c) $\frac{49}{50}$ (d) $\frac{2}{2}$ (e) 0.05

2. (i) 32 વિદ્યાર્થીઓમાંથી 8 વિદ્યાર્થીઓ ગેરહાજર છે તો કેટલા ટકા વિદ્યાર્થીઓ ગેરહાજર ગણાય ?

(ii) 25 રેડિયો છે, તેમાંના 16 રેડિયો ખરાબ છે તો કેટલા ટકા રેડિયો ખરાબ છે ?

(iii) એક દુકાનમાં 500 વસ્તુ છે. તેમાંથી 5 બગડેલી વસ્તુ છે. તો કેટલા ટકા વસ્તુ બગડેલી કહેવાય ?

(iv) 120 મતદારો છે. તેમાંથી 90 મતદારોનો મત 'હા' છે, તો 'હા' મતોની સંખ્યાના ટકા શોધો.

8.3.4 ટકાનું અપૂર્ણાંક અથવા દશાંશમાં રૂપાંતર

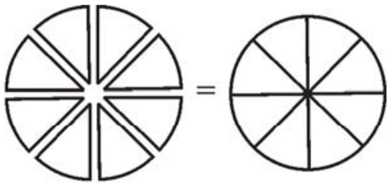
આપણે અત્યાર સુધી અપૂર્ણાંકો અને દશાંશોને ટકામાં ફેરવ્યા આપણે તેથી ઊલટું પણ કરી શકીએ. એટલે કે આપેલા ટકાને દશાંશ અથવા અપૂર્ણાંકમાં ફેરવી શકીએ.

કોષ્ટક જુઓ, અવલોકન કરો અને એને પૂર્ણ કરો :

આવાં વધુ ઉદાહરણો બનાવો અને ઉકેલો

ટકા	1 %	10 %	25 %	50 %	90 %	125 %	250 %
અપૂર્ણાંક	$\frac{1}{100}$	$\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$					
દશાંશ	0.01	0.10					

તમામ ભાગ એકઠાં થઈ પૂર્ણ બનાવે :



રંગીન ટાઇલ્સના ઉદાહરણમાં, વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈઓ માટે અને હવામાં રહેલા વાયુઓ માટે આપણે શોધ્યું કે, જ્યારે આપણે ટકાનો સરવાળો કરીએ છીએ ત્યારે 100 મળે છે. બધા ભાગો જો એકસાથે ઉમેરવામાં આવે તો પૂર્ણ અથવા 100 % આપે છે. તેથી જો આપણને એક ભાગ આપવામાં આવે તો બીજો ભાગ શોધી શકીએ છીએ. ધારો કે કુલ વિદ્યાર્થીઓમાંથી 30 % છોકરાઓ છે. આનો અર્થ એ થાય કે જો વર્ગમાં 100 વિદ્યાર્થીઓ હશે તો તેમાંથી 30 છોકરાઓ હશે અને બાકીની છોકરીઓ હશે.

દેખીતી રીતે છોકરીઓ (100–30) % = 70 % હશે.

પ્રયત્ન કરો

1. 35 % + ________ % = 100 %, 64 % + 20 % + ________ % = 100 %,
   45 % = 100 % – ________ %, 70 % = ________ % – 30 %
2. જો વર્ગના 65 % વિદ્યાર્થીઓ પાસે સાયકલ હોય, તો વર્ગના કેટલા ટકા વિદ્યાર્થીઓ પાસે સાયકલ નથી ?

3. આપણી પાસે સફરજન, નારંગી અને કેરીથી ભરેલી ટોપલી છે. જો 50 % સફરજન, 30 % નારંગી હોય, તો કેટલા ટકા કેરી હશે ?

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

ડ્રેસ તૈયાર કરવામાં આવેલા ખર્ચને ધ્યાનમાં લો.

20 % ભરતકામ પર, 50 % કાપડ પર, 30 % સિલાઈ પર

શું તમે આવાં વધુ ઉદાહરણો વિચારી શકો ?

8.3.5 અંદાજિત કિંમત સાથે ગમ્મત

કોઈ પણ ક્ષેત્રફળનો અંદાજિત ભાગ શોધવા માટે ટકા મદદરૂપ થાય છે.

ઉદાહરણ 11 દર્શાવેલ આકૃતિમાં છાયાંકિત ભાગ કેટલા ટકા છે ?

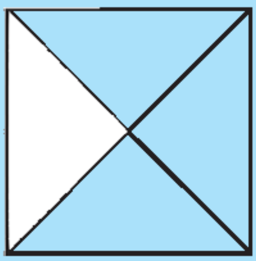
ઉકેલ સૌપ્રથમ આપણે છાયાંકિત ભાગનો અપૂર્ણાંક શોધીશું. આ અપૂર્ણાંક પરથી આપણે છાયાંકિત ભાગના ટકા શોધીશું.

તમે જોઈ શકો છો આકૃતિનો અડધો ભાગ છાયાંકિત એટલે $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 100\ \% = 50\ \%$ એટલે, 50 % આકૃતિ છાયાંકિત છે.

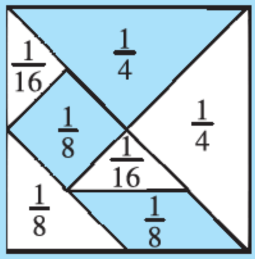
પ્રયત્ન કરો

દર્શાવેલ આકૃતિમાં કેટલા ટકા ભાગ છાયાંકિત છે ?

(i)



(ii)



તમે તમારી જાતે જ આવી અમુક આકૃતિ બનાવી જુઓ અને તમારા મિત્રને તેના છાયાંકિત ભાગનો અંદાજ લગાવવા કહો.

8.4 ટકાનો ઉપયોગ (Use of Percentages)

C5R11T

8.4.1 ટકાનું અર્થઘટન

આપણે જોયું કે ટકા સરખામણી કરવામાં મદદરૂપ થાય. અપૂર્ણાંક અને દશાંશ અપૂર્ણાંકને ટકામાં ફેરવતાં આપણે શીખી ગયાં છીએ. હવે આપણે ટકાનો જીવનમાં ઉપયોગ જોઈશું. આ માટે આપણે પહેલાં નીચેનાં વિધાનોનો અર્થ સમજીશું.

- રવિ એની 5 % કમાણી બચાવે છે.
- મીરાંના ડ્રેસનો 20 % ભાગ વાદળી છે.
- રેખાને દરેક પુસ્તકનાં વેચાણ પર 10 % નફો મળે છે.

ઉપરના દરેક વિધાન પરથી તમે શું અનુમાન કરી શકો ?

5% મતલબ 100નો 5મો ભાગ અથવા $\frac{5}{100}$ એવું લખી શકીએ.

એનો અર્થ એવો થયો કે રવિ એની કમાણીના દરેક ₹ 100 માંથી ₹ 5 બચાવે છે. આ જ રીતે ઉપરના વિધાનોનું અર્થઘટન કરી શકાય છે.

8.4.2 ટકાનું "કેટલા"માં રૂપાંતરણ

નીચેનાં ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 12 40 બાળકોનું સર્વેક્ષણ દર્શાવે છે કે તેમાંથી 25 % બાળકોને ફૂટબૉલ રમવું ગમે છે, તો કેટલાં બાળકોને ફૂટબૉલ રમવું ગમે છે ?

ઉકેલ અહીં બાળકોની કુલ સંખ્યા 40 છે. તેમાંથી 25% બાળકોને ફૂટબૉલ રમવું ગમે છે. મીના અને અરુણે નીચેની પદ્ધતિથી સંખ્યા શોધી. તમે કોઈ પણ પદ્ધતિ અપનાવી શકો છો.

અરુણ આ પ્રમાણે કરે છે

100માંથી 25ને ફૂટબૉલ રમવું ગમે છે તો 40માંથી ફૂટબૉલ રમવું ગમતું હોય તેવા બાળકોની સંખ્યા = $\frac{25}{100} \times 40 = 10$

મીના આ પ્રમાણે કરે છે

40ના 25 % = $\frac{25}{100} \times 40$

$= 10$

તેથી, 40માંથી 10 બાળકોને ફૂટબૉલ રમવાનું ગમે છે.

પ્રયત્ન કરો

1. ઉકેલ મેળવો :

(a) 164ના 50 %   (b) 12ના 75 %   (c) 64ના $12\frac{1}{2}$%

2. એક વર્ગનાં 25 બાળકોમાંથી 8 % બાળકોને વરસાદમાં ભીંજાવું ગમે છે તો કેટલાં બાળકોને વરસાદમાં ભીંજાવું ગમે છે ?

ઉદાહરણ 13 રાહુલે સ્વેટર ખરીદ્યું જેમાં 25% ડિસ્કાઉન્ટ મળતાં તેણે 200 રૂપિયાની બચત કરી. તો ડિસ્કાઉન્ટ મળતાં પહેલાં સ્વેટરની કિંમત કેટલી હશે ?

ઉકેલ સ્વેટરની કિંમત 25 % ઘટાડતાં રાહુલે 200 રૂપિયાની બચત કરી. એનો અર્થ એ થયો કે રાહુલે બચાવેલી કિંમત એટલે કિંમતમાં કરેલો 25 % નો ઘટાડો. ચાલો, આપણે એ જોઈએ કે મોહન અને અબ્દુલે સ્વેટરની મૂળ કિંમત કેવી રીતે શોધી ?

મોહનનો ઉકેલ

મૂળ કિંમતના 25% = ₹ 200

ધારેલી કિંમત (રૂપિયામાં) = P

તેથી, Pના 25 % = 200 અથવા

$\frac{25}{100} \times P = 200$ અથવા $\frac{P}{4} = 200$

$P = 200 \times 4$ તેથી $P = 800$

અબ્દુલનો ઉકેલ

25 રૂપિયાની બચત હોય તો મૂળકિંમત 100 રૂપિયા છે તો 200 રૂપિયાની બચત હોય તો મૂળકિંમત = $\frac{100}{25} \times 200 = 800$ રૂપિયા થાય.

બંને દ્વારા શોધાયેલી સ્વેટરની મૂળ કિંમત 800 રૂપિયા છે.

પ્રયત્ન કરો

1. કઈ સંખ્યાના 25 % એટલે 9 ?   2. કઈ સંખ્યાના 75 % એટલે 15 ?

સ્વાધ્યાય 8.2

1. આપેલા અપૂર્ણાંકોને ટકામાં ફેરવો.

(a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{5}{4}$ (c) $\frac{3}{40}$ (d) $\frac{2}{7}$

2. આપેલા દશાંશ અપૂર્ણાંકોને ટકામાં ફેરવો.

(a) 0.65 (b) 2.1 (c) 0.02 (d) 12.35

3. આપેલ આકૃતિનો કેટલો ભાગ રંગીન છે તે નક્કી કરી રંગીન ભાગના ટકા શોધો.

(i) (ii) (iii)

4. શોધો :

(a) 250ના 15 % (b) 1 કલાકના 1 %

(c) 2500ના 20 % (d) 1 કિલોના 75 %

5. કુલ રાશિ શોધો કે જેના

(a) 5 % = 600 થાય (b) 12 % = ₹1080 થાય

(c) 40 % = 500 કિમી થાય (d) 70 % = 14 મિનિટ થાય

(e) 8 % = 40 લિટર થાય

6. ટકાને દશાંશ અપૂર્ણાંકમાં ફેરવો અને અપૂર્ણાંકમાં ફેરવી તેનું અતિસંક્ષિપ્ત સ્વરૂપ લખો.

(a) 25 % (b) 150 % (c) 20 % (d) 5 %

7. એક શહેરમાં 30% સ્ત્રી, 40% પુરુષ અને બાકીનાં બાળકો છે, તો બાળકો કેટલા ટકા છે ?

8. એક મતદાન ક્ષેત્રમાં 15,000 મતદાર છે. જેમાં 60% એ મતદાન કર્યું. તો મતદાન ન કરનારની ટકાવારી શોધો. તમે શોધી શકશો કે કેટલા મતદારોએ મતદાન નથી કર્યું ?

9. મિતા તેના પગારમાંથી ₹ 4000 બચાવે છે, જો તે તેના પગારના 10 % હોય તો તેનો પગાર કેટલો હશે ?

10. એક લોકલ ક્રિકેટ ટીમ એક સિઝનમાં 20 મેચ રમે છે. તેમાંથી 25% મેચ જીતે છે તો તેઓ કેટલી મૅચ જીત્યા હશે ?

8.4.3 ગુણોત્તરમાંથી ટકા

કેટલીક વાર અમુક ભાગ આપણને ગુણોત્તર સ્વરૂપે આપવામાં આવે છે અને આપણને તે ટકામાં ફેરવવાની જરૂરિયાત ઊભી થાય છે. નીચેના ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 14 રીનાની મમ્મીએ એને ઈડલી બનાવવા માટે કહ્યું અને કહ્યું કે તેના માટે બે ભાગ ચોખા અને એક ભાગ અડદની દાળ લેવી. તે મિશ્રણના કેટલા ટકા ચોખા અને અડદની દાળ હશે ?

ઉકેલ ગુણોત્તરના સ્વરૂપે આ રીતે લખી શકાય. ચોખા : અડદની દાળ = 2:1.

હવે, 2 + 1 = 3 એ ભાગ કુલ છે. તેનો અર્થ એ થયો કે $\frac{2}{3}$ ભાગ ચોખા અને $\frac{1}{3}$ ભાગ અડદની દાળ છે.

તેથી, ચોખાના ટકા $\frac{2}{3} \times 100\,\% = \frac{200}{3} = 66\frac{2}{3}\,\%$

અડદની દાળના ટકા $\frac{1}{3} \times 100\,\% = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}\,\%$

ઉદાહરણ 15 રવિ, રાજુ અને રૉયને ₹ 250 એવી રીતે વહેંચવામાં આવ્યા કે રવિને બે ભાગ, રાજુને ત્રણ ભાગ અને રૉયને પાંચ ભાગ મળ્યા, તો આ વહેંચણીમાં દરેકને કેટલા રૂપિયા મળ્યા અને એની ટકાવારી કેટલી હશે ?

ઉકેલ ત્રણ છોકરાઓ માટે જે ભાગો મેળવે છે તે ગુણોત્તર 2 : 3 : 5

કુલ ભાગ $= 2 + 3 + 5 = 10$ છે.

દરેકને મળેલ રકમ	**દરેકને મળેલ રકમના ટકા**
$\frac{2}{10} \times ₹\ 250 = ₹\ 50$	રવિને $\frac{2}{10} \times 100\ \% = 20\ \%$ મળ્યા
$\frac{3}{10} \times ₹\ 250 = ₹\ 75$	રાજુને $\frac{3}{10} \times 100\ \% = 30\ \%$ મળ્યા
$\frac{5}{10} \times ₹\ 250 = ₹\ 125$	રૉયને $\frac{5}{10} \times 100\ \% = 50\ \%$ મળ્યા

પ્રયત્ન કરો

1. 15 મીઠાઈઓને એવી રીતે વહેંચવામાં આવે કે મનુ અને સોનુને અનુક્રમે 20 % અને 80 % મીઠાઈ મળે.
2. ત્રિકોણના ખૂણાનો ગુણોત્તર 2:3:4 હોય, તો દરેક ખૂણાનું માપ શોધો.

8.4.4 ટકામાં વધારો અથવા ઘટાડો (Increase or Decrease as Per Cent) :

અમુક વખત આપણને ચોક્કસ રાશિ કે જથ્થામાં થતો વધારો અથવા ઘટાડો ટકાવારીમાં જાણવાની જરૂર હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે, રાજ્યની વસ્તી 5,50,000 થી વધીને 6,05,000 થાય છે. જ્યારે આપણે કહીએ કે વસ્તીમાં 10% નો વધારો થયો છે, ત્યારે આપણે તે સારી રીતે સમજી શકીએ છીએ.

મૂળ રાશિમાં વધારો અથવા ઘટાડો કેવી રીતે ટકામાં રૂપાંતરિત કરી શકીએ ? નીચેના ઉદાહરણ દ્વારા સમજીએ.

ઉદાહરણ 16 એક શાળાની ટીમ આ વર્ષે 6 રમતો જીતી હતી, જ્યારે ગયા વર્ષે 4 રમતો જીતી હતી, તો ગયા વર્ષની તુલનામાં જીતમાં કેટલા ટકા વધારો થયો ?

ઉકેલ જીતવાની સંખ્યામાં વધારો (રાશિનો તફાવત) $= 6 - 4 = 2$

$$\text{ટકાવારીમાં વધારો} = \frac{\text{રાશિનો તફાવત}}{\text{મૂળ (આધાર) રાશિ}} \times 100$$

$$= \frac{\text{જીતની સંખ્યામાં વધારો}}{\text{ગયા વર્ષમાં થયેલી જીતની સંખ્યા}} \times 100 = \frac{2}{4} \times 100 = 50$$

ઉદાહરણ 17 એક દેશમાં છેલ્લાં 10 વર્ષમાં અભણ લોકોની સંખ્યા 150 લાખથી ઘટીને 100 લાખ થઈ ગઈ છે, તો તેમની ટકાવારીમાં કેટલા ટકા ઘટાડો થયો ?

ઉકેલ મૂળ રાશિ = શરૂઆતમાં અભણ વ્યક્તિની સંખ્યા = 150 લાખ

મૂળ રાશિનો તફાવત = અભણ વ્યક્તિઓની સંખ્યામાં ઘટાડો = 150 – 100 = 50 લાખ.

આથી, ઘટાડો ટકામાં = $\frac{\text{મૂળ રાશિનો તફાવત}}{\text{મૂળ (આધાર) રાશિ}} \times 100 = \frac{50}{150} \times 100 = 33\frac{1}{3}$

આથી, ટકાવારીમાં $33\frac{1}{3}\%$ નો ઘટાડો થયો.

પ્રયત્ન કરો

1. વધારા અથવા ઘટાડાની ટકાવારી શોધો :
   – શર્ટની કિંમત ₹ 280થી ઘટીને ₹ 210 થઈ છે.
   – કોઈ એક પરીક્ષામાં મળેલ ગુણ 20થી વધીને 30 થાય છે.
2. મારી મમ્મી કહે છે કે તેમના બાળપણમાં પેટ્રોલ ₹ 10 પ્રતિ લિટર હતું. આજે એનો ભાવ ₹ 70 પ્રતિ લિટર છે. તો કિંમતમાં કેટલા ટકા વધારો થયો ?

8.5 વસ્તુના ભાવ સાથે સંબંધ અથવા ખરીદ અને વેચાણ

મેં આ વસ્તુ ₹ 600 માં ખરીદી

મેં આ વસ્તુ ₹ 610 માં વેચી

C5ZW3G

કોઈ પણ વસ્તુની ખરીદ કિંમતને **પડતર કિંમત** તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. ટૂંકમાં તેને પ.કિં. કહે છે. વસ્તુને જે કિંમતે વેચવામાં આવે છે તેને તેની વેચાણકિંમત તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. ટૂંકમાં તેને વે.કિં. કહે છે.

આપણે ખરીદ કિંમત કરતા ઓછી કિંમતમાં કે પછી સરખી અથવા વધારે કિંમતમાં વસ્તુ વેચીએ, આમા કયું વધારે સારું કહેવાય એ આપણે નક્કી કરવાનું છે.

જો પ.કિં. < વે.કિં. હોય, તો નફો મળે છે. નફો = વે.કિં. – પ.કિં.

જો પ.કિં. = વે.કિં. હોય, તો નફો કે ખોટ થતું નથી.

જો પ.કિં. > વે.કિં. હોય, તો આપણને ખોટ થાય છે ખોટ = પ.કિં. – વે.કિં.

હવે આપણે નીચેની વસ્તુઓ અને તેમની કિંમત દ્વારા વધુ સમજવાનો પ્રયત્ન કરીએ.

- મેં એક રમકડું ₹ 72 માં ખરીદ્યું અને ₹ 80 માં વેચ્યું.
- મેં એક ટીશર્ટ ₹ 120 માં ખરીદ્યું અને ₹ 100 માં વેચ્યું.
- મેં એક સાઈકલ ₹ 800 માં ખરીદી અને ₹ 940 માં વેચી.

હવે આપણે પહેલા વાક્યને ધ્યાનમાં લઈએ. પહેલા વાક્યમાં રમકડાની પ.કિં. ₹ 72 છે અને વે.કિં. ₹ 80 છે. તેથી જણાય છે કે વે.કિં એ પ.કિં. કરતાં વધુ છે. તેથી થયેલ નફો વે.કિં – પ.કિં. = 80 – 72 = ₹ 8 હવે બાકીના બંને વાક્યને પણ એ જ રીતે સમજવાનો પ્રયત્ન કરો.

8.5.1 નફો કે ખોટ ટકા સ્વરૂપે

નફો અને ખોટને ટકાવારીમાં બદલવામાં આવે છે. તે હંમેશાં પડતર કિંમત ઉપર ગણાય છે. ઉપરના ઉદાહરણમાં આપણે નફો અને ખોટ ટકામાં શોધી શકીએ.

હવે આપણે રમકડાના ઉદાહરણમાં જોઈએ તો આપણી પાસે પ.કિં = ₹ 72, વે.કિં ₹ 80 તેમજ નફો = ₹ 8 તો નફાનું ટકાવાર પ્રમાણ આપણે નેહા અને શેખરની રીતો પ્રમાણે જોઈશું.

નેહા આ રીતે કરે છે

ટકામાં નફો $= \frac{\text{નફો}}{\text{પ.કિં}} \times 100 = \frac{8}{72} \times 100$

$= \frac{1}{9} \times 100 = 11\frac{1}{9}$

શેખર આ રીતે કરે છે.

₹ 72 પર નફો ₹ 8 છે.

₹ 100 પર નફો $= \frac{8}{72} \times 100$

$= 11\frac{1}{9}$ આ રીતે ટકામાં નફો $= 11\frac{1}{9}$

આ રીતે નફો ₹ 8 છે અને

નફાની ટકાવારી $11\frac{1}{9}$.

તેવી જ રીતે, તમે ટકામાં ખોટ પણ શોધી શકો છો.

પડતર કિંમત = ₹120, વેચાણ કિંમત = ₹ 100

આથી ખોટ = ₹ 120 – ₹ 100 = ₹ 20

ખોટ ટકામાં $= \frac{\text{ખોટ}}{\text{પ.કિં}} \times 100$

$= \frac{20}{120} \times 100$

$= \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$

₹ 120 પર ખોટ ₹ 20 છે. તેથી,

ટકા $= \frac{20}{120} \times 100 = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$

આમ, ખોટ ટકામાં $= 16\frac{2}{3}$

છેલ્લા પ્રશ્ન માટે પ્રયત્ન કરો.

અહીં, પ.કિં., વે.કિં. અને નફો કે ખોટ આ ત્રણમાંથી કોઈ પણ બેની કિંમત આપેલી હોય ત્યારે આપણે બાકીના એકનું મૂલ્ય શોધી શકીએ છીએ.

ઉદાહરણ 18 ફૂલદાનીની કિંમત ₹ 120 છે, જો દુકાનદાર તેને 10% ખોટ સાથે વેચે છે તો તેની વેચાણ કિંમત શોધો.

ઉકેલ અહીં આપેલું છે કે પ.કિં. = ₹ 120 અને નુકસાન ટકામાં = 10. આપણે વે.કિં. શોધવાની છે.

સોહન આ રીતે કરે છે

10 % ની ખોટનો અર્થ એ થયો કે પ.કિં = ₹ 100

નુકસાન = ₹ 10

તેથી વે.કિં. = ₹ (100 – 10) = 90

જ્યારે પ.કિં. ₹ 100 હોય, તો વે.કિં. ₹ 90 થાય.

$\therefore$ જો પ.કિં. 120 હોય, તો વે.કિં.

વે.કિં. $= \frac{90}{100} \times 120 =$ ₹ 108

આનંદી આ રીતે કરે છે

પ.કિંના 10 % ખોટ છે.

ખોટ = 120 ના 10% $= \frac{10}{100} \times 120 =$ ₹ 12

પરિણામે

વે.કિં. = પ.કિં. – ખોટ

= ₹ 120 – ₹ 12 = ₹ 108

આ બંને પદ્ધતિ દ્વારા ખરીદ કિંમત ₹ 108 મળે છે.

ઉદાહરણ 19 એક રમકડાની કારની વે.કિં ₹ 540 છે. જો તેના પર દુકાનદાર 20 % નો નફો મેળવતો હોય તો તે કારની પ.કિં. કેટલી થાય ?

ઉકેલ આપણને આપેલ વે.કિં = ₹ 540 અને નફો = 20 % તો પ.કિં. = ?

અમીના આ રીતે કરે છે.

20% નફો એટલે કે પ.કિં. ₹ 100 અને નફો ₹ 20.

તેથી વે.કિં. = 100 + 20 = 120

હવે, જ્યારે વે.કિ. ₹ 120 થઈ તો પ.કિં. 100 થાય.

તેથી જો વે.કિ 540 હોય તો પ.કિ

$= \frac{100}{120} \times 540 =$ ₹ 450

અરુણ આ રીતે કરે છે.

નફો = પ.કિં. ના 20% અને

વે.કિં. = પ.કિં. + નફો

તેથી 540 = પ.કિં. + પ.કિં.નાં

20 % = પ.કિં. + $\frac{20}{100}$ × પ.કિં.

$= \left[1+\frac{1}{5}\right]$ પ.કિં. $= \frac{6}{5}$ પ.કિં.

તેથી, $540 \times \frac{5}{6}$ = પ.કિં.

અથવા ₹ 450 = પ.કિ.

બંને ઉકેલમાં પ.કિ. ₹ 450 મળે છે.

પ્રયત્ન કરો

1. એક દુકાનદાર એક ખુરશી ₹ 375 માં ખરીદે છે અને ₹ 400 માં તેને વેચે છે. હવે દુકાનદારે મેળવેલ નફાની ટકાવારી શોધો.
2. ₹ 50 માં એક વસ્તુ ખરીદાય છે અને તેને 12 % ના નફા સાથે વેચવામાં આવે છે તો વે.કિં. શોધો.
3. ₹ 250 માં વેચવામાં આવતી વસ્તુ પર 5% નફો મેળવાય છે તો તેની પ.કિં. કેટલી હશે ?
4. એક વસ્તુ 5% ખોટ સાથે ₹ 540 માં વેચવામાં આવે છે. તેની પ.કિં. શુ હશે ?

8.6 સાદું વ્યાજ અથવા ઉછીના પૈસા પરનો ચાર્જ

C69S54

સોહિની કહે છે કે તેઓ નવું સ્કૂટર ખરીદવા જાય છે. મોહન સોહિનીને પૂછે છે કે તે ખરીદવા માટે તારી પાસે પૂરતા પૈસા છે કે કેમ ? સોહિની કહે છે મારા પપ્પા એક બૅંકમાંથી લોન લેવાના છે. અહીં જે પૈસા ઉછીનાં લેવાની વાત થાય છે તે રકમ **મુદ્દલ** તરીકે ઓળખાય છે.

આ ઉછીનાં નાણાં લેનાર તે ભરપાઈ કરે તે પહેલાં થોડો સમય માટે ઉપયોગમાં લેશે આ નાણાંને અમુક સમય માટે રાખવા માટે બૅંક ઉછીનાં લેનારે વધારાના પૈસા ચૂકવવા પડે છે. આ **વ્યાજ** તરીકે ઓળખાય છે.

વર્ષના અંતે જે કિંમત ચૂકવવાની હોય એ શોધવા માટે ઉછીનાં લીધેલાં નાણાંમાં વ્યાજનો ઉમેરો કરવો. એટલે કે **વ્યાજમુદ્દલ = મુદ્દલ + વ્યાજ**

વ્યાજ સામાન્ય રીતે એક વર્ષના સમય માટે ટકામાં દર્શાવાય છે. આપણે વાર્ષિક 10% વ્યાજ એવું કહી શકીએ. 10% વ્યાજનો અર્થ દરેક 100 રૂપિયા પર એક વર્ષ માટે 10 રૂપિયાનું વ્યાજ. એના માટે ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 20 અનીતા વાર્ષિક 15% ના વ્યાજ ઉપર ₹ 5,000 ની લોન લે છે, તો તે વર્ષના અંતે કેટલું વ્યાજ ચૂકવશે ?

ઉકેલ ઊછીના લીધેલ ₹ 5,000, એક વર્ષ માટે વ્યાજનો દર = 15 %. એનો અર્થ એ થયો કે જો ₹ 100 એક વર્ષ માટે વ્યાજે લીધા હોય તો ₹ 15 વ્યાજ ચૂકવવું પડે તો જો તેણે ₹ 5000 લીધા હોય તો એક વર્ષ માટે ચૂકવવું પડતું વ્યાજ

$$= ₹\ \frac{15}{100} \times 5000 = ₹\ 750$$

તેથી, વર્ષના અંતે તેણે ચૂકવવી પડતી રકમ = ₹ 5,000 + ₹ 750 = ₹ 5750.

તેથી એક વર્ષનું વ્યાજ શોધવા આ પ્રમાણે સામાન્ય તારણ લખી શકાય. મુદ્દલ માટે P અને વ્યાજના દર માટે R. હવે, ₹100 માટે ચૂકવવું પડતું વ્યાજ ₹ R તેથી જો ₹ P વ્યાજે લીધા હોય તો એક વર્ષ માટે ચૂકવવું પડતું વ્યાજ $= \dfrac{R \times P}{100} = \dfrac{P \times R}{100}$.

8.6.1 એકથી વધુ વર્ષ માટે વ્યાજ

જો અનીતા બે વર્ષના અંતે પૈસા પરત કરશે અને વ્યાજનો દર સમાન હશે તો તેણે બે વાર વ્યાજ ચૂકવવું પડશે. પહેલા વર્ષ માટે 750 રૂપિયા; બીજા વર્ષ માટે 750 રૂપિયા. આ રીતે થતી વ્યાજની ગણતરી જ્યાં મુદ્દલ બદલાતું નથી તેને સાદું વ્યાજ કહે છે. જેમ વર્ષ વધતાં જાય છે તેમ વ્યાજ પણ વધતું જાય છે. જો ત્રણ વર્ષ માટે 18 ટકા વ્યાજના દરે 100 રૂપિયા લીધા હોય તો ત્રણ વર્ષના અંતે ચૂકવવું પડતું વ્યાજ $18 + 18 + 18 = 3 \times 18 =$ ₹ 54. આપણે એક વર્ષથી વધારે વર્ષ માટે સાદું વ્યાજ આ માટે સામાન્ય તારણ આ રીતે શોધી શકાય.

આપણે જાણીએ છીએ કે મુદ્દલ રૂપિયા ₹ P એક વર્ષ માટે વ્યાજ દર R ટકા તો વર્ષના માટે ચૂકવવું પડતું વ્યાજ $\dfrac{R \times P}{100}$.

તેથી T વર્ષ માટે ચૂકવવું પડતું વ્યાજ $I = \dfrac{PRT}{100}$ અને

ચૂકવવી પડતી કુલ રકમ = વ્યાજ મુદ્દલ = A = $P + I$

પ્રયત્ન કરો

1. 5 ટકા વાર્ષિક વ્યાજના દરે ₹ 10,000 જમા કરાવવામાં આવે છે તો એક વર્ષના અંતે મળતું વ્યાજ શોધો.
2. 7 ટકા વાર્ષિક વ્યાજના દરે ₹ 3,500 આપવામાં આવે છે તો 2 વર્ષના અંતે મળતું વ્યાજ શોધો.
3. 6.5 ટકા વાર્ષિક વ્યાજના દરે ₹ 6,050 લેવામાં આવે છે તો 3 વર્ષના અંતે ચૂકવવું પડતું વ્યાજ અને વ્યાજમુદ્દલ શોધો.
4. જો 2 વર્ષ માટે 3.5 ટકા વાર્ષિક વ્યાજના દરે ₹ 7,000 લેવામાં આવે તો બે વર્ષના અંતે ચૂકવવું પડતું વ્યાજમુદ્દલ શોધો.

જો કોઈ પણ ચાર મૂલ્યમાંથી ત્રણનાં મૂલ્ય આપવામાં આવ્યાં હોય તો તેમની વચ્ચેનો સંબંધ $I = \dfrac{P \times T \times R}{100}$ છે, જેના દ્વારા તમે બાકીનાનું મૂલ્ય શોધી શકો છો.

ઉદાહરણ 21 જો મનોહર ₹ 4500 નું બે વર્ષ માટેનું વ્યાજ ₹ 750 ચૂકવે છે, તો વ્યાજનો દર શોધો.

ઉકેલ 1

$$I = \frac{P \times T \times R}{100}$$

તેથી, $750 = \frac{4500 \times 2 \times R}{100}$

અથવા $\frac{750}{45 \times 2} = R$

તેથી, વ્યાજનો દર $= 8\frac{1}{3}\%$

ઉકેલ 2

બે વર્ષ માટે ચૂકવવું પડતું વ્યાજ ₹ 750.

તેથી એક વર્ષ માટે ચૂકવવું પડતું વ્યાજ $= \frac{750}{2} =$ ₹ 375

તેથી ₹ 4500 માટે વ્યાજ ₹ 375

તેથી ₹ 100 માટે ચૂકવવું પડતું વ્યાજ

$= \frac{375 \times 100}{4500} = 8\frac{1}{3}\%$

પ્રયત્ન કરો

1. તમારા બૅંક ખાતામાં ₹ 2,400 જમા છે અને વ્યાજનો વાર્ષિક દર 5 ટકા છે. કેટલાં વર્ષો બાદ વ્યાજની કિંમત ₹ 240 થશે ?
2. કોઈ રકમનું વાર્ષિક 5 ટકા લેખે 3 વર્ષનું વ્યાજ ₹ 450 થાય છે તો તે રકમ શોધો ?

સ્વાધ્યાય 8.3

1. નીચેનાં વાક્યો પરથી નફો-ખોટ શોધો. આ ઉપરાંત નફાની ટકાવારી અને ખોટની ટકાવારી પણ શોધો.
   (a) બગીચામાં વપરાતી કાતર ₹ 250 માં ખરીદી અને તેને ₹ 325માં વેચી.
   (b) એક ફ્રીજ ₹ 12000માં ખરીદ્યું અને ₹ 13500માં વેચ્યું.
   (c) એક કબાટ ₹ 2500માં ખરીદ્યો અને ₹ 3000માં વેચ્યો.
   (d) એક સ્કર્ટની પડતર કિંમત ₹ 250 છે અને ₹ 150માં વેચ્યું.
2. નીચે આપેલા ગુણોત્તરનાં પદોને ટકાવારીમાં બદલો.
   (a) 3:1 (b) 2:3:5 (c) 1:4 (d) 1:2:5
3. એક શહેરની વસ્તી 25,000માંથી ઘટીને 24,500 થઈ, તો ઘટાડાની ટકાવારી શોધો.
4. અરૂણે એક કાર ₹ 3,50,000 માં ખરીદી અને પછીના વર્ષે તેની કિંમત વધીને ₹ 3,70,000 થઈ, તો કારની કિંમતમાં થયેલ વધારાની ટકાવારી શોધો.
5. મેં એક ટીવી ₹ 10,000માં ખરીદ્યું અને 20% નફો મેળવી તે વેચી દીધું. તો મને ટીવી વેચવાથી કેટલા રૂપિયા મળશે ?
6. જુહીએ એક વૉશિંગમશીન ₹ 13,500માં વેચ્યું. તેને 20% ખોટ ગઈ તો જૂહીએ વૉશિંગમશીન કેટલા રૂપિયામાં ખરીદ્યું હશે ?
7. (i) ચૉકમાં કૅલ્શિયમ, કાર્બન અને ઑક્સિજનનો ગુણોત્તર 10:3:12 છે. તો ચોકમાં કાર્બનની ટકાવારી શોધો.
   (ii) જો ચૉકમાં કાર્બનનું વજન 3 ગ્રામ હોય તો ચોકનું વજન શોધો.

8. અમીના ₹ 275 માં એક પુસ્તક ખરીદે છે અને 15% નુકસાન વેઠી વેચે છે. તો તેણે તે પુસ્તક કેટલા રૂપિયામાં વેચ્યું હશે ?
9. નીચેની રકમનું 3 વર્ષનું વ્યાજમુદ્દલ શોધો.
   (a) મુદ્દલ = ₹ 1200, વાર્ષિક વ્યાજનો દર 12% (b) મુદ્દલ = રૂા. 7,500, વાર્ષિક વ્યાજનો દર 5%
10. ₹ 56,000 નું કેટલા ટકા વ્યાજ દરે 2 વર્ષનું વ્યાજ ₹ 280 થાય ?
11. જો મીના તેણે વ્યાજે લીધેલ અમુક રકમનું વાર્ષિક 9% ના દરે એક વર્ષનું વ્યાજ ₹ 45 ચૂકવતી હોય તો તેણે વ્યાજે લીધેલ રકમ શોધો.

આપણે શું ચર્ચા કરી ?

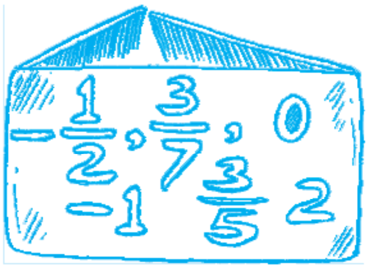
1. આપણાં રોજિંદા જીવનમાં વારંવાર બે રાશિઓની તુલના જરૂરી બને છે. તે રાશિઓ ઊંચાઈ, વજન, પગાર, ગુણ વગેરે છે.
2. જ્યારે આપણે 150 સેમી અને 75 સેમી ઊંચાઈ ધરાવતા બે માણસોની ઊંચાઈની સરખામણી કરીએ છીએ ત્યારે ઊંચાઈનો ગુણોત્તર 150:75 અથવા 2:1 લખીએ છીએ.
3. બે ગુણોત્તરોને સમચ્છેદી અપૂર્ણાંકમાં ફેરવી તેમની સરખામણી કરી શકાય છે. જો આ બે અપૂર્ણાંકો સરખા હોય તો આપણે કહી શકીએ કે આપેલાં ગુણોત્તરો સરખાં છે.
4. જો બે ગુણોત્તરો સરખાં હોય તો તે ચાર રાશિઓ પ્રમાણમાં છે એમ કહેવાય. ઉદાહરણ તરીકે 8:2 અને 16:4 સરખા છે. તેથી, 8, 2, 16 અને 4 પ્રમાણમાં છે એમ કહી શકાય.
5. સરખામણી કરવા માટેની બીજી રીત ટકા છે. ટકા એ જેનો છેદ 100 હોય તેવા અપૂર્ણાંકનો અંશ છે. અર્થાત્, પ્રતિ સો એટલે ટકા. દા.ત., 82 % ગુણ એટલે 100માંથી 82 ગુણ.
6. અપૂર્ણાંકોને ટકામાં ફેરવી શકાય અને તેથી ઊલટું પણ શક્ય છે. જેમ કે, $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times 100\%$ અને $75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$.
7. દશાંશોને પણ ટકામાં ફેરવી શકાય અને ઊલટું પણ શક્ય છે. ઉદાહરણ તરીકે $0.25 = 0.25 \times 100\% = 25\%$.
8. આપણે રોજીંદા જીવનમાં ટકાનો બહોળો ઉપયોગ કરીએ છીએ.
   (a) જ્યારે કુલ રાશિના અમુક ટકા આપેલા હોય ત્યારે તે ચોક્કસ સંખ્યા શોધવાનું આપણે શીખ્યાં.
   (b) જ્યારે રાશિનો કોઈ ભાગ ગુણોત્તરમાં આપેલ હોય ત્યારે તેને ટકામાં ફેરવી શકાય તે શીખ્યાં.
   (c) કોઈ રાશિના વધવા અથવા ઘટવાને પણ ટકા રૂપે દર્શાવી શકાય.
   (d) કોઈ વસ્તુના ખરીદ-વેચાણમાં થયેલા નફો કે ખોટને પણ ટકા રૂપે દર્શાવી શકાય.
   (e) ઉધાર લીધેલી કિંમતની વ્યાજની ગણતરી માટે વ્યાજનો દર ટકામાં જ આપવામાં આવે છે. ઉદાહરણ તરીકે, ₹ 800, 3 વર્ષ માટે વાર્ષિક 12% વ્યાજના દરે ઉધાર લીધા.

પ્રકરણ 9

સંમેય સંખ્યાઓ

FKGLFP

9.1 પરિચય



તમારી આસપાસની વસ્તુઓની ગણતરી કરીને તમે સંખ્યાઓ શીખવાનું શરૂ કર્યું. આ અભ્યાસ માટે ઉપયોગમાં લેવાતી સંખ્યાઓ ગણતરીની સંખ્યાઓ અથવા પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ કહેવાય છે. તેઓ 1, 2, 3, 4, ... છે. આ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓમાં આપણે 0 નો સમાવેશ કરીને પૂર્ણ સંખ્યાઓ મેળવી. દા.ત. 0, 1, 2, 3, ... ત્યાર પછી ઋણનો સમાવેશ પૂર્ણ સંખ્યામાં કરી પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ મેળવી. જેમકે,... –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ... સંખ્યાઓ. આમ, આપણે સંખ્યા પદ્ધતિને પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓથી પૂર્ણ સંખ્યાઓ સુધી અને પૂર્ણ સંખ્યાઓથી પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ સુધી વિસ્તારી.

તમે અપૂર્ણાંકોથી પણ માહિતગાર છો. આ સંખ્યાઓ $\frac{\text{અંશ}}{\text{છેદ}}$ ના સ્વરૂપમાં હોય છે. જ્યાં અંશ 0 અથવા ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા છે અને છેદ ફક્ત ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા છે. તમે બે અપૂર્ણાંક સંખ્યાઓની સમતુલ્ય સંખ્યાઓ મેળવી અને પાયાની ચાર ક્રિયાઓ સરવાળો, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકારનો અભ્યાસ કર્યો.

આ પ્રકરણમાં આપણે સંખ્યા પદ્ધતિને વધારે વિસ્તૃત કરીશું. આપણે સંમેય સંખ્યાઓની સંકલ્પના કરીશું અને તેની સાથે સંમેય સંખ્યાઓના સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકારની ક્રિયાઓનો અભ્યાસ કરીશું.

9.2 સંમેય સંખ્યાઓ (Rational Numbers)ની આવશ્યકતા

C6IN6R

આપણે જોઈ ગયાં છીએ કે કેવી રીતે સંખ્યાઓ માટેની વિરુદ્ધ પરિસ્થિતિ દર્શાવવા પૂર્ણાંકોનો ઉપયોગ કરી શકાય છે. ઉદાહરણ તરીકે, એક સ્થળની જમણી બાજુ 3 કિમીના અંતરને 3 થી દર્શાવવામાં આવે તો તે જ સ્થળની ડાબી બાજુ 5 કિમીના અંતરને –5 દ્વારા દર્શાવી શકાય છે. તેવી રીતે જો ₹ 150 નો નફો 150 તરીકે દર્શાવવામાં આવે તો ₹ 100ની ખોટને –100 તરીકે લખી શકાય છે.

આવી પરિસ્થિતિઓ જેવી અનેક પરિસ્થિતિઓ છે કે જેમાં અપૂર્ણાંક સંખ્યાનો સમાવેશ થાય છે. તમે દરિયાની સપાટીથી ઉપર 750 મી અંતરને $\frac{3}{4}$ કિમી તરીકે વ્યક્ત કરી શકો છો. શું આપણે દરિયાની સપાટીથી નીચે 750 મી અંતરને કિમી દ્વારા દર્શાવી શકીએ ? શું આપણે દરિયાની સપાટીથી નીચે $\frac{3}{4}$ કિમીની ઊંડાઈને $\frac{-3}{4}$ વડે દર્શાવી શકીએ ? આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે $\frac{-3}{4}$ એ પૂર્ણાંક નથી કે અપૂર્ણાંક સંખ્યા નથી. આવી સંખ્યાઓને સમાવિષ્ટ કરવા માટે સંખ્યા પદ્ધતિને વિસ્તારિત કરવાની આપણને જરૂર પડે.

9.3 સંમેય સંખ્યા એટલે શું ?

સંકલ્પના 'સંમેય'નો ઉદ્ભવ થાય છે શબ્દ 'ગુણોત્તર' પરથી. તમે જાણો છો કે ગુણોત્તર 3:2ને $\frac{3}{2}$ની રીતે પણ લખી શકીએ. અહીં, 3 અને 2 પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ છે.

એવી જ રીતે બે પૂર્ણાંકો p અને q ($q \neq o$)નો ગુણોત્તર એટલે કે p:q ને $\frac{p}{q}$ તરીકે લખી શકાય છે. આ રીતે અહીંયા સંમેય સંખ્યાઓ દર્શાવવામાં આવે છે.

સંમેય સંખ્યાને એવી સંખ્યાના રૂપમાં વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે કે જે $\frac{p}{q}$ ના રૂપમાં દર્શાવી શકાય, જ્યાં p અને q પૂર્ણાંક છે અને $q \neq 0$.

આમ, $\frac{4}{5}$ એક સંમેય સંખ્યા છે. અહીં $p = 4$ અને $q = 5$.

શું $\frac{-3}{4}$ પણ એક સંમેય સંખ્યા છે ? હા, કારણ કે $p = -3$ અને $q = 4$ એ પૂર્ણાંક છે.

તમે $\frac{3}{8}, \frac{4}{8}, 1\frac{2}{3}$ વગેરે જેવાં અનેક અપૂર્ણાંક જોયા હશે. બધા અપૂર્ણાંકો સંમેય સંખ્યાઓ હોય છે. શું તમે એનું કારણ જણાવી શકો ?

દશાંશ સંખ્યાઓ 0.5, 2.3 વગેરે માટે શું કહી શકાય ? આવા પ્રકારની સંખ્યાઓને સામાન્ય રીતે અપૂર્ણાંક તરીકે લખી શકાય અને આથી તેઓ સંમેય સંખ્યાઓ છે. ઉદાહરણ તરીકે, $0.5 = \frac{5}{10}$, $0.333 = \frac{333}{1000}$ વગેરે.

પ્રયત્ન કરો

1. શું સંખ્યા $\frac{2}{-3}$ એ સંમેય સંખ્યા છે ? એના વિશે વિચાર કરો.
2. દસ સંમેય સંખ્યાઓની યાદી બનાવો.

અંશ અને છેદ :

$\frac{p}{q}$માં પૂર્ણાંક p એ અંશ છે અને પૂર્ણાંક $q(\neq 0)$ એ છેદ છે.

આમ, $\frac{-3}{7}$ માં અંશ -3 અને છેદ 7 છે.

આવી પાંચ સંમેય સંખ્યાઓ જણાવો કે જેમાં,

(a) અંશ એક ઋણ પૂર્ણાંક અને છેદ એક ધન પૂર્ણાંક છે.

(b) અંશ એક ધન પૂર્ણાંક અને છેદ એક ઋણ પૂર્ણાંક છે.

(c) અંશ અને છેદ બંને ઋણ પૂર્ણાંક છે.

(d) અંશ અને છેદ બંને ધન પૂર્ણાંક છે.

- શું પૂર્ણાંકો એ સંમેય સંખ્યાઓ છે ?

કોઈ પણ પૂર્ણાંકને સંમેય સંખ્યા કહી શકાય છે. ઉદાહરણ તરીકે, અંશ -5 એ સંમેય સંખ્યા છે. કારણ કે, તમે એને $\frac{-5}{1}$ લખી શકો છો. પૂર્ણાંક 0ને પણ $0 = \frac{0}{2}$ અથવા $\frac{0}{7}$ વગેરે સ્વરૂપમાં લખી શકીએ છીએ. આથી, એ પણ એક સંમેય સંખ્યા છે. આમ, સંમેય સંખ્યાઓમાં પૂર્ણાંકો અને અપૂર્ણાંકો સમાવિષ્ટ છે.

સમાન સંમેય સંખ્યાઓ :

સંમેય સંખ્યાને વિવિધ અંશ અને છેદ વડે લખી શકાય છે, ઉદાહરણ તરીકે સંમેય સંખ્યા $\frac{-2}{3}$ છે.

$\frac{-2}{3}=\frac{-2\times2}{3\times2}=\frac{-4}{6}$. આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે $\frac{-2}{3}$ અને $\frac{-4}{6}$ સમાન છે.

એવી જ રીતે, $\frac{-2}{3}=\frac{(-2)\times(-5)}{3\times(-5)}=\frac{10}{-15}$. આથી $\frac{-2}{3}$ અને $\frac{10}{-15}$ પણ સમાન છે.

આમ, $\frac{-2}{3}=\frac{-4}{6}=\frac{10}{-15}$ આવી રીતે જે સંમેય સંખ્યાઓ એકબીજા સાથે સરખી હોય તેને સમાન સંમેય સંખ્યાઓ કહેવાય.

ફરીથી, $\frac{10}{-15}=\frac{-10}{15}$ (કેવી રીતે ?)

સંમેય સંખ્યાના અંશ અને છેદને સમાન શૂન્યેતર પૂર્ણાંક સાથે ગુણવાથી, આપણને આપેલી સંમેય સંખ્યા જેવી જ બીજી સંમેય સંખ્યા મળે છે. એ પણ સમાન અપૂર્ણાંક પ્રાપ્ત કરવા જેવું જ છે.

ગુણાકારની જેમ, અંશ અને છેદને સમાન શૂન્યેતર પૂર્ણાંક વડે ભાગવાથી પણ આપણને સમાન સંમેય સંખ્યા મળે છે.

ઉદાહરણ તરીકે,

$$\frac{10}{-15}=\frac{10\div(-5)}{-15\div(-5)}=\frac{-2}{3}, \qquad \frac{-12}{24}=\frac{-12\div12}{24\div12}=\frac{-1}{2}$$

$\frac{-2}{3}$ ને આપણે $-\frac{2}{3}$, $\frac{-10}{15}$ ને $-\frac{10}{15}$ વગેરે તરીકે લખી શકીએ.

પ્રયત્ન કરો

ખાલી જગ્યા પૂરો :

(i) $\frac{5}{4}=\frac{\square}{16}=\frac{25}{\square}=\frac{-15}{\square}$

(ii) $\frac{-3}{7}=\frac{\square}{14}=\frac{9}{\square}=\frac{-6}{\square}$

9.4 ધન અને ઋણ સંમેય સંખ્યાઓ

સંમેય સંખ્યા $\frac{2}{3}$ વિચારો. જેમાં અંશ અને છેદ બન્ને સંખ્યાઓ ધન પૂર્ણાંક છે. આવી સંમેય સંખ્યાને **ધન સંમેય સંખ્યા** કહેવાય. તો, $\frac{3}{8},\frac{5}{7},\frac{2}{9}$ વગેરે ધન સંમેય સંખ્યાઓ છે.

$\frac{-3}{5}$ માં અંશ ઋણ પૂર્ણાંક અને તેનો છેદ ધન પૂર્ણાંક છે. આવી સંમેય સંખ્યાને **ઋણ સંમેય સંખ્યા** કહેવાય.

આમ, $\frac{-5}{7},\frac{-3}{8},\frac{-9}{5}$ વગેરે ઋણ સંમેય સંખ્યાઓ છે.

પ્રયત્ન કરો

1. શું 5 એ એક ધન સંમેય સંખ્યા છે ?
2. ધન સંમેય સંખ્યાની પાંચ યાદી બનાવો.

પ્રયત્ન કરો

1. શું -8 એ એક ઋણ સંમેય સંખ્યા છે ?
2. પાંચ ઋણ સંમેય સંખ્યાની યાદી બનાવો.

- શું $\frac{8}{-3}$ એ ઋણ સંમેય સંખ્યા છે ? આપણે જાણીએ છીએ કે $\frac{8}{-3} = \frac{8 \times -1}{-3 \times -1} = \frac{-8}{3}$

  અને $\frac{-8}{3}$ એ ઋણ સંમેય સંખ્યા છે, તો $\frac{8}{-3}$ એ પણ ઋણ સંમેય સંખ્યા જ છે.

  એવી જ રીતે, $\frac{5}{-7}, \frac{6}{-5}, \frac{2}{-9}$ વગેરે. ઋણ સંમેય સંખ્યાઓ છે. નોંધો કે એમના અંશ ધન છે અને છેદ ઋણ છે.
- સંખ્યા 0 એ ધન કે ઋણ સંમેય સંખ્યા નથી.
- $\frac{-3}{-5}$ માટે શું કહી શકાય ?

  તમે જોશો કે $\frac{-3}{-5} = \frac{-3 \times (-1)}{-5 \times (-1)} = \frac{3}{5}$ થાય. તો, $\frac{-3}{-5}$ એ ધન સંમેય સંખ્યા છે.

  આમ, $\frac{-2}{-5}, \frac{-5}{-3}$ વગેરે ધન સંમેય સંખ્યાઓ છે.

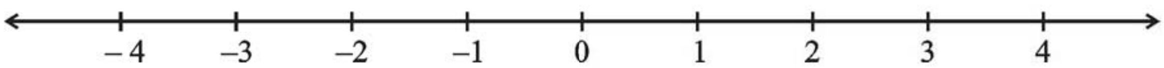
પ્રયત્ન કરો

1. નીચેનામાંથી કઈ સંખ્યાઓ ઋણ સંમેય સંખ્યાઓ છે ?

   (i) $\frac{-2}{3}$ (ii) $\frac{5}{7}$ (iii) $\frac{3}{-5}$ (iv) 0 (v) $\frac{6}{11}$ (vi) $\frac{-2}{-9}$

9.5 સંમેય સંખ્યાનું સંખ્યારેખા પર નિરૂપણ

તમે પૂર્ણાંક સંખ્યાનું સંખ્યારેખા પર નિરૂપણ કરતાં શીખી ગયાં છો. ચાલો એવી એક સંખ્યારેખા દોરીએ.



શૂન્યની જમણી બાજુનાં બિંદુઓને + ચિહ્ન વડે દર્શાવાય છે અને તેઓ ધન પૂર્ણાંક છે. શૂન્યની ડાબી બાજુનાં બિંદુઓને – ચિહ્ન વડે દર્શાવાય છે. અને તેઓ ઋણ પૂર્ણાંક છે.
તમે અપૂર્ણાંકોનું સંખ્યારેખા પર નિરૂપણ કરતાં શીખી ગયાં છો.
ચાલો આપણે જોઈએ કે સંમેય સંખ્યાઓ કેવી રીતે સંખ્યારેખા પર નિરૂપિત કરી શકાય છે.

ચાલો, આપણે સંખ્યારેખા પર $-\frac{1}{2}$નું નિરૂપણ કરીએ.

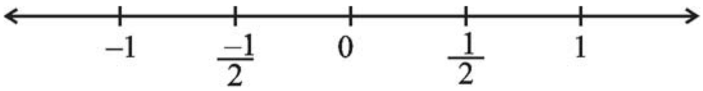
ધન પૂર્ણાંકોની જેમ ધન સંમેય સંખ્યાઓને 0ની જમણી બાજુએ દર્શાવાશે અને ઋણ સંમેય સંખ્યાઓને 0ની ડાબી બાજુએ દર્શાવાશે.

$-\frac{1}{2}$ને તમે 0 ની કઈ બાજુએ દર્શાવશો ? ઋણ સંમેય સંખ્યા હોવાથી તેને શૂન્યની ડાબી બાજુએ દર્શાવી શકાય છે.

તમે જાણો છો કે સંખ્યારેખા પર પૂર્ણાંકોને દર્શાવવા માટે બધા ક્રમિક પૂર્ણાંકોને સમાન અંતરે દર્શાવવામાં આવે છે. તેમ જ, 1 અને –1 બંને 0 થી સમાન અંતરે આવેલા છે. એવી જ રીતે, 2 અને –2, 3 અને –3 બંને 0 થી સમાન અંતરે આવેલા હોય છે.

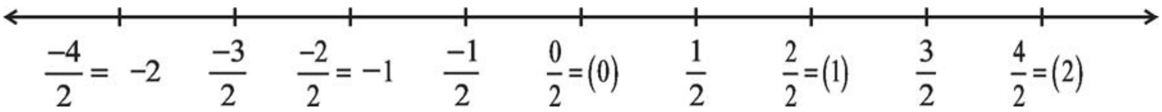
એવી જ રીતે, સંમેય સંખ્યાઓ $\frac{1}{2}$ અને $-\frac{1}{2}$ પણ 0 થી સમાન અંતરે આવેલી હશે.

આપણે જાણીએ છીએ કે સંમેય સંખ્યા $\frac{1}{2}$ને કેવી રીતે દર્શાવી શકાય છે. તેને 0 અને 1 બિંદુની વચ્ચે અડધા અંતરે દર્શાવી શકાય છે. આથી $-\frac{1}{2}$ને 0 અને -1 બિંદુની વચ્ચે અડધા અંતરે આવેલા બિંદુએ દર્શાવી શકાય.



$\frac{3}{2}$ ને સંખ્યારેખા પર કેવી રીતે દર્શાવી શકાય તે આપણે જાણીએ છીએ. એને 0ની જમણી બાજુ 1 અને 2ની વચ્ચે અડધા અંતરે દર્શાવી શકાય છે. ચાલો, હવે સંખ્યા રેખા પર $-\frac{3}{2}$ને દર્શાવીએ. એ 0ની ડાબી બાજુ એટલા જ અંતરે દર્શાવી શકાય કે જેટલું અંતર 0 થી $\frac{3}{2}$ વચ્ચેનું અંતર હોય.

ઘટતાં જતાં ક્રમમાં $\frac{-1}{2}, \frac{-2}{2} (= -1), \frac{-3}{2}, \frac{-4}{2} (= -2)$. આથી, આ દર્શાવે છે કે, $\frac{-3}{2}$ સંખ્યા -1 અને -2ની વચ્ચે છે. આમ, $\frac{-3}{2}$ સંખ્યા -1 અને -2 ની વચ્ચે અડધા અંતરે આવે છે.



એવી રીતે $\frac{-5}{2}$ અને $\frac{-7}{2}$ને દર્શાવો.

એવી જ રીતે, $-\frac{1}{3}$ એ શૂન્યથી ડાબી બાજુ એટલા જ અંતરે હશે કે જેટલા અંતરે $\frac{1}{3}$ શૂન્યથી જમણી બાજુ હશે. સંખ્યારેખા પર $-\frac{1}{3}$ને ઉપર જણાવ્યા પ્રમાણે દર્શાવી શકાય. એક વખત આપણને સંખ્યારેખા પર $-\frac{1}{3}$ને દર્શાવતાં આવડી જાય, તો આપણે $-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}$ અને એવી ઘણી સંખ્યાઓને સંખ્યારેખા પર નિરૂપિત કરી શકીએ. જુદા જુદા છેદવાળી બાકી બધી સંમેય સંખ્યાઓને પણ આવી જ રીતે નિરૂપિત કરી શકાય છે.

9.6 પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં સંમેય સંખ્યા (Rational Numbers in Standard Form)

સંમેય સંખ્યાઓ જુઓ $\frac{3}{5}, \frac{-5}{8}, \frac{2}{7}, \frac{-7}{11}$

આ બધી સંમેય સંખ્યાઓમાં છેદ ધન પૂર્ણાંક છે અને અંશ અને છેદમાં ફક્ત 1 એ એક જ સામાન્ય અવયવ છે. વધુમાં, આ સંમેય સંખ્યામાં ફક્ત અંશમાં જ ઋણ ચિહ્ન છે.

આવી સંમેય સંખ્યાઓ **પ્રમાણિત સ્વરૂપ**માં કહેવાય છે.

કોઈ સંમેય સંખ્યા ત્યારે પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં કહેવાય જ્યારે તેનો છેદ એ ધન પૂર્ણાંક હોય અને અંશ અને છેદમાં 1 સિવાય બીજા સામાન્ય અવયવ ન હોય.

જો કોઈ સંમેય સંખ્યા પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં ન હોય તો તેને પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં ફેરવી શકાય છે.

યાદ કરો કે અપૂર્ણાંકને તેના અતિ સંક્ષિપ્ત સ્વરૂપમાં ફેરવવા, આપણે તેના અંશ અને છેદને સમાન શૂન્યેતર ધન પૂર્ણાંકથી ભાગી દેતા હતા. આપણે આ રીતનો ઉપયોગ સંમેય સંખ્યાઓને તેના પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં દર્શાવવા માટે કરીશું.

ઉદાહરણ 1 $\frac{-45}{30}$ ને પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં ફેરવો.

ઉકેલ $\frac{-45}{30} = \frac{-45 \div 3}{30 \div 3} = \frac{-15}{10} = \frac{-15 \div 5}{10 \div 5} = \frac{-3}{2}$

આપણે બે વાર ભાગાકાર કર્યો પહેલી વખત 3 વડે અને બીજી વખત 5 વડે, એને આ પ્રમાણે પણ કરી શકાય.

$$\frac{-45}{30} = \frac{-45 \div 15}{30 \div 15} = \frac{-3}{2}$$

આ ઉદાહરણમાં જુઓ કે 15 એ 45 અને 30 નો ગુ.સા.અ. છે.

આમ, સંમેય સંખ્યાને પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં ફેરવવા માટે આપણે અંશ અને છેદને ઋણ ચિહ્ન જો હોય તો ધ્યાનમાં લીધા વગર તેના ગુ.સા.અ. વડે ભાગાકાર કરીએ. (શા માટે ઋણ ચિહ્નને ધ્યાનમાં ન લઈએ તેનું કારણ આગલા ધોરણમાં શીખીશું.)

છેદમાં ઋણ ચિહ્ન હોય તો તેને '– ગુ.સા.અ.' વડે ભાગવું.

ઉદાહરણ 2 પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં ફેરવો :

(i) $\frac{36}{-24}$ (ii) $\frac{-3}{-15}$

ઉકેલ

(i) 36 અને 24નો ગુ.સા.અ. 12 છે.

આમ, –12 વડે ભાગવામાં આવે તો પ્રમાણિત સ્વરૂપ મળે છે.

$$\frac{36}{-24} = \frac{36 \div (-12)}{(-24) \div (-12)} = \frac{-3}{2}$$

(ii) 3 અને 15નો ગુ.સા.અ. 3 છે.

આમ, $\frac{-3}{-15} = \frac{-3 \div (-3)}{-15 \div (-3)} = \frac{1}{5}$

પ્રયત્ન કરો

(i) $\frac{-18}{45}$ (ii) $\frac{-12}{18}$ ના પ્રમાણિત રૂપ મેળવો.

9.7 સંમેય સંખ્યાની સરખામણી (Comparison of Rational Numbers)

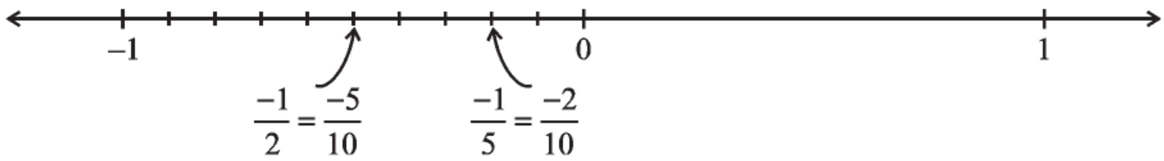
C6SJ8E

બે પૂર્ણાંક અથવા બે અપૂર્ણાંકની સરખામણી કેવી રીતે કરી શકાયએ આપણે જાણીએ છીએ અને તે પૈકીનો કયો નાનો અને કયો મોટો છે તેય જાણીએ છીએ. હવે આપણે જોઈએ કે સંમેય સંખ્યાની સરખામણી કેવી રીતે કરી શકાય.

- $\frac{2}{3}$ અને $\frac{5}{7}$ આ બે ધન સંમેય સંખ્યાની સરખામણી એવી જ રીતે કરી શકાય જે રીતે આપણે પહેલાં અપૂર્ણાંક માટે કર્યું.
- મેરીએ બે ઋણ સંમેય સંખ્યાઓ $-\frac{1}{2}$ અને $-\frac{1}{5}$ની સરખામણી સંખ્યારેખા દ્વારા કરી. તે જાણતી હતી કે જે પૂર્ણાંક જમણી બાજુ આવે તે મોટો પૂર્ણાંક છે.

ઉદાહરણ તરીકે, સંખ્યારેખા પર પૂર્ણાંક 5 પૂર્ણાંક 2ની જમણી બાજુ છે અને $5 > 2$. સંખ્યારેખા પર પૂર્ણાંક -2 પૂર્ણાંક -5ની જમણી બાજુ છે અને $-2 > -5$.

તેણે સંમેય સંખ્યાઓ માટે પણ આ પદ્ધતિનો ઉપયોગ કર્યો. તેને ખબર હતી કે સંખ્યારેખા પર સંમેય સંખ્યા કેવી રીતે દર્શાવી શકાય છે. તેણે $-\frac{1}{2}$ અને $-\frac{1}{5}$ ને આ પ્રમાણે દર્શાવ્યા.

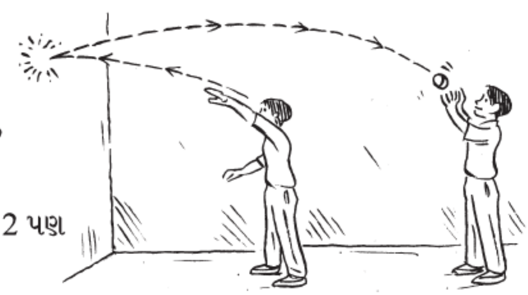


શું તેણે બંને બિંદુઓ સાચાં દર્શાવ્યાં ? તેણે કેમ અને કેવી રીતે $-\frac{1}{2}$ને $-\frac{5}{10}$ અને $-\frac{1}{5}$ ને $-\frac{2}{10}$ માં બદલ્યા ? તેણે શોધ્યું કે $-\frac{1}{5}$ એ $-\frac{1}{2}$ ની જમણી બાજુ છે. આમ, $-\frac{1}{5} > -\frac{1}{2}$ અથવા $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{5}$.

શું તમે $-\frac{3}{4}$ અને $-\frac{2}{3}$ ની સરખામણી કરી શકો ? તથા $-\frac{1}{3}$ અને $-\frac{1}{5}$ની સરખામણી કરી શકો ?

આપણે અપૂર્ણાંકના અભ્યાસ પરથી જાણીએ છીએ કે $\frac{1}{5} < \frac{1}{2}$ છે અને મેરીએ $-\frac{1}{2}$ અને $-\frac{1}{5}$ માટે શું પ્રાપ્ત કર્યું ? શું આ તેનાથી સંપૂર્ણ વિરુદ્ધ ન હતું ?

તમે જાણશો કે, $\frac{1}{2} > \frac{1}{5}$ પરંતુ $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{5}$ છે.



શું તમે $-\frac{3}{4}$, $-\frac{2}{3}$ અને $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{5}$ માટે પણ આવું જ કહી શકો ?

મેરીને યાદ આવ્યું કે તેમણે પૂર્ણાંકોમાં $4 > 3$ પણ $-4 < -3$, $5 > 2$ પણ $-5 < -2$ વગેરેનો અભ્યાસ કર્યો હતો.

- ઋણ સંમેય સંખ્યાઓનાં યુગ્મોની સ્થિતિ પણ એવા જ પ્રકારની હોય છે. બે ઋણ સંમેય સંખ્યાની સરખામણી કરવા માટે આપણે તેનાં ચિહ્નોને ધ્યાનમાં લેતાં નથી અને પછી તેમનો ક્રમ ઉલટાવીએ છીએ.

ઉદાહરણ તરીકે, $-\frac{7}{5}$ અને $-\frac{5}{3}$ ની સરખામણી કરવા માટે પહેલાં આપણે $\frac{7}{5}$ અને $\frac{5}{3}$ની સરખામણી કરીએ.

આપણને $\frac{7}{5} < \frac{5}{3}$ મળે છે અને અનુમાન મેળવીએ કે $-\frac{7}{5} > -\frac{5}{3}$ છે.

આવા પાંચ યુગ્મો લઈ તેમની સરખામણી કરો.

$-\frac{3}{8}$ કે $-\frac{2}{7}$ આમાંથી કઈ સંખ્યા મોટી છે ? $-\frac{4}{3}$ કે $-\frac{3}{2}$ આમાંથી કઈ સંખ્યા મોટી છે ?

- ઋણ અને ધન સંમેય સંખ્યાની સરખામણી સ્પષ્ટ છે. સંખ્યારેખા પર ઋણ સંમેય સંખ્યા 0ની ડાબી બાજુ હોય છે તથા ધન સંમેય સંખ્યા 0ની જમણી બાજુએ હોય છે. ઋણ સંમેય સંખ્યાઓ હંમેશા ધન સંમેય સંખ્યાઓ કરતાં નાની હોય છે.

  આમ, $-\frac{2}{7} < \frac{1}{2}$.

- સંમેય સંખ્યા $\frac{-3}{-5}$ અને $\frac{-2}{-7}$ ની સરખામણી કરવા માટે તેને પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં ફેરવી પછી તેની સરખામણી કરો.

ઉદાહરણ 3 શું $\frac{4}{-9}$ અને $\frac{-16}{36}$ એ સરખી સંમેય સંખ્યા દર્શાવે છે ?

ઉકેલ હા, કારણ કે $\frac{4}{-9} = \frac{4\times(-4)}{(-9)\times(-4)} = \frac{-16}{36}$ તથા $\frac{-16}{36} = \frac{-16\div-4}{36\div-4} = \frac{4}{-9}$.

9.8 બે સંમેય સંખ્યાની વચ્ચે સંમેય સંખ્યાઓ

રેશમા 3 અને 10ની વચ્ચે પૂર્ણ સંખ્યાની ગણતરી કરવા ઈચ્છતી હતી. આગળના ધોરણમાં શીખી હતી તે તેને બરોબર યાદ હતું કે 3 અને 10ની વચ્ચે 6 પૂર્ણ સંખ્યા હોય. એવી જ રીતે તે –3 અને 3ની વચ્ચેની બધી જ પૂર્ણાંક સંખ્યા યાદ કરવા માંગતી હતી. –3 અને 3ની વચ્ચે પૂર્ણાંક –2, –1, 0, 1, 2 આવે. આમ, –3 અને 3ની વચ્ચે 5 પૂર્ણાંક સંખ્યા આવે.

C72FA2

શું –3 અને –2 ની વચ્ચે કોઈ પૂર્ણાંક હોય શકે ? ના, –3 અને –2 ની વચ્ચે કોઈ પૂર્ણાંક નથી. બે ક્રમિક પૂર્ણાંકની વચ્ચે આવતાં પૂર્ણાંકની સંખ્યા 0 હોય છે.

આમ, આપણે જોયું કે બે પૂર્ણાંકોની વચ્ચે આવતાં પૂર્ણાંકોની સંખ્યા મર્યાદિત હોય છે.

શું સંમેય સંખ્યાઓમાં પણ આવું બની શકે ?

રેશમાએ બે સંમેય સંખ્યા $\frac{-3}{5}$ અને $\frac{-1}{3}$ લીધી.

તેણે તેને સમાન છેદ વાળી સંમેય સંખ્યામાં ફેરવી નાખી.

તેથી, $\frac{-3}{5}=\frac{-9}{15}$ અને $\frac{-1}{3}=\frac{-5}{15}$

આપણી પાસે, $\frac{-9}{15}<\frac{-8}{15}<\frac{-7}{15}<\frac{-6}{15}<\frac{-5}{15}$ અથવા $\frac{-3}{5}<\frac{-8}{15}<\frac{-7}{15}<\frac{-6}{15}<\frac{-1}{3}$

આવી રીતે રેશમા $\frac{-3}{5}$ અને $\frac{-1}{3}$ ની વચ્ચે સંમેય સંખ્યાઓ $\frac{-8}{15}<\frac{-7}{15}<\frac{-6}{15}$ મેળવી શકી.

શું $\frac{-3}{5}$ અને $\frac{-1}{3}$ની વચ્ચે આવતી સંમેય સંખ્યાઓ માત્ર $\frac{-8}{15},\frac{-7}{15},\frac{-6}{15}$ છે ?

આપણી પાસે, $\frac{-3}{5}=\frac{-18}{30}$ અને $\frac{-8}{15}=\frac{-16}{30}$

અને $\frac{-18}{30}<\frac{-17}{30}<\frac{-16}{30}$. તેથી, $\frac{-3}{5}<\frac{-17}{30}<\frac{-8}{15}$

આથી, $\frac{-3}{5}<\frac{-17}{30}<\frac{-8}{15}<\frac{-7}{15}<\frac{-6}{15}<\frac{-1}{3}$

પરિણામે, આપણે $\frac{-3}{5}$ અને $\frac{-1}{3}$ ની વચ્ચે વધુ એક સંમેય સંખ્યા મેળવી શક્યા. આ જ રીતે, આપણે બે ભિન્ન સંમેય સંખ્યાની વચ્ચે ઘણી સંમેય સંખ્યાઓ ઉમેરી શકીએ છીએ.

ઉદાહરણ તરીકે, $\frac{-3}{5}=\frac{-3\times 30}{5\times 30}=\frac{-90}{150}$ અને $\frac{-1}{3}=\frac{-1\times 50}{3\times 50}=\frac{-50}{150}$

આપણે $\frac{-90}{150}$ અને $\frac{-50}{150}$ ની વચ્ચે એટલે કે, $\frac{-3}{5}$ અને $\frac{-1}{3}$ ની વચ્ચે 39 સંમેય સંખ્યા $\left(\frac{-89}{150},\ldots,\frac{-51}{150}\right)$ મેળવી શકીએ છીએ. તમે બધાં એ જાણશો કે આ યાદી નો કોઈ અંત નથી.

તમે $\frac{-5}{3}$ અને $\frac{-8}{7}$ ની વચ્ચે આવતી પાંચ સંમેય સંખ્યાની યાદી બનાવી શકશો ?

આપણે કોઈ પણ બે સંમેય સંખ્યાની વચ્ચેની અનંત સંમેય સંખ્યાઓ શોધી શકીએ છીએ.

પ્રયત્ન કરો

$\frac{-5}{7}$ અને $\frac{-3}{8}$ ની વચ્ચે આવતી પાંચ સંમેય સંખ્યા શોધો.

ઉદાહરણ 4 –2 અને –1 ની વચ્ચે ત્રણ સંમેય સંખ્યાઓ લખો.

ઉકેલ ચાલો –1 અને –2ને છેદમાં 5 આવે તેવી સંમેય સંખ્યાઓના રૂપમાં લખીએ. (શા માટે ?)

આપણી પાસે, $-1 = \frac{-5}{5}$ અને $-2 = \frac{-10}{5}$

આથી, $\frac{-10}{5} < \frac{-9}{5} < \frac{-8}{5} < \frac{-7}{5} < \frac{-6}{5} < \frac{-5}{5}$ અથવા $-2 < \frac{-9}{5} < \frac{-8}{5} < \frac{-7}{5} < \frac{-6}{5} < -1$

–2 અને –1 ની વચ્ચે ત્રણ સંમેય સંખ્યા $\frac{-9}{5}, \frac{-8}{5}, \frac{-7}{5}$ હશે.

($\frac{-9}{5}, \frac{-8}{5}, \frac{-7}{5}, \frac{-6}{5}$ માંથી કોઈ પણ ત્રણ સંખ્યા લો.)

ઉદાહરણ 5 પેટર્ન મુજબ વધુ ચાર સંખ્યાઓ લખો.

$$\frac{-1}{3}, \frac{-2}{6}, \frac{-3}{9}, \frac{-4}{12}, \ldots$$

ઉકેલ અહીં,

$$\frac{-2}{6} = \frac{-1\times2}{3\times2}, \frac{-3}{9} = \frac{-1\times3}{3\times3}, \frac{-4}{12} = \frac{-1\times4}{3\times4}$$

અથવા, $$\frac{-1\times1}{3\times1} = \frac{-1}{3}, \frac{-1\times2}{3\times2} = \frac{-2}{6}, \frac{-1\times3}{3\times3} = \frac{-3}{9}, \frac{-1\times4}{3\times4} = \frac{-4}{12}$$

આમ, આપણે આ સંખ્યાઓના સ્વરૂપનું નિરીક્ષણ કરીએ.

અન્ય સંખ્યાઓ $$\frac{-1\times5}{3\times5} = \frac{-5}{15}, \frac{-1\times6}{3\times6} = \frac{-6}{18}, \frac{-1\times7}{3\times7} = \frac{-7}{21}$$

સ્વાધ્યાય 9.1

1. નિમ્નલિખિત સંમેય સંખ્યાઓની વચ્ચે આવતી પાંચ સંમેય સંખ્યાઓ લખો :

   (i) –1 અને 0 (ii) –2 અને –1 (iii) $\frac{-4}{5}$ અને $\frac{-2}{3}$ (iv) $-\frac{1}{2}$ અને $\frac{2}{3}$

2. પેટર્નમાં વધુ ચાર સંમેય સંખ્યાઓ લખો.

   (i) $\frac{-3}{5}, \frac{-6}{10}, \frac{-9}{15}, \frac{-12}{20}, \ldots$ (ii) $\frac{-1}{4}, \frac{-2}{8}, \frac{-3}{12}, \ldots$

(iii) $\frac{-1}{6}, \frac{2}{-12}, \frac{3}{-18}, \frac{4}{-24}, \ldots$ (iv) $\frac{-2}{3}, \frac{2}{-3}, \frac{4}{-6}, \frac{6}{-9}, \ldots$

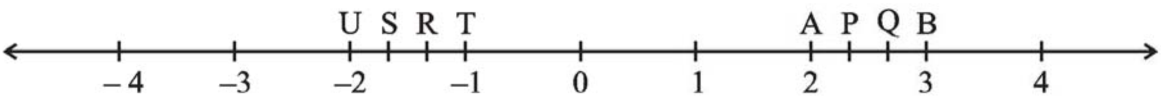
3. નીચેના માટે ચાર સમાન સંમેય સંખ્યા લખો.

(i) $\frac{-2}{7}$ (ii) $\frac{5}{-3}$ (iii) $\frac{4}{9}$

4. સંખ્યારેખા દોરો અને નીચે આપેલી સંમેય સંખ્યાઓનું તેની પર નિરૂપણ કરો.

(i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{-5}{8}$ (iii) $\frac{-7}{4}$ (iv) $\frac{7}{8}$

5. બિંદુઓ P, Q, R, S, T, U, A અને B સંખ્યારેખા પર એવી રીતે આવેલા છે કે જ્યાં TR = RS = SU અને AP = PQ = QB થાય. P, Q, R અને S વડે દર્શાવાતી સંમેય સંખ્યા લખો.



6. નીચે આપેલી જોડીઓમાંથી કઈ જોડી સમાન સંમેય સંખ્યાઓનું નિરૂપણ કરે છે ?

(i) $\frac{-7}{21}$ અને $\frac{3}{9}$ (ii) $\frac{-16}{20}$ અને $\frac{20}{-25}$ (iii) $\frac{-2}{-3}$ અને $\frac{2}{3}$

(iv) $\frac{-3}{5}$ અને $\frac{-12}{50}$ (v) $\frac{8}{-5}$ અને $\frac{-24}{15}$ (vi) $\frac{1}{3}$ અને $\frac{-1}{9}$

(vii) $\frac{-5}{-9}$ અને $\frac{5}{-9}$

7. નીચે આપેલી સંમેય સંખ્યાઓને અતિ સંક્ષિપ્ત સ્વરૂપે ફરીથી લખો.

(i) $\frac{-8}{6}$ (ii) $\frac{25}{45}$ (iii) $\frac{-44}{72}$ (iv) $\frac{-8}{10}$

8. $>$, $<$ અને $=$ માંથી યોગ્ય સંકેત પસંદ કરી ખાલી જગ્યામાં ભરો.

(i) $\frac{-5}{7} \square \frac{2}{3}$ (ii) $\frac{-4}{5} \square \frac{-5}{7}$ (iii) $\frac{-7}{8} \square \frac{14}{-16}$

(iv) $\frac{-8}{5} \square \frac{-7}{4}$ (v) $\frac{1}{-3} \square \frac{-1}{4}$ (vi) $\frac{5}{-11} \square \frac{-5}{11}$

(vii) $0 \square \frac{-7}{6}$

9. નીચેના દરેકમાં કઈ સંખ્યા મોટી છે ?

(i) $\frac{2}{3}, \frac{5}{2}$ (ii) $\frac{-5}{6}, \frac{-4}{3}$ (iii) $\frac{-3}{4}, \frac{2}{-3}$

(iv) $\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}$ (v) $-3\frac{2}{7}, -3\frac{4}{5}$

10. નીચે આપેલી સંમેય સંખ્યાઓને ચડતા ક્રમમાં લખો.

(i) $\frac{-3}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}$ (ii) $\frac{1}{3}, \frac{-2}{9}, \frac{-4}{3}$ (iii) $\frac{-3}{7}, \frac{-3}{2}, \frac{-3}{4}$

9.9 સંમેય સંખ્યાઓ પરની ક્રિયાઓ

તમે જાણો છો કે પૂર્ણાંક અને અપૂર્ણાંકોના સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકાર કેવી રીતે કરવા. ચાલો, હવે સંમેય સંખ્યાઓ પર આ મૂળભૂત ક્રિયાઓનું અધ્યયન કરીએ.

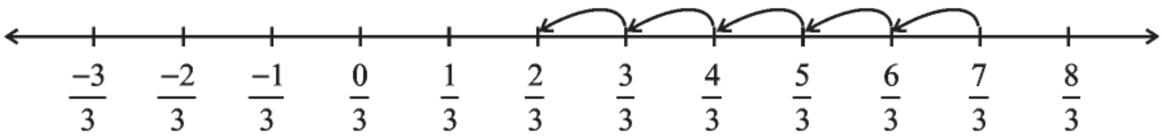
C7BBBP

9.9.1 સરવાળો (Addition)

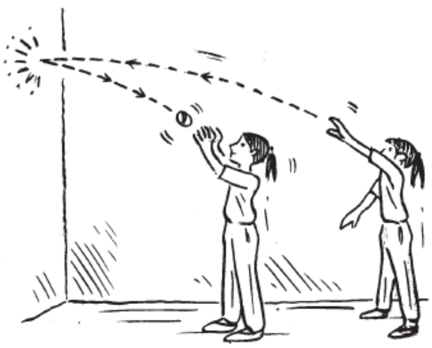
- ચાલો આપણે સમાન છેદ ધરાવતી બે સંમેય સંખ્યાઓ $\frac{7}{3}$ અને $\frac{-5}{3}$ નો સરવાળો કરીએ.

આપણે $\frac{7}{3}+\left(\frac{-5}{3}\right)$ નો જવાબ શોધીએ.

જે સંખ્યારેખા પર મળે છે.



બે ક્રમિક બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર $\frac{1}{3}$ છે. હવે, $\frac{7}{3}$માં $\frac{-5}{3}$ ઉમેરવાનો અર્થ એ થાય છે કે $\frac{7}{3}$ ની ડાબી બાજુ 5 કૂદકા મારવા, આપણે ક્યાં પહોંચ્યાં ? આપણે $\frac{2}{3}$ પર પહોંચ્યાં.



આમ, $\frac{7}{3}+\left(\frac{-5}{3}\right)=\frac{2}{3}$

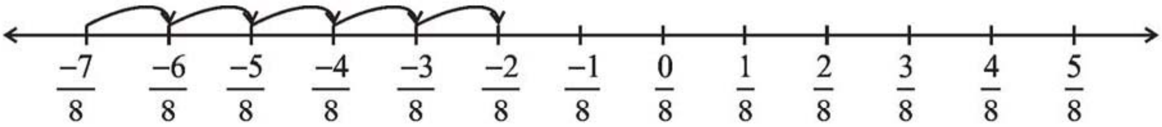
ચાલો, હવે આ રીતે કરવાનો પ્રયત્ન કરીએ,

$$\frac{7}{3}+\left(\frac{-5}{3}\right)=\frac{7+(-5)}{3}=\frac{2}{3}$$

આપણને અહીં સમાન જવાબ જોવા મળે છે.

$\frac{6}{5}+\frac{(-2)}{5}, \frac{3}{7}+\frac{(-5)}{7}$ ને બંને રીતે ચકાસો અને સમાન ઉકેલ મળે છે કે નહિ તે તપાસો.

આ રીતે $\frac{-7}{8}+\frac{5}{8}$ થઈ શકશે.



તમે શું મેળવ્યું ?

વળી $\frac{-7}{8}+\frac{5}{8}=\frac{-7+5}{8}=$? બંને કિંમત સરખી છે ?

પ્રયત્ન કરો

$\frac{-13}{7}+\frac{6}{7}, \frac{19}{5}+\left(\frac{-7}{5}\right)$ શોધો.

આ રીતે આપણે જોઈએ છીએ કે સમાન છેદવાળી સંમેય સંખ્યાઓનો સરવાળો કરતી વખતે આપણે છેદને અચળ રાખી અંશોનો સરવાળો કરી લઈએ છીએ.

અહીં, $$\frac{-11}{5}+\frac{7}{5}=\frac{-11+7}{5}=\frac{-4}{5}$$

- આપણે ભિન્ન છેદવાળી બે સંમેય સંખ્યાઓને કેવી રીતે ઉમેરી શકીએ ? અપૂર્ણાંકોની જેમ પહેલાં આપણે તેમના છેદની સંખ્યાઓનો લ.સા.અ. લઈશું. હવે, આ લ.સા.અ. જેટલો છેદ મળે તેવી આપેલ સંમેય સંખ્યાઓને સમાન સંમેય સંખ્યા મેળવીશું. પછી, તે બે સંમેય સંખ્યાઓનો સરવાળો કરીશું.

ઉદાહરણ તરીકે, $\frac{-7}{5}$ અને $\frac{-2}{3}$ નો આપણે અહીં સરવાળો કરીએ.

5 અને 3નો લ.સા.અ. 15 થશે.

તો, $\frac{-7}{5}=\frac{-21}{15}$ અને $\frac{-2}{3}=\frac{-10}{15}$

અહીં, $\frac{-7}{5}+\frac{(-2)}{3}=\frac{-21}{15}+\frac{(-10)}{15}=\frac{-31}{15}$

પ્રયત્ન કરો

શોધો :

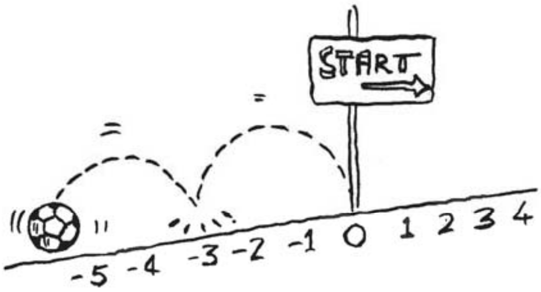
(i) $\frac{-3}{7}+\frac{2}{3}$

(ii) $\frac{-5}{6}+\frac{-3}{11}$

વિરોધી સંખ્યા :

$\frac{-4}{7}+\frac{4}{7}=$? શું હોઈ શકે ?

$\frac{-4}{7}+\frac{4}{7}=\frac{-4+4}{7}=0$ તેમજ, $\frac{4}{7}+\left(\frac{-4}{7}\right)=0$



આ રીતે, $\frac{-2}{3}+\frac{2}{3}=0=\frac{2}{3}+\left(\frac{-2}{3}\right)$

આવા પૂર્ણાંકોના કિસ્સામાં આપણે જાણીએ છીએ કે –2 નો વિરોધી ઘટક 2 થાય અને 2 નો વિરોધી ઘટક –2 થાય છે.

સંમેય સંખ્યાઓ માટે આપણે કહી શકીએ કે, $\frac{4}{7}$ નો વિરોધી $\frac{-4}{7}$ અને $\frac{-4}{7}$ નો વિરોધી $\frac{4}{7}$ છે.

એવી જ રીતે $\frac{-2}{3}$ નો વિરોધી $\frac{2}{3}$ અને $\frac{2}{3}$ નો વિરોધી ઘટક $\frac{-2}{3}$ થશે.

પ્રયત્ન કરો

$\frac{-3}{9}$, $\frac{-9}{11}$, $\frac{5}{7}$ નો વિરોધી ઘટક શો થશે ?

ઉદાહરણ 6 સતપાલ કોઈ એક સ્થાન P પાસેથી પૂર્વ દિશામાં $\frac{2}{3}$ કિમી ચાલે છે અને ત્યાંથી $1\frac{5}{7}$ કિમી પશ્ચિમ દિશામાં જાય છે હવે તેનું P થી સ્થાન ક્યાં હશે ?

ઉકેલ ચાલો, પૂર્વ દિશામાં કાપેલાં અંતરને ધન ચિહ્‌ન વડે દર્શાવીએ જેથી પશ્ચિમ દિશામાં કાપેલા, અંતરને ઋણ ચિહ્‌ન વડે દર્શાવી શકાય.

આ રીતે બિંદુ P થી સતપાલે કાપેલું અંતર,

$$\frac{2}{3}+\left(-1\frac{5}{7}\right)=\frac{2}{3}+\frac{(-12)}{7}=\frac{2\times7}{3\times7}+\frac{(-12)\times3}{7\times3}$$

$$=\frac{14-36}{21}=\frac{-22}{21}=-1\frac{1}{21}$$

અહીં મૂલ્ય ઋણ મળે છે તેથી સતપાલ P થી પશ્ચિમ દિશામાં $1\frac{1}{21}$ કિમીના અંતરે છે.

9.9.2 બાદબાકી (Subtraction)

સવિતાએ બે સંમેય સંખ્યાઓ $\frac{5}{7}$ અને $\frac{3}{8}$ વચ્ચેનો તફાવત આ રીતે મેળવ્યો,

$$\frac{5}{7}-\frac{3}{8}=\frac{40-21}{56}=\frac{19}{56}$$

ફરીદા જાણતી હતી કે બે પૂર્ણાંક a અને b માટે $a-b=a+(-b)$ લખી શકાય.

તેણે આ સંમેય સંખ્યા માટે પણ કર્યું અને મેળવ્યું કે, $\frac{5}{7} - \frac{3}{8} = \frac{5}{7} + \frac{(-3)}{8} = \frac{19}{56}$

બંને ને સમાન તફાવત મળે છે.

બંને રીતો વડે $\frac{7}{8} - \frac{5}{9}, \frac{3}{11} - \frac{8}{7}$ નો ઉકેલ મેળવવાનો પ્રયત્ન કરો.

શું બંને રીતે સમાન ઉત્તર મળશે ?

અહીં આપણે કહી શકીએ કે બે સંમેય સંખ્યાઓની બાદબાકી કરવા માટે આપણે જે સંખ્યા બાદ કરવાની હોય તેનો વિરોધી ઘટક લઈ તેને પહેલી સંખ્યામાં ઉમેરીએ.

એવી રીતે, $1\frac{2}{3} - 2\frac{4}{5} = \frac{5}{3} - \frac{14}{5} = \frac{5}{3} + (\frac{14}{5}$ નો વિરોધી ઘટક$) = \frac{5}{3} + \frac{(-14)}{5}$

$= \frac{-17}{15} = -1\frac{2}{15}.$

પ્રયત્ન કરો

શોધો :

(i) $\frac{7}{9} - \frac{2}{5}$ (ii) $2\frac{1}{5} - \frac{(-1)}{3}$

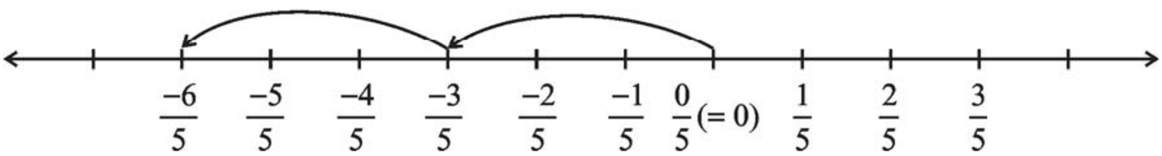
$\frac{2}{7} - \left(\frac{-5}{6}\right)$ નો જવાબ શું આવી શકે ?

$\frac{2}{7} - \left(\frac{-5}{6}\right) = \frac{2}{7} + (\frac{-5}{6}$ નો વિરોધી ઘટક$) = \frac{2}{7} + \frac{5}{6} = \frac{47}{42} = 1\frac{5}{42}$

9.9.3 ગુણાકાર (Multiplication)

ચાલો તો સંમેય સંખ્યા $\frac{-3}{5}$ નો 2 વડે ગુણાકાર કરવો છે એટલે કે $\frac{-3}{5} \times 2$ ની કિંમત શોધવી છે.

સંખ્યારેખા પર તેમનો અર્થ એવો થાય, 0ની ડાબી બાજુએ બે ક્રમ $\frac{3}{5}$ જેટલું આગળ વધવું.



આપણે ક્યાં આવ્યાં ? તો આપણે $\frac{-6}{5}$ પર પહોંચ્યાં.

તો ચાલો એને જ અપૂર્ણાંકની રીતે શોધવાનો પ્રયત્ન કરીએ.

$$\frac{-3}{5} \times 2 = \frac{-3 \times 2}{5} = \frac{-6}{5}$$

આપણે તે જ સંમેય સંખ્યા પર પહોંચી ગયાં.

બંને રીતના ઉપયોગ વડે $\frac{-4}{7} \times 3, \frac{-6}{5} \times 4$ ઉકેલો. તમે શું નોંધ્યું ?

અહીં આપણે તારવ્યું કે જ્યારે એક સંમેય સંખ્યાને કોઈ એક ધન પૂર્ણાંક સાથે ગુણાકાર કરતાં આપણે અંશને તે પૂર્ણાંક સાથે ગુણાકાર કરી લઈએ અને છેદને એમ જ (અચળ) રાખીએ છીએ.

ચાલો, તો હવે એક સંમેય સંખ્યાને ઋણ પૂર્ણાંક સાથે ગુણીએ,

$$\frac{-2}{9} \times -5 = \frac{-2 \times (-5)}{9} = \frac{10}{9}$$

પ્રયત્ન કરો

જવાબ શો આવી શકે ?

(i) $\frac{-3}{5} \times 7$ (ii) $\frac{-6}{5} \times (-2)$

યાદ રાખો, -5 ને $\frac{-5}{1}$ પણ લખી શકાય.

અહીં, $\frac{-2}{9} \times \frac{-5}{1} = \frac{10}{9} = \frac{-2 \times (-5)}{9 \times 1}$

આવી જ રીતે,

$$\frac{3}{11} \times (-2) = \frac{3 \times (-2)}{11 \times 1} = \frac{-6}{11}$$

આ અવલોકનને આધારે,આપણે આ તારણ કાઢી શકીએ, $\frac{-3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{-3 \times 5}{8 \times 7} = \frac{-15}{56}$

એવી રીતે આપણે અપૂર્ણાંકો માટે પણ કર્યું હતું. બે સંમેય સંખ્યાઓનો ગુણાકાર નીચે દર્શાવેલ રીતે કરી શકાય.

પ્રયત્ન કરો

શોધો :

(i) $\frac{-3}{4} \times \frac{1}{7}$

(ii) $\frac{2}{3} \times \frac{-5}{9}$

પગથિયું 1 બંને સંમેય સંખ્યાઓના અંશનો ગુણાકાર કરો.

પગથિયું 2 બંને સંખ્યાઓના છેદનો ગુણાકાર કરો.

પગથિયું 3 ગુણનફળને $\dfrac{\text{પગથિયું 1 માંથી પ્રાપ્ત પરિણામ}}{\text{પગથિયું 2 માંથી પ્રાપ્ત પરિણામ}}$ ના રૂપમાં લખો.

અહીં, $\frac{-3}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{-3 \times 2}{5 \times 7} = \frac{-6}{35}$

તે જ રીતે, $\frac{-5}{8} \times \frac{-9}{7} = \frac{-5 \times (-9)}{8 \times 7} = \frac{45}{56}$

9.9.4 ભાગાકાર

આગળ આપણે અપૂર્ણાંકોના વ્યસ્ત માટેનો અભ્યાસ કર્યો. $\frac{2}{7}$ નો વ્યસ્ત શું થાય ? તે $\frac{7}{2}$ થશે. આપણે આ વિચારને વિસ્તારી શૂન્યેતર સંમેય સંખ્યાઓના વ્યસ્ત માટે લાગુ પાડીએ.

$\frac{-2}{7}$ નો વ્યસ્ત $\frac{7}{-2}$ (એટલે કે $\frac{-7}{2}$) થશે; $\frac{-3}{5}$ નો વ્યસ્ત $\frac{-5}{3}$ થશે.

પ્રયત્ન કરો

$\frac{-6}{11}$ અને $\frac{-8}{5}$ ની વ્યસ્ત સંખ્યા કઈ થશે ?

વ્યસ્તનો ગુણાકાર

કોઈ સંખ્યાનો તેમના વ્યસ્ત સાથેનો ગુણાકાર હંમેશા 1 થાય છે.

ઉદાહરણ તરીકે, $\frac{-4}{9} \times \left(\frac{-4}{9}\text{નો વ્યસ્ત}\right)$

$$= \frac{-4}{9} \times \frac{-9}{4} = 1$$

તેવી જ રીતે, $\frac{-6}{13} \times \frac{-13}{6} = 1$

થોડાં બીજાં ઉદાહરણો દ્વારા આ અવલોકનની પુષ્ટિ કરીએ.

સવિતા એક સંમેય સંખ્યા $\frac{4}{9}$નો $\frac{-5}{7}$ વડે ભાગાકાર કરે છે તો,

$$\frac{4}{9} \div \frac{-5}{7} = \frac{4}{9} \times \frac{7}{-5} = \frac{-28}{45}$$

તેણે અપૂર્ણાંકોના વ્યસ્ત માટેની રીત અપનાવી.

અર્પિતે પહેલાં $\frac{4}{9}$ને $\frac{5}{7}$ વડે ભાગતાં $\frac{28}{45}$ મેળવ્યાં.

અંતમાં તેણે કહ્યું કે $\frac{4}{9} \div \frac{-5}{7} = \frac{-28}{45}$. તેણે એવું કઈ રીતે મેળવ્યું ?

તેણે ઋણ ચિહ્ન છોડીને બંનેને અપૂર્ણાંકની રીતે ભાગાકાર કરી પરિણામની સાથે ઋણ ચિહ્ન જોડી દીધું.

બંનેએ સરખો ઉત્તર $\frac{-28}{45}$ મેળવ્યો. $\frac{2}{3}$ નો $\frac{-5}{7}$ વડે ભાગાકાર બંને પ્રક્રિયા દ્વારા ઉકેલો અને બંનેમાં સમાન ઉકેલ મળે કે કેમ તે ચકાસો.

આ બતાવે છે કે એક સંમેય સંખ્યાને અન્ય શૂન્યેતર સંમેય સંખ્યા વડે ભાગાકાર કરવા માટે આપણે તે સંમેય સંખ્યાને અન્ય સંમેય સંખ્યાના વ્યસ્ત સાથે ગુણીએ છીએ.

આવી રીતે, $\frac{6}{-5} \div \frac{-2}{3} = \frac{6}{-5} \times \left(\frac{-2}{3}\right)$ નો વ્યસ્ત $= \frac{6}{-5} \times \frac{3}{-2} = \frac{18}{10}$

પ્રયત્ન કરો

શોધો :

(i) $\frac{2}{3} \times \frac{-7}{8}$ (i) $\frac{-6}{7} \times \frac{5}{7}$

સ્વાધ્યાય 9.2

1. સરવાળો શોધો :

(i) $\frac{5}{4} + \left(\frac{-11}{4}\right)$ (ii) $\frac{5}{3} + \frac{3}{5}$ (iii) $\frac{-9}{10} + \frac{22}{15}$

(iv) $\frac{-3}{-11} + \frac{5}{9}$ (v) $\frac{-8}{19} + \frac{(-2)}{57}$ (vi) $\frac{-2}{3} + 0$

(vii) $-2\frac{1}{3} + 4\frac{3}{5}$

2. શોધો :

(i) $\frac{7}{24} - \frac{17}{36}$ (ii) $\frac{5}{63} - \left(\frac{-6}{21}\right)$ (iii) $\frac{-6}{13} - \left(\frac{-7}{15}\right)$

(iv) $\frac{-3}{8} - \frac{7}{11}$ (v) $-2\frac{1}{9} - 6$

3. ગુણાકાર શોધો :

(i) $\frac{9}{2} \times \left(\frac{-7}{4}\right)$ (ii) $\frac{3}{10} \times (-9)$ (iii) $\frac{-6}{5} \times \frac{9}{11}$

(iv) $\frac{3}{7} \times \left(\frac{-2}{5}\right)$ (v) $\frac{3}{11} \times \frac{2}{5}$ (vi) $\frac{3}{-5} \times \frac{-5}{3}$

4. કિંમત શોધો :

(i) $(-4) \div \frac{2}{3}$ (ii) $\frac{-3}{5} \div 2$ (iii) $\frac{-4}{5} \div (-3)$

(iv) $\frac{-1}{8} \div \frac{3}{4}$ (v) $\frac{-2}{13} \div \frac{1}{7}$ (vi) $\frac{-7}{12} \div \left(\frac{-2}{13}\right)$

(vii) $\frac{3}{13} \div \left(\frac{-4}{65}\right)$

આપણે શી ચર્ચા કરી ?

1. જે સંખ્યાને $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય, જ્યાં p અને q પૂર્ણાંકો તેમજ $q \neq 0$ થાય તેને સંમેય સંખ્યા કહે છે. સંખ્યાઓ $\frac{-2}{7}, \frac{3}{8}, 3$ વગેરે સંમેય સંખ્યાઓ છે.
2. બધા પૂર્ણાંક અને અપૂર્ણાંક એ સંમેય સંખ્યા છે.
3. જો કોઈ સંમેય સંખ્યાના અંશ અને છેદને શૂન્યેતર પૂર્ણાંક વડે ગુણવામાં કે ભાગવામાં આવે તો આપણને એક સંમેય સંખ્યા મળે છે જેને આપેલી સંમેય સંખ્યાઓની સમાન સંમેય સંખ્યા કહેવાય છે. ઉદાહરણ તરીકે $\frac{-3}{7} = \frac{-3 \times 2}{7 \times 2} = \frac{-6}{14}$ અહીં આપણે કહી શકીએ કે $\frac{-6}{14}$ એ $\frac{-3}{7}$ ને સમાન છે.

   આગળ નોંધીએ તો $\frac{-6}{14} = \frac{-6 \div 2}{14 \div 2} = \frac{-3}{7}$.
4. સંમેય સંખ્યાઓને ધન અને ઋણ સંમેય સંખ્યાઓનાં રૂપમાં વર્ગીકૃત કરી શકાય છે. જો અંશ અને છેદ બંને ધન પૂર્ણાંક હોય અથવા બંને ઋણ પૂર્ણાંક હોય તો તે સંખ્યા ધન સંમેય સંખ્યા કહેવાય છે. જો અંશ અથવા છેદ બેમાંથી કોઈ પણ એક ઋણ પૂર્ણાંક હોય તો તે સંખ્યાને ઋણ સંમેય સંખ્યા કહે છે.

   દા.ત. : $\frac{3}{8}$ એક ધન સંમેય સંખ્યા છે તેમજ $\frac{-8}{9}$ એ ઋણ સંમેય સંખ્યા છે.
5. 0 એ ધન કે ઋણ સંમેય સંખ્યા નથી.
6. સંમેય સંખ્યાને તેનાં પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં ત્યારે ગણી શકાય જ્યારે તેમનો છેદ ધન પૂર્ણાંક હોય તેમજ અંશ અને છેદનો સામાન્ય અવયવ 1 સિવાય બીજો ન હોય. સંખ્યાઓ $\frac{-1}{3}, \frac{2}{7}$ વગેરે પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં છે.
7. બે સંમેય સંખ્યાઓની વચ્ચે અનંત સંમેય સંખ્યાઓ હોય છે.
8. સમાન છેદવાળી બે સંમેય સંખ્યાઓનો સરવાળો કરવા માટે છેદને સામાન્ય રાખી અંશનો સરવાળો કરી શકીએ. બે ભિન્ન છેદવાળી સંખ્યાઓનો સરવાળો કરવા માટે પહેલાં બંને છેદનો લ.સા.અ. લઈ ત્યાર બાદ બંને સંમેય સંખ્યાઓનાં લ.સા.અ. જેટલા છેદવાળી બે સમાન સંખ્યામાં ફેરવી સરવાળો કરવામાં આવે છે. ઉદાહરણ તરીકે $\frac{-2}{3} + \frac{3}{8} = \frac{-16}{24} + \frac{9}{24} = \frac{-16+9}{24} = \frac{-7}{24}$ અહીં 3 અને 8 નો લ.સા.અ. 24 છે.
9. બે સંમેય સંખ્યાઓની બાદબાકી કરવા બાદ કરવાની સંમેય સંખ્યાનો વિરોધી ઘટક લઈ બીજી સંખ્યામાં ઉમેરવામાં આવે છે.

   આ રીતે, $\frac{7}{8} - \frac{2}{3} = \frac{7}{8} + \left(\frac{2}{3} \text{ નો વિરોધી ઘટક}\right) = \frac{7}{8} + \frac{(-2)}{3} = \frac{21+(-16)}{24} = \frac{5}{24}$

10.બે સંમેય સંખ્યાઓનો ગુણાકાર કરવા માટે અંશ અને છેદનો અલગ-અલગ ગુણાકાર કરીએ અને

તેને $\frac{\text{અંશનો ગુણાકાર}}{\text{છેદનો ગુણાકાર}}$ ના સ્વરૂપમાં લખીએ છીએ

11.એક સંમેય સંખ્યાનો બીજી શૂન્યેતર સંમેય સંખ્યા સાથે ભાગકાર કરવા માટે આપણે એક સંમેય સંખ્યાને બીજી શૂન્યેતર સંમેય સંખ્યાના વ્યસ્ત સાથે ગુણાકાર કરીએ છીએ.

એવી રીતે, $\frac{-7}{2} \div \frac{4}{3} = \frac{-7}{2} \times \left(\frac{4}{3} \text{ નો વ્યસ્ત}\right) = \frac{-7}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{-21}{8}$

પ્રકરણ 10

પ્રાયોગિક ભૂમિતિ

10.1 પ્રસ્તાવના :

તમે કેટલાક આકારોથી પરિચિત છો. એમાંના કેટલાક કેવી રીતે દોરવા તે તમે આગળના ધોરણોમાં શીખ્યાં છો. જેમ કે, તમે આપેલી લંબાઈનો રેખાખંડ દોરી શકો છો, આપેલા રેખાખંડને લંબ રેખા દોરી શકો છો, ખૂણો, ખૂણાનો દ્વિભાજક, વર્તુળ વગેરે પણ દોરી શકો છો.

હવે તમે સમાંતર રેખાઓ અને કેટલાક પ્રકારના ત્રિકોણ દોરતાં શીખશો.

10.2 આપેલી રેખા પર ન હોય તેવા બિંદુમાંથી તે રેખાને સમાંતર રેખાની રચના

આપણે એક પ્રવૃત્તિથી શરૂઆત કરીએ (આકૃતિ 10.1)

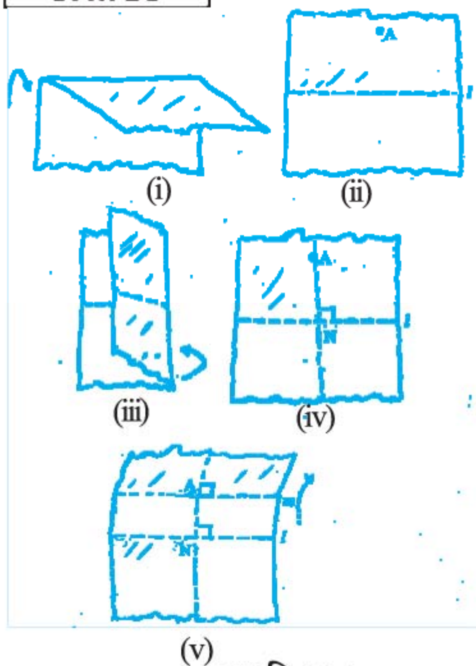
(i) એક કાગળ લો. તેને વચ્ચેથી ગડી વાળો. આથી મળતો સળ રેખા l દર્શાવે છે.

(ii) કાગળને ખુલ્લો કરો. કાગળ પર lની બહાર બિંદુ A દર્શાવો.

(iii) બિંદુ Aમાંથી પસાર થાય એ રીતે, રેખા l ને લંબરેખામાં કાગળની ગડી વાળો. લંબને નામ AN આપો.

(iv) આ લંબને લંબ હોય એ રીતે Aમાંથી પસાર થાય તેવી ગડી વાળો. આ નવા લંબને રેખા m નામ આપો. હવે $l \| m$ છે. શા માટે ?

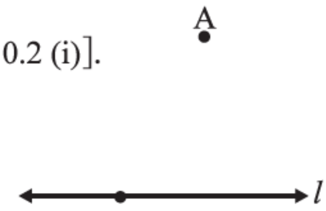
સમાંતર રેખાના કયા ગુણધર્મ કે ગુણધર્મોના આધારે તમે કહી શકો કે રેખાઓ l અને m સમાંતર છે ?



આકૃતિ 10.1

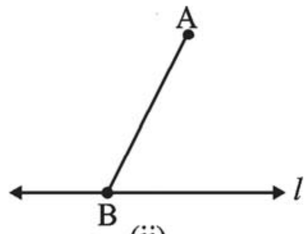
માત્ર માપપટ્ટી અને પરિકરના ઉપયોગથી આ રચના કરવા માટે તમે સમાંતર રેખા અને તેની છેદિકાના કોઈ પણ ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરી શકો છો.

પગથિયું 1 એક રેખા l અને તેની બહાર એક બિંદુ A લો [આકૃતિ 10.2 (i)].



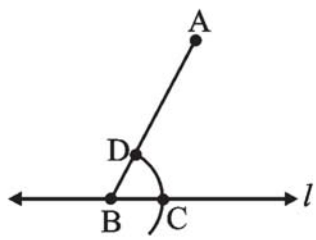
(i)

પગથિયું 2 l પર કોઈ પણ બિંદુ B લો અને Bને A સાથે જોડો [આકૃતિ 10.2 (ii)].



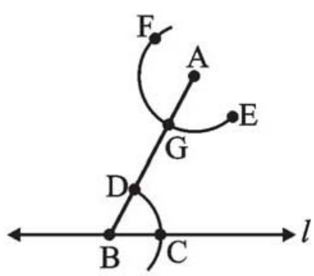
(ii)

પગથિયું 3 B ને કેન્દ્ર લઈ અનુકૂળ ત્રિજ્યાવાળી ચાપ દોરો. જે lને Cમાં અને $\overline{BA}$ ને Dમાં કાપે [આકૃતિ 10.2 (iii)].



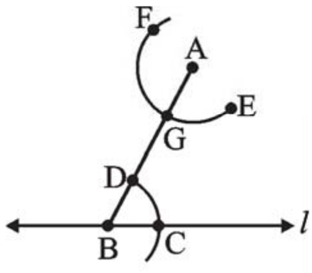
(iii)

પગથિયું 4 હવે Aને કેન્દ્ર લઈ, તેટલી જ ત્રિજ્યાવાળી ચાપ EF રચો જે $\overline{AB}$ ને Gમાં મળે. [આકૃતિ 10.2 (iv)]



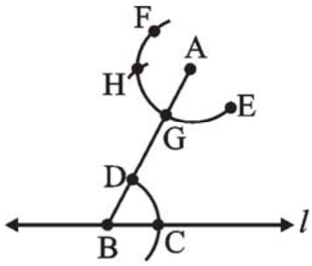
(iv)

પગથિયું 5 હવે પરિકરની અણી C પર મૂકો અને પેન્સિલની અણી D પર આવે તેટલું પરિકર ખોલો [આકૃતિ 10.2 (v)].



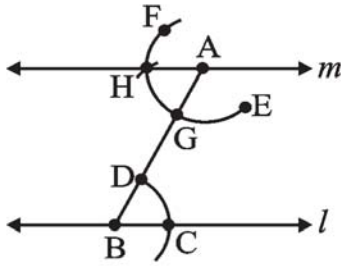
(v)

પગથિયું 6 ત્રિજ્યા એટલી જ રાખીને, Gને કેન્દ્ર લઈ $\overline{AB}$ની જે બાજુએ C છે તેની વિરુદ્ધ બાજુએ ચાપ રચો જે ચાપ EFને Hમાં છેદે [આકૃતિ 10.2 (vi)]



(vi)

પગથિયું 7 હવે, $\overline{AH}$ને જોડો અને રેખા m મેળવો. [આકૃતિ 10.2 (vii)].



(vii)

નોંધો કે $\angle ABC$ અને $\angle BAH$, યુગ્મકોણની જોડ છે. આથી $m \parallel l$.

આકૃતિ 10.2 (i)-(vii)

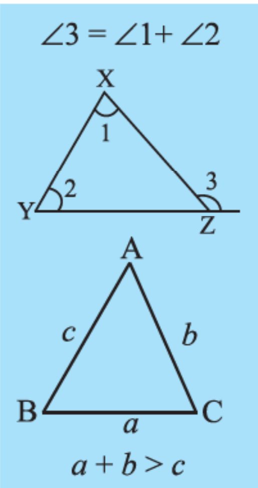
વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

1. ઉપરની રચનામાં, Aમાંથી તમે બીજી કોઈ રેખા દોરી શકો જે પણ lને સમાંતર હોય ?
2. સમાન યુગ્મકોણનો ઉપયોગ કરવાને બદલે સમાન અનુકોણનો ઉપયોગ કરી શકાય તે માટે શું તમે ઉપરની રચનામાં થોડો સુધારો-વધારો કરી શકો ?

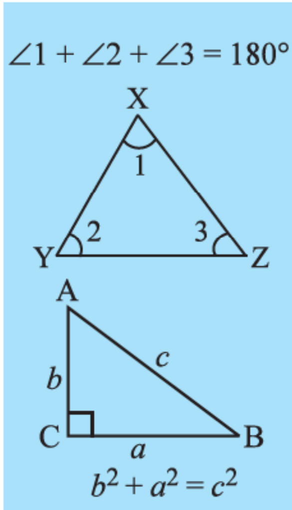
સ્વાધ્યાય 10.1

1. રેખા AB દોરો અને તેની બહાર બિંદુ C લો. Cમાંથી, ABને સમાંતર રેખા, માત્ર માપપટ્ટી અને પરિકરના ઉપયોગથી દોરો.
2. રેખા l દોરો. l ના કોઈ પણ એક બિંદુ આગળ, lને લંબ રેખા દોરો. આ લંબ રેખા પર બિંદુ X લો, જે lથી 4 સેમી દૂર હોય. Xમાંથી lને સમાંતર રેખા m દોરો.
3. રેખા l અને તેના પર ન હોય તેવું બિંદુ P લો. Pમાંથી lને સમાંતર રેખા m દોરો. હવે Pને, l પરના કોઈક બિંદુ Q સાથે જોડો. m પર કોઈ પણ બિંદુ R લો. Rમાંથી PQને સમાંતર રેખા દોરો. ધારો કે આ રેખા lને Sમાં મળે છે. આ સમાંતર રેખાઓ કયો આકાર બનાવે છે ?

10.3 ત્રિકોણની રચના



ત્રિકોણના ગુણધર્મો અને એકરૂપ ત્રિકોણો વિશે અગાઉનાં પ્રકરણોમાં જે શીખી ગયાં છીએ તે ખ્યાલોને યાદ કરી લીધા પછી આ વિભાગનો અભ્યાસ કરવાથી સરળતા રહેશે.



ત્રિકોણનું તેમની બાજુના આધારે અને ખૂણાઓના આધારે કેવી રીતે વર્ગીકરણ કરવામાં આવેલું છે તે અને નીચે જણાવેલા ત્રિકોણના ગુણધર્મો તમે જાણો છો :

(i) ત્રિકોણના બહિષ્કોણનું માપ અને તેના અંતઃસંમુખ કોણોના માપનો સરવાળો સમાન હોય છે.

(ii) ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણાનું કુલ માપ 180° છે.

(iii) ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુની લંબાઈનો સરવાળો, ત્રીજી બાજુની લંબાઈ કરતાં વધુ હોય છે.

(iv) કાટકોણ ત્રિકોણમાં કર્ણની લંબાઈનો વર્ગ એ બાકીની બે બાજુની લંબાઈઓના વર્ગોના સરવાળા જેટલો હોય છે.

"ત્રિકોણની એકરૂપતા"ના પ્રકરણમાં આપણે જોયું કે નીચેનામાંથી કોઈ પણ એક **માપનો સમૂહ** આપેલો હોય તો તે ત્રિકોણ દોરી શકાય.

(i) ત્રણ બાજુઓ (ii) બે બાજુઓ અને અંતર્ગત ખૂણો

(iii) બે ખૂણાઓ અને અંતર્ગત બાજુ (iv) કાટકોણ ત્રિકોણમાં કર્ણ અને કોઈ પણ એક બાજુ

હવે આપણે આ યુક્તિનો ઉપયોગ ત્રિકોણની રચના કરવા માટે કરીશું.

10.4 ત્રિકોણની ત્રણ બાજુની લંબાઈ આપેલી હોયતો ત્રિકોણની રચના કરવી(બાબાબા શરત)

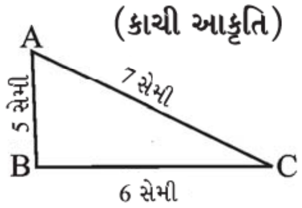
હવે આપણે જે ત્રિકોણની ત્રણે બાજુઓ જાણતાં હોઈએ તેવા ત્રિકોણની રચના કરીશું. પહેલાં આપણે કાચી આકૃતિ દોરીને કઈ બાજુ ક્યાં છે તે જોઈશું અને પછી કોઈ પણ એક બાજુ દોરવાથી શરૂઆત કરીશું.

C7U3EZ

નીચેનું ઉદાહરણ જુઓ :

ઉદાહરણ 1 ત્રિકોણ ABCની રચના કરો, જ્યાં AB = 5 સેમી, BC = 6 સેમી અને AC = 7 સેમી આપેલ છે.

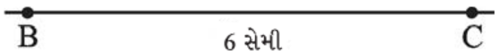
(કાચી આકૃતિ)



(i)

ઉકેલ

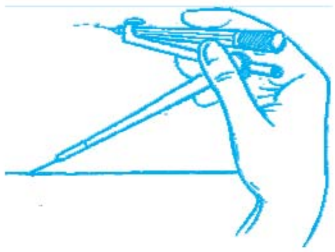
પગથિયું 1 પ્રથમ, આપેલા માપ દર્શાવતી કાચી આકૃતિ દોરીશું (એનાથી શરૂઆત કેવી રીતે કરવી તે નક્કી કરવામાં મદદ મળશે) [આકૃતિ 10.3(i)].

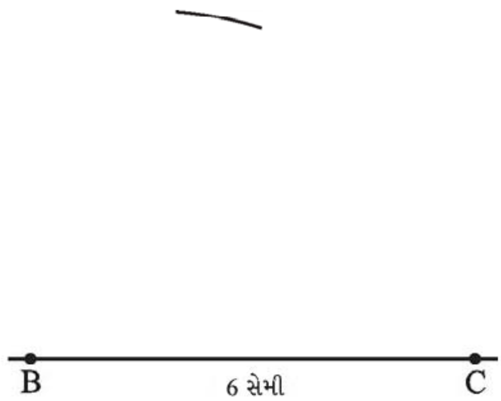


(ii)

પગથિયું 2 6 સેમી લંબાઈનો રેખાખંડ BC દોરો [આકૃતિ 10.3(ii)].

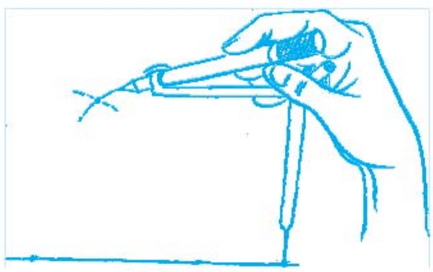
પગથિયું 3 બિંદુ Bથી, 5 સેમી અંતરે બિંદુ A છે. આથી Bને કેન્દ્ર લઈ 5 સેમી ત્રિજ્યાવાળી ચાપ રચો. (હવે બિંદુ A આ ચાપ પર કોઈક જગ્યાએ હશે. આપણું કામ Aની ચોક્કસ સ્થિતિ શોધવાનું છે) [આકૃતિ 10.3(iii)].

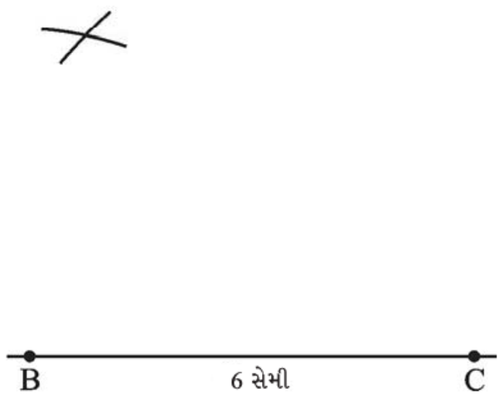




(iii)

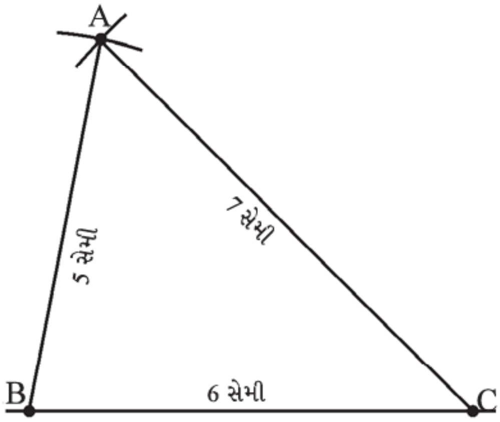
પગથિયું 4 બિંદુ Cથી, 7 સેમી અંતરે A બિંદુ છે. આથી Cને કેન્દ્ર લઈ 7 સેમી ત્રિજ્યાવાળી ચાપ રચો. (બિંદુ A, આ ચાપ પર કોઈક જગ્યાએ હશે. જે આપણે નિશ્ચિત કરવાનું છે) [આકૃતિ 10.3(iv)].





(iv)

પગથિયું 5 બિંદુ A આપણે દોરેલી બંને ચાપ પર હોવું જોઈએ. આથી, તે બંને ચાપનું છેદબિંદુ છે. બંને ચાપના છેદબિંદુને A કહો. AB અને AC જોડો. ΔABC મળશે [આકૃતિ 10.3(v)].



આકૃતિ 10.3 (i) – (v)

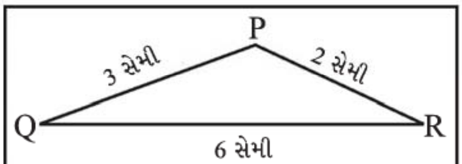
આ કરો

હવે આપણે બીજો ત્રિકોણ DEF રચીએ જેમાં DE = 5 સેમી, EF = 6 સેમી અને DF = 7 સેમી છે. ΔDEFને કાગળ પરથી કાપીને ΔABC પર મૂકો. અવલોકનથી શું જણાય છે ?

અવલોકન કરતાં જણાય છે કે ΔDEF, ΔABC પર બરાબર બંધબેસતો આવે છે. (નોંધો કે ત્રણ બાજુઓ આપી હોય ત્યારે ત્રિકોણની રચના કરી છે.) આમ, જો એક ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓ, બીજા ત્રિકોણની ત્રણ અનુરૂપ બાજુઓને સમાન હોય તો તે બે ત્રિકોણો એકરૂપ છે. આ આગળના પ્રકરણમાં શીખેલા તે એકરૂપતાની **બાબાબા** શરત છે.

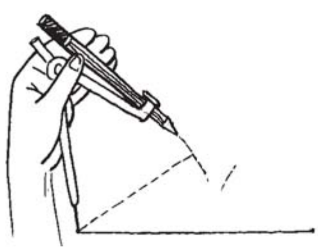
વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

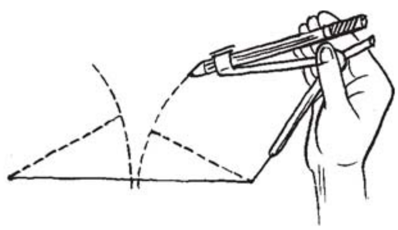
એક વિદ્યાર્થીએ બાજુમાં આપેલી કાચી આકૃતિમાં દર્શાવેલ ત્રિકોણ દોરવાનો પ્રયત્ન કર્યો. તેણે પ્રથમ QR દોરી. પછી Qને કેન્દ્ર લઈ 3 સેમી ત્રિજ્યાવાળી ચાપ રચી. પછી Rને કેન્દ્ર લઈ 2 સેમી ત્રિજ્યાવાળી ચાપ રચી, પરંતુ તેને P (નું સ્થાન) મળ્યું નહીં. શા માટે ? આ પ્રશ્નના સંદર્ભમાં ત્રિકોણનો કયો ગુણધર્મ સંકળાયેલો છે ?



આકૃતિ 10.4 વિચારો : શું આ બરાબર છે ?

શું આવો ત્રિકોણ મળવો શક્ય છે ? (ત્રિકોણનો ગુણધર્મ યાદ કરો : ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુનો સરવાળો, ત્રીજી બાજુથી મોટો હોય છે !)





સ્વાધ્યાય 10.2

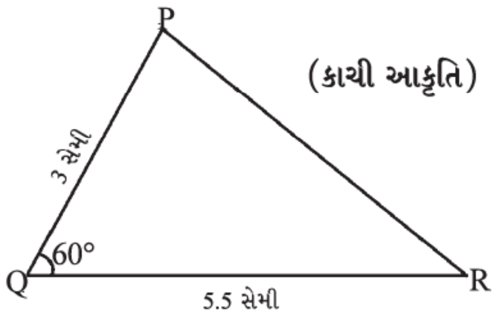
1. ΔXYZ રચો, જેમાં XY = 4.5 સેમી, YZ = 5 સેમી અને ZX = 6 સેમી હોય.
2. જેની બાજુનું માપ 5.5 સેમી હોય તેવા સમબાજુ ત્રિકોણની રચના કરો.
3. ΔPQR રચો, જેમાં PQ = 4 સેમી, QR = 3.5 સેમી અને PR = 4 સેમી છે. આ કયા પ્રકારનો ત્રિકોણ છે ?
4. AB = 2.5 સેમી, BC = 6 સેમી અને AC = 6.5 સેમી હોય તેવો ΔABC રચો. ∠B નું માપ મેળવો.

10.5 ત્રિકોણની બે બાજુનાં માપ અને અંતર્ગત ખૂણાનું માપ આપેલા હોય તેવા ત્રિકોણની રચના કરવી (બાખૂબા શરત)

C83YGM

અહીં બે બાજુ અને તેમની વચ્ચેનો ખૂણો આપેલાં છે. આપણે કાચી આકૃતિ દોરીશું અને પછી આપેલો રેખાખંડ દોરીશું. ઉદાહરણ 2 જુઓ.

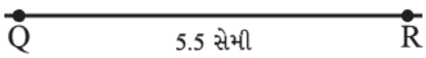
ઉદાહરણ 2 ΔPQRની રચના કરો, જ્યાં PQ = 3 સેમી, QR = 5.5 સેમી અને ∠PQR = 60° આપેલા છે.



(i)

ઉકેલ

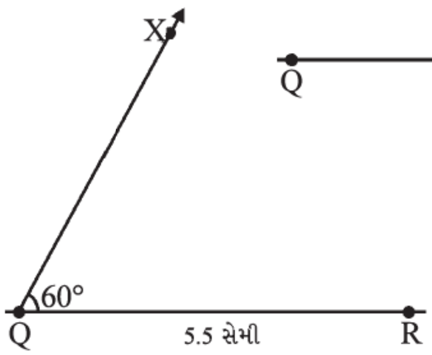
પગથિયું 1 સૌ પ્રથમ આપણે કાચી આકૃતિ દોરીશું, જેમાં માપ દર્શાવીશું (આમ કરવાથી રચનાની રીત નક્કી કરવામાં મદદ થશે).



(ii)

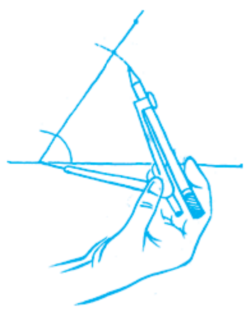
પગથિયું 2 5.5 સેમી લંબાઈનો રેખાખંડ QR દોરો [આકૃતિ 10.5(ii)].

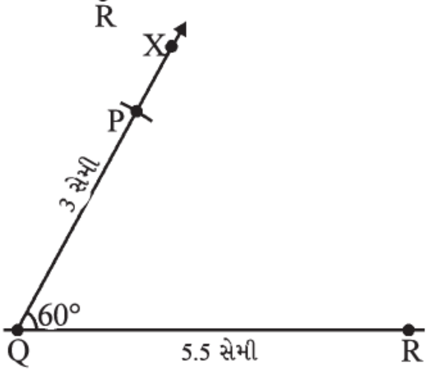
પગથિયું 3 Q આગળ, QR સાથે 60°નો ખૂણો બનાવતું કિરણ QX રચો. [આકૃતિ 10.5(iii)] (P બિંદુ ખૂણાના આ કિરણ પર ક્યાંક હશે.)



(iii)

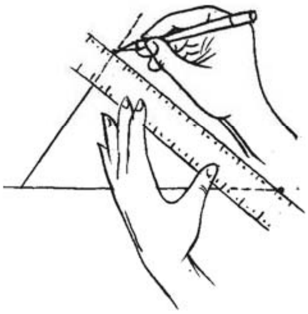
પગથિયું 4 (Pનું સ્થાન નિશ્ચિત કરવા માટે QP અંતર આપેલ છે.) Qને કેન્દ્ર લઈ, 3 સેમી ત્રિજ્યાવાળી ચાપ રચો જે કિરણ QXને Pમાં કાપે. [આકૃતિ 10.5(iv)]

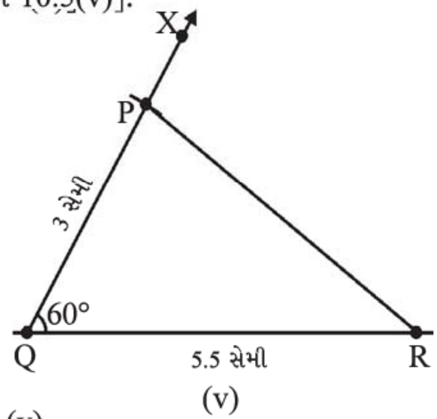




(iv)

પગથિયું 5 P અને R જોડો. જરૂરી ΔPQR મળે છે [આકૃતિ 10.5(v)].





આકૃતિ 10.5 (i) – (v)

આ કરો

હવે આપણે બીજો ત્રિકોણ ABC રચીએ, જેમાં AB = 3 સેમી, BC = 5.5 સેમી અને $m\angle ABC = 60°$. કાગળમાંથી ΔABC કાપીને તેને ΔPQR પર મૂકો. અવલોકન કરતાં શું જણાય છે ? અવલોકન કરતાં જણાય છે કે ΔABC, ΔPQR પર બરાબર **બંધબેસતો** આવે છે. આમ, જો એક ત્રિકોણની બે બાજુઓ અને વચ્ચેનો ખૂણો બીજા ત્રિકોણની અનુરૂપ બે બાજુઓ અને વચ્ચેના ખૂણા સાથે સમાન હોય તો તે બે ત્રિકોણો એકરૂપ છે. અગાઉના પ્રકરણમાં શીખ્યાં હતાં તે એકરૂપતાની આ **બાખૂબા** શરત છે. (નોંધો કે બંને ત્રિકોણમાં બે બાજુઓ અને તેમની વચ્ચેનો ખૂણો આપ્યો હોય ત્યારે તેમની રચના કરી છે.)

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

ઉપરની રચનામાં બે બાજુની લંબાઈ અને એક ખૂણાનું માપ આપેલાં હતાં. હવે નીચેના પ્રશ્નોનો અભ્યાસ કરો :

ΔABCમાં જો AB = 3 સેમી, AC = 5 સેમી અને $m\angle C = 30°$ હોય તો આપણે આ ત્રિકોણ દોરી શકીએ ? આપણે AC = 5 સેમી દોરીએ અને 30°ના માપનો ખૂણો C દોરીએ. CA, ∠C નો એક ભૂજ છે. બિંદુ B, ∠Cના બીજા ભૂજ પર હોવું જોઈએ. પરંતુ જુઓ કે બિંદુ Bનું સ્થાન અનન્ય રીતે નિશ્ચિત થઈ શકતું નથી. આથી, આ ΔABCની રચના કરવા માટે આપેલ માહિતી પૂરતી નથી.

હવે ΔABC રચવાનો પ્રયત્ન કરો જેમાં AB = 3 સેમી, AC = 5 સેમી અને $m\angle B = 30°$ છે. શું જોવા મળે છે ? ફરીથી, ત્રિકોણ ΔABC રચી શકાતો નથી. આમ, આપણે એવા તારણ પર આવી શકીએ કે જો બે બાજુની લંબાઈ અને તેમની વચ્ચેના ખૂણાનું માપ આપેલ હોય તો જ અનન્ય ત્રિકોણ રચી શકાય.

સ્વાધ્યાય 10.3

1. DE = 5 સેમી, DF = 3 સેમી અને $m\angle EDF = 90°$ હોય તેવો ΔDEF રચો.
2. એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ રચો જેમાં બંને સમાન બાજુનાં માપ 6.5 સેમી અને તેમની વચ્ચેનો ખૂણો 110°નો હોય.
3. BC = 7.5 સેમી, AC = 5 સેમી અને $m\angle C = 60°$ હોય તેવો ΔABC રચો.

10.6 ત્રિકોણના બે ખૂણાનાં માપ અને અંતર્ગત બાજુની લંબાઈ આપી હોય તેવા ત્રિકોણની રચના કરવી. (ખૂબાખૂ શરત)

C8CUIA

પહેલાંની જેમ કાચી આકૃતિ તૈયાર કરો. હવે આપેલ રેખાખંડ દોરો. બંને છેડા પર ખૂણાઓ દોરો. ઉદાહરણ 3 જુઓ.

ઉદાહરણ 3 ΔXYZની રચના કરો જેમાં $XY = 6$ સેમી, $m\angle ZXY = 30°$ અને $m\angle XYZ = 100°$ આપેલા છે.

ઉકેલ

પગથિયું 1 રચના કરતાં પહેલાં, માપ દર્શાવતી કાચી આકૃતિ દોરીશું. (આથી આગળ કેવી રીતે વધવું તેનો ખ્યાલ આવશે)[આકૃતિ 10.6(i)].

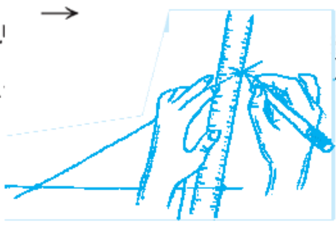
પગથિયું 2 6 સેમી લંબાઈનો રેખાખંડ $\overline{XY}$ દોરો.

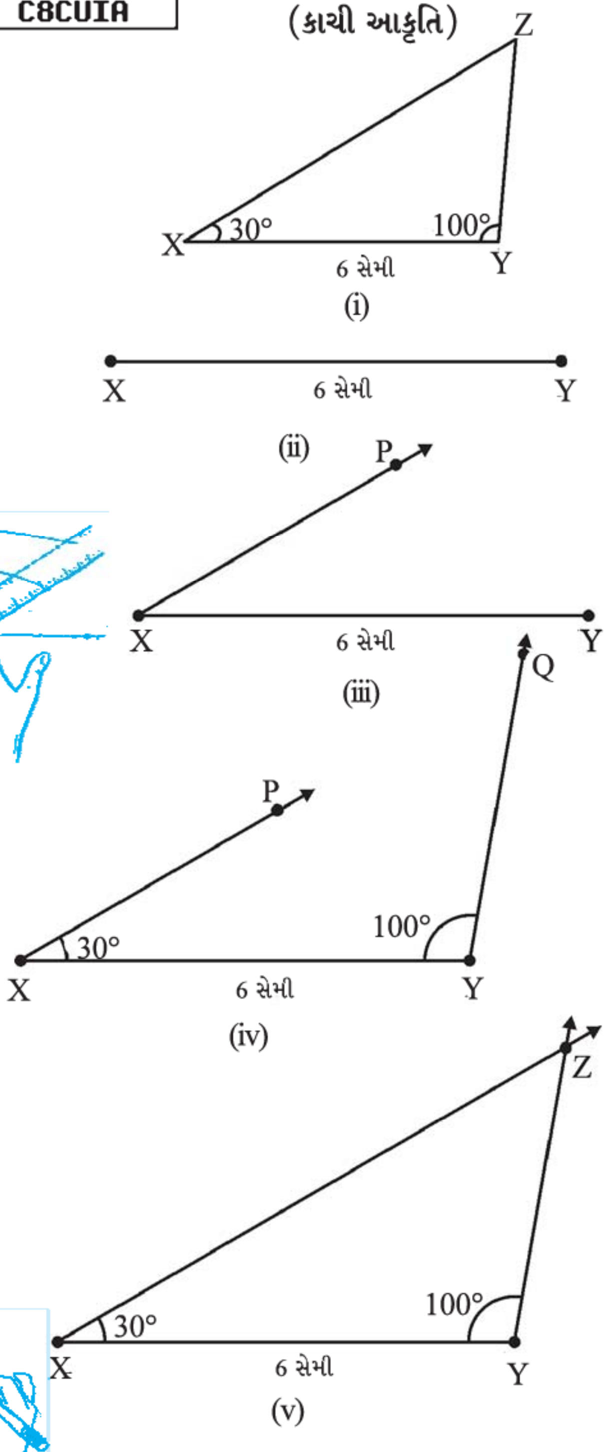
પગથિયું 3 X આગળ, $\overline{XY}$ સાથે 30°નો ખૂણો બનાવતું કિરણ $\overrightarrow{XP}$ રચો. શરત પ્રમાણે Z, $\overrightarrow{XP}$ પર ક્યાંક હશે.

પગથિયું 4 Y આગળ, $\overline{YX}$ સાથે 100°નો ખૂણો બનાવતું કિરણ $\overrightarrow{YQ}$ રચો. શરત પ્રમાણે Z, $\overrightarrow{YQ}$ પર પણ હશે.

પગથિયું 5 Z, કિરણ $\overrightarrow{XP}$ અને કિર $\rightarrow$ પર છે. આથી આ બં છેદબિંદુ Z છે.

ΔXYZ મળે છે.





આકૃતિ **10.6** (i)-(v)

આ કરો

હવે બીજો ΔLMN દોરો જ્યાં $m\angle NLM = 30°$, LM = 6 સેમી અને $m\angle NML = 100°$ છે. કાગળ પરથી ΔLMN ને કાપીને ΔXYZ પર મૂકો. આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે ΔLMN, ΔXYZ પર બરાબર **બંધ બેસે** છે. આમ, જો એક ત્રિકોણના બે ખૂણા અને તેમની વચ્ચેની બાજુ, બીજા ત્રિકોણના અનુરૂપ બે ખૂણા અને તેમની વચ્ચેની બાજુ સાથે સમાન હોય તો તે બે ત્રિકોણો એકરૂપ છે. અગાઉના પ્રકરણમાં શીખી ગયાં તે એકરૂપતાનો આ **ખૂબાખૂ** નિયમ છે. (નોંધો કે બંને ત્રિકોણોમાં બે ખૂણા અને તેમની વચ્ચેની બાજુ આપેલી હતી અને આપણે રચના કરી છે.)

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

ઉપરના પ્રશ્નમાં એક બાજુની લંબાઈ અને બે ખૂણાના માપ આપેલાં હતા. હવે, નીચેના પ્રશ્નનો અભ્યાસ કરો :

ΔABCમાં જો AC = 7 સેમી, $m\angle A = 60°$ અને $m\angle B = 50°$ આપેલા હોય તો આ ત્રિકોણ દોરી શકાય ?

(ત્રિકોણના ખૂણાના સરવાળાનો ગુણધર્મ તમને આમાં ઉપયોગી થઈ શકે !)

સ્વાધ્યાય 10.4

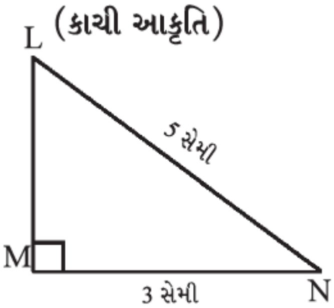
1. $m\angle A = 60°$, $m\angle B = 30°$ અને AB = 5.8 સેમી હોય તેવો ΔABC રચો.
2. ΔPQR રચો, જેમાં PQ = 5 સેમી, $m\angle PQR = 105°$ અને $m\angle QRP = 40°$ છે.

   (સૂચન : ત્રિકોણના ખૂણાના સરવાળાનો ગુણધર્મ યાદ કરો.)
3. EF = 7.2 સેમી, $m\angle E = 110°$ અને $m\angle F = 80°$ હોય તેવો ΔDEF રચી શકાય કે કેમ તે ચકાસો. તમારાજવાબનું સમર્થન કરો.

10.7 ત્રિકોણની એક બાજુ અને કર્ણનું માપ આપેલું હોય તેવા કાટકોણ ત્રિકોણની રચના કરવી. (કાકબા શરત)

CJR3YU

(કાચી આકૃતિ)



(i)

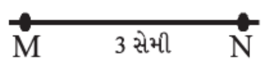
અહીં કાચી આકૃતિ બનાવવી સહેલી છે. એક રેખાખંડ દોરો. તેના એક બિંદુ આગળ કાટખૂણો રચો. હવે પરિકરના ઉપયોગથી બાજુનું માપ અને કર્ણના માપ પ્રમાણે બિંદુઓ મેળવો. ત્રિકોણ પૂર્ણ કરો. નીચેનું ઉદાહરણ જુઓ :

ઉદાહરણ 4 ΔLMN રચો, જેમાં M આગળ કાટખૂણો છે અને LN = 5 સેમી અને MN = 3 સેમી છે.

ઉકેલ

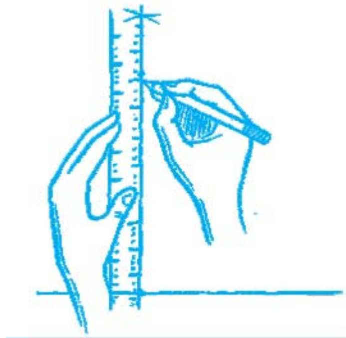
પગથિયું 1 માપ દર્શાવતી કાચી આકૃતિ દોરો. તેમાં કાટખૂણો પણ દર્શાવો (આકૃતિ 10.7(i)).

પગથિયું 2 3 સેમી લંબાઈનો રેખાખંડ MN દોરો. (આકૃતિ 10.7(ii)).

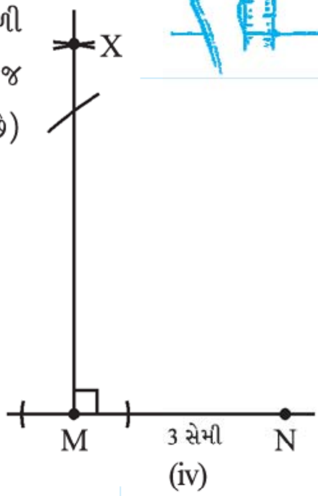


(ii)

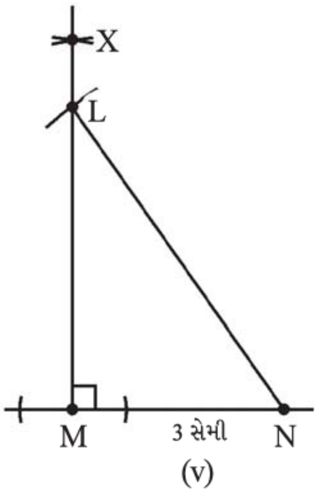
પગથિયું 3 M આગળ $\overline{MX} \perp \overline{MN}$ દોરો. (આ લંબ પર ક્યાંક L હોવું જોઈએ). [આકૃતિ 10.7(ii)].



પગથિયું 4 N ને કેન્દ્ર લઈ 5 સેમી ત્રિજ્યાવાળી ચાપ રચો. (L આ ચાપ પર હશે જ કારણ કે તે N થી 5 સેમી અંતરે છે) [આકૃતિ 10.7(iv)].



પગથિયું 5 L, લંબરેખા $\overline{MX}$ અને Nમાંથી દોરેલી ચાપ, બંને પર છે. આથી, L આ બંનેનું છેદ બિંદુ છે.) ΔLMN મળે છે. [આકૃતિ 10.7(v)]



આકૃતિ 10.7 (i)-(v)

સ્વાધ્યાય 10.5

1. $m\angle Q = 90°$, QR = 8 સેમી અને PR = 10 સેમી હોય તેવો કાટકોણ ત્રિકોણ ΔPQR રચો.

2. એવો કાટકોણ ત્રિકોણ રચો કે જેના કર્ણની લંબાઈ 6 સેમી અને એક બાજુની લંબાઈ 4 સેમી હોય.

3. સમદ્વિબાજુ કાટકોણ ΔABC રચો, જેમાં $m\angle ACB = 90°$ અને AC = 6 સેમી છે.

અન્ય પ્રશ્નો

નીચે ત્રિકોણની બાજુઓ અને ખૂણાઓનાં માપ આપેલાં છે. જેમની રચના ન થઈ શકે તેવા ત્રિકોણ ઓળખો અને શા માટે રચના શક્ય નથી તે જણાવો. બાકી ત્રિકોણની રચના કરો.

ત્રિકોણ	આપેલાં માપ		
1. ΔABC	$m\angle A = 85°$;	$m\angle B = 115°$;	AB = 5 સેમી
2. ΔPQR	$m\angle Q = 30°$;	$m\angle R = 60°$;	QR = 4.7 સેમી
3. ΔABC	$m\angle A = 70°$;	$m\angle B = 50°$;	AC = 3 સેમી
4. ΔLMN	$m\angle L = 60°$;	$m\angle N = 120°$;	LM = 5 સેમી
5. ΔABC	BC = 2 સેમી;	AB = 4 સેમી;	AC = 2 સેમી
6. ΔPQR	PQ = 3.5 સેમી;	QR = 4 સેમી;	PR = 3.5 સેમી
7. ΔXYZ	XY = 3 સેમી;	YZ = 4 સેમી;	XZ = 5 સેમી
8. ΔDEF	DE = 4.5 સેમી;	EF = 5.5 સેમી;	DF = 4 સેમી

આપણે શી ચર્ચા કરી ?

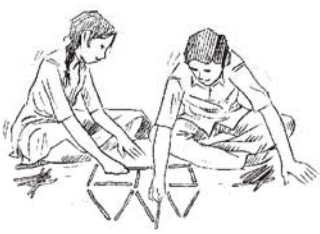
આ પ્રકરણમાં આપણે માપપટ્ટી અને પરિકરની મદદથી થઈ શકતી કેટલીક રચનાઓ વિશે વાત કરી.

1. રેખા l અને તેના પર ન હોય તેવું બિંદુ આપેલું હોય તો lને સમાંતર રેખા દોરવા માટે સમાંતર રેખા અને તેની છેદિકાથી બનતાં સમાન યુગ્મકોણના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કર્યો.

   આ રચના માટે આપણે સમાન અનુકોણોનો પણ ઉપયોગ કરી શક્યા હોત.

2. આડકતરી રીતે ત્રિકોણની એકરૂપતાના ખ્યાલનો ઉપયોગ કરીને આપણે ત્રિકોણ રચવાની રીતો શીખ્યા.

   નીચેના કિસ્સાઓ આપણે ચર્ચ્યા :



   (i) બાબાબા : ત્રિકોણની ત્રણે બાજુની લંબાઈ આપી હોય.

   (ii) બાખૂબા : ત્રિકોણની બે બાજુની લંબાઈ અને તેમની વચ્ચેના ખૂણાનું માપ આપ્યું હોય.

   (iii) ખૂબાખૂ : ત્રિકોણના બે ખૂણાનાં માપ અને તેમની વચ્ચેની બાજુની લંબાઈ આપી હોય.

   (iv) કાકબા : કાટકોણ ત્રિકોણમાં કર્ણની લંબાઈ અને તેની બીજી એક બાજુની લંબાઈ આપી હોય.

પ્રકરણ 11

FKZDIZ

પરિમિતિ અને ક્ષેત્રફળ

11.1 પ્રસ્તાવના :

ધોરણ 6માં તમે સમતલીય આકૃતિઓની પરિમિતિ તથા ચોરસ અને લંબચોરસના ક્ષેત્રફળ વિશે શીખી ગયાં છો. બંધ આકૃતિની સીમારેખાની લંબાઈ એ પરિમિતિ છે જ્યારે ક્ષેત્રફળ એ બંધ આકૃતિએ એ સમતલમાં રોકેલી જગ્યાનું માપ છે.

આ વર્ષે, કેટલીક વધુ સમતલીય આકૃતિઓની પરિમિતિ અને ક્ષેત્રફળ વિશે શીખશો.

11.2 ચોરસ અને લંબચોરસ (Squares and Rectangles)

આયુષ અને દીક્ષાએ ચિત્રો દોર્યાં. આયુષે તેનું ચિત્ર 60 સેમી લંબાઈ અને 20 સેમી પહોળાઈવાળા કાગળ પર દોર્યું તો દીક્ષાએ તેનું ચિત્ર 40 સેમી લંબાઈ અને 35 સેમી પહોળાઈવાળા કાગળ પર દોર્યું. આ બંને ચિત્રો અલગ-અલગ ફ્રેમમાં મઢવાનાં છે અને લેમિનેશન કરવાનું છે.

જો ફ્રેમ કરવાનો ખર્ચ ₹ 3.00 પ્રતિ સેમી હોય, તો કોને વધુ ખર્ચ થાય ?

જો લેમિનેશનનો ખર્ચ ₹ 2.00 પ્રતિ ચોરસ સેમી હોય તો કોને વધુ ખર્ચ થાય ?

ફ્રેમ કરવાનો ખર્ચ શોધવા માટે આપણે પરિમિતિ શોધવી પડે અને પછી તેને ફ્રેમ કરવાના દર વડે ગુણવું પડે. લેમિનેશનનો ખર્ચ શોધવા માટે આપણે ક્ષેત્રફળ શોધવું પડે અને પછી તેને લેમિનેશન કરવાના દર વડે ગુણવું પડે.

પ્રયત્ન કરો

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ શોધવા માટે તમારે શું શોધવું પડે - પરિમિતિ કે ક્ષેત્રફળ ?

1. વર્ગમાંનું કાળું પાટિયું કેટલી જગ્યા રોકે છે ?
2. ફૂલોના લંબચોરસ ક્યારાને ફરતેથી બંધ કરવા માટે કેટલી લંબાઈનો તાર જોઈશે ?
3. એક ત્રિકોણાકાર બાગને ફરતે બે વાર આંટા મારવાથી તમે કેટલું અંતર કાપશો ?
4. એક લંબચોરસ તરણકુંડ ને ઢાંકવા માટે તમારે કેટલી પ્લાસ્ટિકની શીટ જોઈશે ?

શું તમને યાદ છે ?

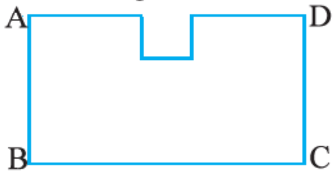
નિયમિત બહુકોણની પરિમિતિ = બાજુની સંખ્યા × એક બાજુની લંબાઈ

ચોરસની પરિમિતિ = 4 × બાજુની લંબાઈ

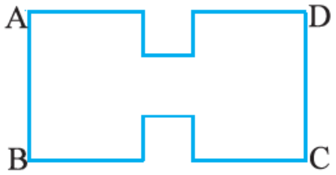
લંબચોરસની પરિમિતિ $= 2 \times (l + b)$

લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ $= l \times b$, ચોરસનું ક્ષેત્રફળ = બાજુ $\times$ બાજુ

આકૃતિ 11.1



આકૃતિ 11.2



આકૃતિ 11.3

તાન્યાને તેનું કૉલાજ પૂરું કરવા માટે 4 સેમી બાજુવાળો ચોરસ જોઈતો હતો. તેની પાસે 28 સેમી લંબાઈ અને 21 સેમી પહોળાઈનો લંબચોરસ કાગળ હતો (આકૃતિ 11.1). તેણે તેમાંથી 4 સેમી બાજુવાળો ચોરસ કાપી લીધો. તેની મિત્રે બાકીનો કાગળ (આકૃતિ 11.2) જોઈને તાન્યાને પૂછ્યું, ''હવે આ કાગળની પરિમિતિ વધી કે ઘટી ?''

બાજુ ADની કુલ લંબાઈ, ચોરસ કાપ્યા પછી વધી ?

ક્ષેત્રફળ વધ્યું કે ઘટ્યું ?

તાન્યા સામેની બાજુમાંથી બીજો એક ચોરસ કાપે છે (આકૃતિ 11.3).

બાકીના કાગળની પરિમિતિ હજુ વધારે વધશે ?

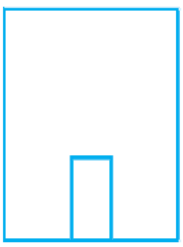
ક્ષેત્રફળ હજુ વધશે કે ઘટશે ?

તો, આ પરથી આપણે શું અનુમાન કરી શકીએ ?

અહીં સ્પષ્ટ છે કે પરિમિતિમાં વધારો થવાથી ક્ષેત્રફળમાં વધારો થવો જરૂરી નથી.

પ્રયત્ન કરો

1. આવા ઘણા આકારો અને કટિંગ્સ માટે આ પ્રયોગ કરો. તમે ચોરસ ખાનાવાળા કાગળ પર આ આકારો દોરી તેની પરિમિતિ અને ક્ષેત્રફળ ગણી શકો.
   તમે જોયું છે કે પરિમિતિમાં વધારો થાય એનો અર્થ એ નથી કે ક્ષેત્રફળ પણ વધશે.
2. પરિમિતિ વધવાની સાથે ક્ષેત્રફળ પણ વધે તેવાં બે ઉદાહરણો આપો.
3. પરિમિતિ વધે પરંતુ ક્ષેત્રફળ ન વધે તેવાં બે ઉદાહરણો આપો.



આકૃતિ 11.4

ઉદાહરણ 1 10 મી $\times$ 10 મીના માપવાળી દીવાલમાં 3 મી $\times$ 2 મી માપનું એક બારણું છે. એક ચોરસમીટરના ₹ 2.50 પ્રમાણે દીવાલને રંગવાનો ખર્ચ શોધો.

ઉકેલ બારણાના ક્ષેત્રફળને બાદ કરતાં બાકીની દીવાલને રંગ કરવાનો છે.

બારણાનું ક્ષેત્રફળ $= l \times b$

$= 3 \times 2$ મી^{2} $= 6$ મી^{2}

બારણાં સહિત દીવાલનું ક્ષેત્રફળ = બાજુ $\times$ બાજુ $= 10 \times 10$ મી^{2} $= 100$ મી^{2}

બારણાં સિવાયની દીવાલનું ક્ષેત્રફળ $= (100 - 6)$ મી^{2} $= 94$ મી^{2}

દીવાલને રંગ કરવાનો મજૂરી ખર્ચ $= 2.50 \times 94 =$ ₹ 235

ઉદાહરણ 2 એક લંબચોરસ કાગળનું ક્ષેત્રફળ 500 સેમી^{2} છે. જો તેની લંબાઈ 25 સેમી હોય તો તેની પહોળાઈ કેટલી હશે ? તે કાગળની પરિમિતિ પણ શોધો.

ઉકેલ લંબચોરસ કાગળનું ક્ષેત્રફળ = 500 સેમી^{2}

લંબાઈ $(l) = 25$ સેમી

લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ $= l \times b$ (જ્યાં $b =$ કાગળની પહોળાઈ)

આથી, પહોળાઈ $b = \frac{\text{ક્ષેત્રફળ}}{l} = \frac{500}{25} = 20$ સેમી

કાગળની પરિમિતિ $= 2 \times (l + b) = 2 \times (25 + 20) = 90$ સેમી.

આથી, લંબચોરસ કાગળની પહોળાઈ 20 સેમી અને તેની પરિમિતિ 90 સેમી છે.

ઉદાહરણ 3 અનુ તેના ઘરની સામેના બાગની ફરતે વાડ કરવા માગે છે (આકૃતિ 11.5). તેની ત્રણ બાજુઓની લંબાઈ 20 મીટર; 12 મીટર અને 12 મીટર છે. મીટરના ₹ 150 પ્રમાણે વાડ કરવાનો ખર્ચ શોધો.

આકૃતિ 11.5

ઉકેલ વાડની લંબાઈ, બાગની પરિમિતિ (એક બાજુ સિવાયની) જેટલી થાય, જે 20 મી + 12 મી + 12 મી = 44 મીટર છે. વાડ કરવાનો ખર્ચ = ₹ 150 × 44 = ₹ 6,600

ઉદાહરણ 4 એક તાર 10 સેમી બાજુવાળા ચોરસ આકારમાં વાળેલો છે. જો તેને (ખોલીને) ફરીથી 12 સેમી લંબાઈવાળા લંબચોરસ આકારમાં વાળવામાં આવે તો તે લંબચોરસની પહોળાઈ કેટલી થશે ? ચોરસ અને લંબચોરસમાંથી કોનું ક્ષેત્રફળ વધુ થશે ?

ઉકેલ ચોરસની બાજુ = 10 સેમી

તારની લંબાઈ = ચોરસની પરિમિતિ $= 4 \times$ બાજુ $= 40$ સેમી

લંબચોરસની લંબાઈ $l = 12$ સેમી ધારો કે લંબચોરસની પહોળાઈ b છે.

લંબચોરસની પરિમિતિ = તારની લંબાઈ = 40 સેમી

લંબચોરસની પરિમિતિ $= 2(l + b)$

આથી, $40 = 2(12 + b)$

અથવા $\frac{40}{2} = 12 + b$

આથી, $b = 20 - 12 = 8$ સેમી

લંબચોરસની પહોળાઈ = 8 સેમી

ચોરસનું ક્ષેત્રફળ = (બાજુ)^2

= 10 સેમી × 10 સેમી = 100 સેમી^{2}

લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ $= l \times b$

= 12 સેમી × 8 સેમી = 96 સેમી^{2}

આમ, ચોરસ અને લંબચોરસની પરિમિતિ સમાન હોવા છતાં ચોરસનું ક્ષેત્રફળ વધુ છે.

ઉદાહરણ 5 એક ચોરસ અને એક લંબચોરસનાં ક્ષેત્રફળ સમાન છે. જો ચોરસની બાજુ 40 સેમી હોય અને લંબચોરસની પહોળાઈ 25 સેમી હોય તો લંબચોરસની લંબાઈ શોધો. લંબચોરસની પરિમિતિ પણ શોધો.

ઉકેલ ચોરસનું ક્ષેત્રફળ = (બાજુ)^2

= 40 સેમી × 40 સેમી = 1600 સેમી^{2}

આપણને આપેલું છે કે

લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ = ચોરસનું ક્ષેત્રફળ

લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ = 1600 સેમી^{2}, લંબચોરસની પહોળાઈ = 25 સેમી

લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ = $l \times b$

અથવા $1600 = l \times 25$

અથવા $\frac{1600}{25} = l$ અથવા $l = 64$ સેમી

આથી, લંબચોરસની લંબાઈ 64 સેમી છે.

લંબચોરસની પરિમિતિ = $2 \times (l + b) = 2\ (64 + 25)$ સેમી

= 2×89 સેમી = 178 સેમી

આમ, લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ, ચોરસના ક્ષેત્રફળ જેટલું જ છે તેમ છતાં લંબચોરસની પરિમિતિ 178 સેમી છે.

સ્વાધ્યાય 11.1

1. જમીનના લંબચોરસ ભાગની લંબાઈ અને પહોળાઈ અનુક્રમે 500 મીટર અને 300 મીટર છે.

   (i) તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો. (ii) 1 મી^{2} જમીનની કિંમત ₹ 10,000 હોય, તો તેની કિંમત શોધો.

2. જેની પરિમિતિ 320 મીટર છે તેવા ચોરસ બાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
3. જેનું ક્ષેત્રફળ 440 મી^{2} છે અને લંબાઈ 22 મીટર છે તેવા જમીનના લંબચોરસ પ્લોટની પહોળાઈ શોધો. તેની પરિમિતિ પણ શોધો.
4. એક લંબચોરસની પરિમિતિ 100 સેમી છે, જો તેની લંબાઈ 35 સેમી હોય તો તેની પહોળાઈ શોધો. તેનું ક્ષેત્રફળ પણ શોધો.
5. એક ચોરસ બાગ અને એક લંબચોરસ બાગનાં ક્ષેત્રફળ સરખાં છે. જો ચોરસ બાગની બાજુનું માપ 60 મીટર હોય અને લંબચોરસ બાગની લંબાઈ 90 મીટર હોય તો લંબચોરસ બાગની પહોળાઈ શોધો.
6. એક તાર, લંબચોરસ આકારમાં વાળેલો છે જેની લંબાઈ 40 સેમી અને પહોળાઈ 22 સેમી છે. જો તેને ખોલીને ફરીથી ચોરસ આકારમાં વાળવામાં આવે તો તેની દરેક બાજુનું માપ કેટલું થશે ? કયો આકાર વધુ ક્ષેત્રફળ આવરે છે તે પણ નક્કી કરો.

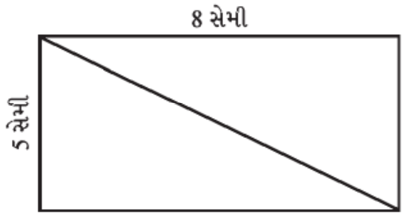
આકૃતિ 11.6

7. એક લંબચોરસની પરિમિતિ 130 સેમી છે. જો તેની પહોળાઈ 30 સેમી હોય તો તેની લંબાઈ શોધો. તે લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ પણ શોધો.
8. એક દીવાલમાં 2 મીટર લંબાઈ અને 1 મીટર પહોળાઈનું બારણું બેસાડેલું છે. દીવાલની લંબાઈ 4.5 મીટર અને પહોળાઈ 3.6 મીટર છે (આકૃતિ 11.6). જો દિવાલને ધોળવાનો દર પ્રતિ મી^{2} ના ₹ 20 હોય તો દીવાલને ધોળવાનો ખર્ચ શોધો.

11.2.1 લંબચોરસના ભાગ તરીકે ત્રિકોણ

CJZZ1H

એક લંબચોરસ લો જેની બાજુઓનાં માપ 8 સેમી અને 5 સેમી છે. તેને તેના વિકર્ણ પરથી કાપીને બે ત્રિકોણો મેળવો (આકૃતિ 11.7).
એક ત્રિકોણને બીજા ત્રિકોણ પર ગોઠવો.
શું તે બંને બરાબર સરખા છે ?
તમે કહી શકો કે તે બંને ત્રિકોણનાં ક્ષેત્રફળ સરખાં છે ?
શું તે બંને ત્રિકોણ એકરૂપ પણ છે ?
આ બંને ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ કેટલું છે ?



આકૃતિ 11.7

તમે જોશો કે બે ત્રિકોણનાં ક્ષેત્રફળોનો સરવાળો, લંબચોરસના ક્ષેત્રફળ જેટલો છે. બંને ત્રિકોણ ક્ષેત્રફળમાં સરખા છે.

દરેક ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}$ (લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ)

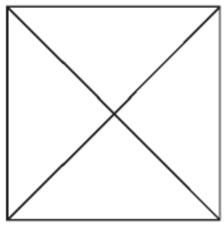
$= \frac{1}{2} \times (l \times b) = \frac{1}{2}\ (8 \times 5)$

$= \frac{40}{2} = 20$ સેમી^{2}

5 સેમી બાજુવાળો એક ચોરસ લો અને તેને (આકૃતિ 11.8)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ચાર ત્રિકોણમાં વહેંચો.
ચારે ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળ સમાન છે ?
તે ચારે પરસ્પર એકરૂપ છે ? (ચકાસવા માટે એકબીજા ઉપર મૂકી જુઓ.)
દરેક ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ કેટલું છે ?

દરેક ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{4}$ (ચોરસનું ક્ષેત્રફળ)

$= \frac{1}{4}$ (બાજુ)$^2 = \frac{1}{4}\ (5)^2$ સેમી$^2 = 6.25$ સેમી^{2}

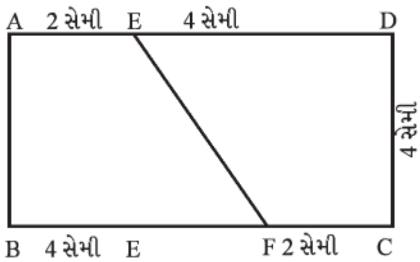

આકૃતિ 11.8

11.2.2 લંબચોરસના અન્ય એકરૂપ ભાગોનું સામાન્યીકરણ

6 સેમી લંબાઈ અને 4 સેમી પહોળાઈના એક લંબચોરસને આકૃતિ (11.9) માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે બે ભાગમાં વહેંચવામાં આવેલ છે. આ લંબચોરસની નકલ બીજા કાગળ પર કરો અને તેને EF ઉપરથી કાપીને બે ટુકડા કરો.

એક ટુકડાને બીજા ઉપર ગોઠવો અને જુઓ કે બંધબેસતા આવે છે કે નહીં. (તમારે એને પરિભ્રમણ કરાવવું પડે.)

શું બંને ભાગ એકરૂપ છે ? બંને ભાગ પરસ્પર એકરૂપ છે. આથી એક ભાગનું ક્ષેત્રફળ, બીજા ભાગના ક્ષેત્રફળ જેટલું છે.



આકૃતિ 11.9

$\therefore$ દરેક એકરૂપ ભાગનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}$ (લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ)

$= \frac{1}{2}\ (6 \times 4)$ સેમી$^2 = 12$ સેમી^{2}

પ્રયત્ન કરો

નીચે આપેલા દરેક લંબચોરસની લંબાઈ 6 સેમી અને પહોળાઈ 4 સેમી છે. તે દરેક એકરૂપ બહુકોણથી બનેલા છે. દરેક બહુકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

11.3 સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ (Area of a Parallelogram)

આપણે ચોરસ અને લંબચોરસ સિવાયના બીજા આકારો પણ જોઈએ છીએ. જે જમીન સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના આકારની હોય તેનું ક્ષેત્રફળ કેવી રીતે શોધશો ?

CK9V35

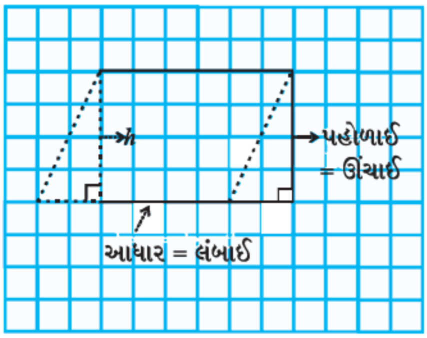
ચાલો, આપણે તે માટે રીત શોધીએ.

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણને સમાન ક્ષેત્રફળવાળા લંબચોરસમાં રૂપાંતરિત કરી શકાય ? આકૃતિ 11.10(i)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે એક આલેખપત્ર પર એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો. સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણના એક શિરોબિંદુ પરથી સામેની બાજુને લંબ રેખા દોરો [આકૃતિ 11.10(ii)]. ત્રિકોણને કાપી લો. આ ત્રિકોણને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની બીજી બાજુએ ખસેડો.

(i) (ii) (iii)

આકૃતિ 11.10

તમને કયો આકાર મળે છે ? તમને એક લંબચોરસ મળે છે. શું સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ, નવા બનેલા લંબચોરસના ક્ષેત્રફળ જેટલું છે ? હા, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ = બનેલા લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ. આ લંબચોરસની લંબાઈ અને પહોળાઈ શેનાં માપ છે ?



આકૃતિ 11.11

આપણને જણાય છે કે લંબચોરસની લંબાઈ તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના આધાર જેટલી છે અને લંબચોરસની પહોળાઈ તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની ઊંચાઈ જેટલી છે. (આકૃતિ 11.11).

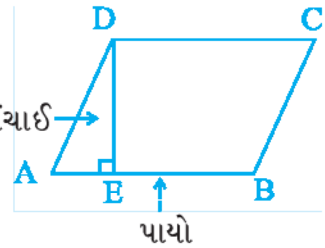
હવે, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ = લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ

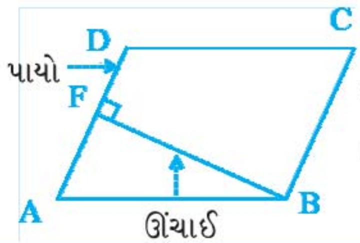
= લંબાઈ × પહોળાઈ = $l \times b$

પરંતુ લંબચોરસની લંબાઈ l અને પહોળાઈ b તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના અનુક્રમે આધાર b અને ઊંચાઈ h જેટલી છે.

આમ, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ = આધાર × ઊંચાઈ = $b \times h$.

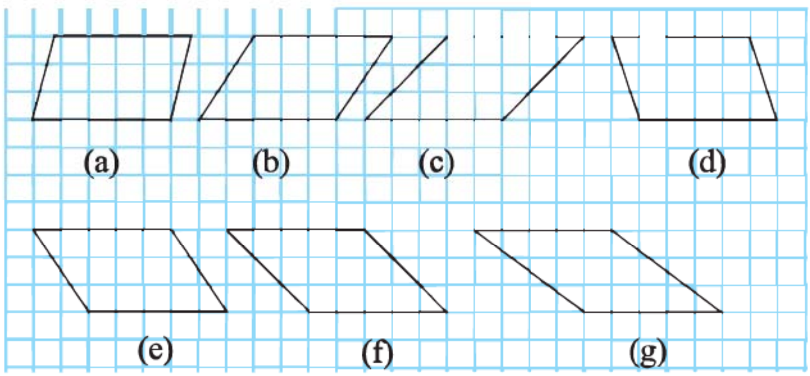
સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની કોઈ પણ બાજુને તેના આધાર તરીકે લઈ શકાય. તે બાજુ પર સામેનાં શિરોબિંદુમાંથી દોરેલા લંબને તેની ઊંચાઈ કહેવાય છે. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCDમાં DE, ABને લંબ છે. અહીં AB આધાર છે અને DE એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની ઊંચાઈ છે.





બાજુના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCDમાં BF, સામેની બાજુ ADને લંબ છે. અહીં AD આધાર છે અને BF ઊંચાઈ છે.

નીચેના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ જુઓ. (આકૃતિ 11.12)



આકૃતિ 11.12

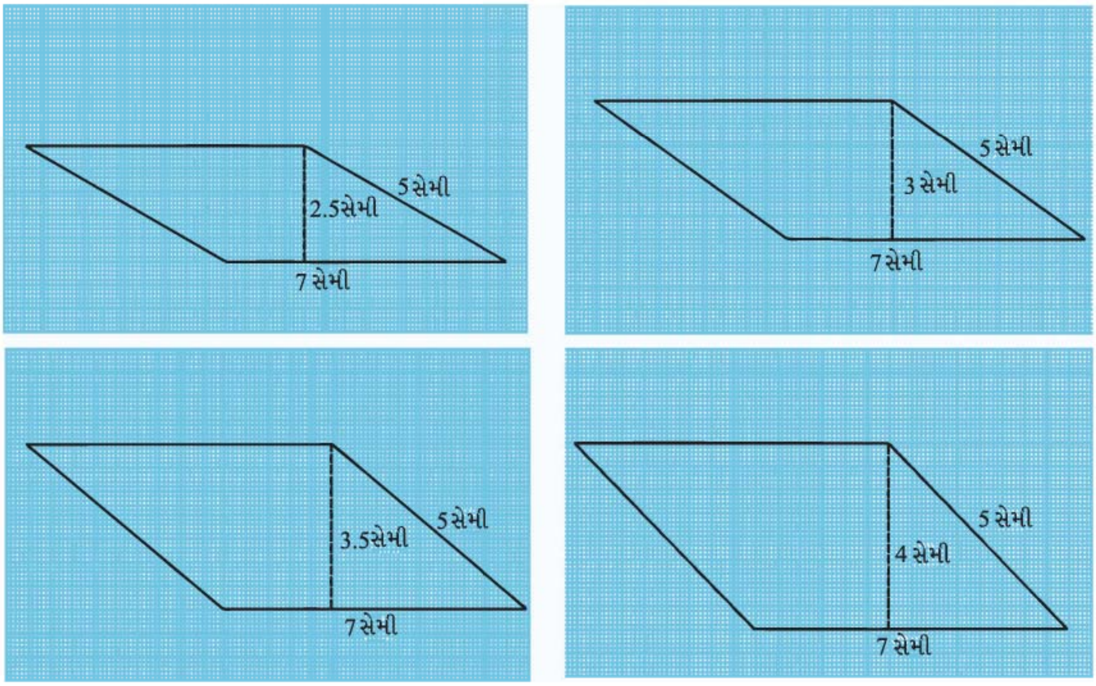
આ સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણનાં ક્ષેત્રફળ, આકૃતિની અંદરના ભાગમાં આવેલા ચોરસની ગણતરી કરીને શોધો અને બાજુઓને માપીને તેની પરિમિતિ પણ શોધો.

નીચેનું કોષ્ટક પૂર્ણ કરો.

સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણ	આધાર સંખ્યા	ઊંચાઈ	ક્ષેત્રફળ	પરિમિતિ
(a)	5 એકમ	3 એકમ	$5 \times 3 = 15$ ચો એકમ	
(b)				
(c)				
(d)				
(e)				
(f)				
(g)				

તમે જોશો કે આ બધા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ક્ષેત્રફળ સમાન છે પરંતુ તેમની પરિમિતિ ભિન્ન છે.

હવે, નીચેના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ જુઓ, જેમની બાજુઓ 7 સેમી અને 5 સેમી માપની છે. (આકૃતિ 11.13)



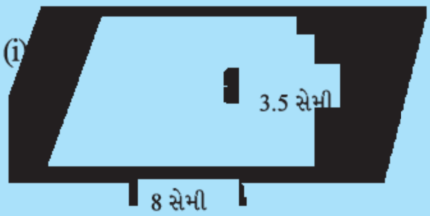
આકૃતિ 11.13

આ દરેક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની પરિમિતિ અને ક્ષેત્રફળ શોધો. તમારા પરિણામોનું પૃથક્કરણ કરો. તમે જોશો કે આ સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણનાં ક્ષેત્રફળ ભિન્ન છે પરંતુ તેમની પરિમિતિ સમાન છે.

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે તમારે માત્ર તેનો આધાર અને અનુરૂપ ઊંચાઈ જાણવી જરૂરી છે.

પ્રયત્ન કરો

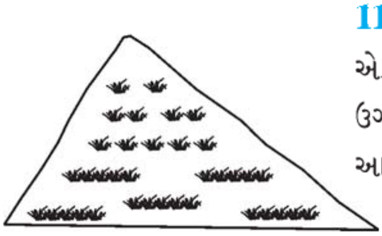
નીચેના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનાં ક્ષેત્રફળો શોધો.

(i)


(ii)


(iii) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCDમાં, AB = 7.2 સેમી અને AB પર Cમાંથી દોરેલા લંબનું માપ 4.5 સેમી છે.

11.4 ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ



એક માળી એક ત્રિકોણાકાર બાગના આખા ભાગમાં ઘાસ ઉગાડવાનો ખર્ચ જાણવા માગે છે.

આ માટે આપણે ત્રિકોણાકાર પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ જાણવું જરૂરી છે.

ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ મેળવવા માટેની રીત શોધીએ.

CKIR4S

એક કાગળ પર એક વિષમબાજુ ત્રિકોણ દોરો. આ ત્રિકોણાકારને કાપી લો. તેને બીજા કાગળ પર મૂકી તેના જ માપનો બીજો ત્રિકોણાકાર કાપો. હવે તમારી પાસે સમાન માપના બે વિષમબાજુ ત્રિકોણ છે. શું આ બંને ત્રિકોણ એકરૂપ છે ?

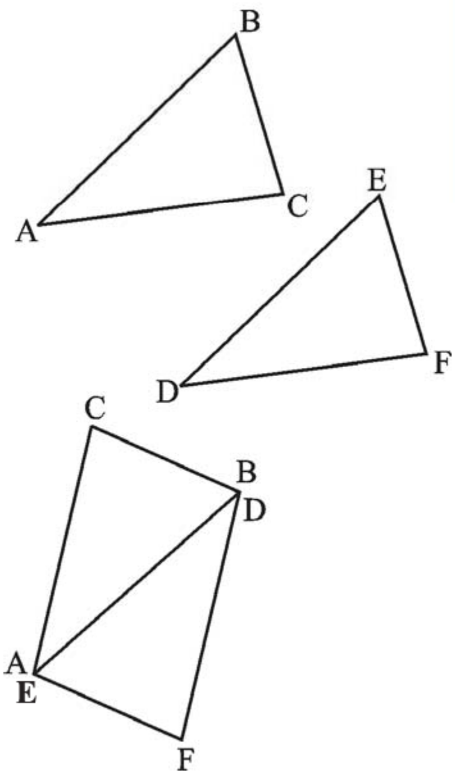
એક ત્રિકોણને ત્રિકોણ બીજા ઉપર એવી રીતે મૂકો કે જેથી બરાબર બંધબેસતો આવે. તમારે કદાચ બેમાંથી એક ત્રિકોણને પરિભ્રમણ કરાવવું પડે.

હવે બંને ત્રિકોણને એ રીતે ગોઠવો કે બંનેની અનુરૂપ બાજુઓની એક જોડ એકબીજા સાથે જોડાય. (આકૃતિ 11.14)

આ રીતે બનતી આકૃતિ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે ?

દરેક ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ક્ષેત્રફળ સાથે સરખાવો. ત્રિકોણના આધાર અને ઊંચાઈને, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના આધાર અને ઊંચાઈ સાથે સરખાવો.

તમને જણાશે કે બંને ત્રિકોણનાં ક્ષેત્રફળોનો સરવાળો, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ક્ષેત્રફળ જેટલો છે. ત્રિકોણના આધાર અને ઊંચાઈ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના અનુક્રમે આધાર અને ઊંચાઈ જેટલા છે.



આકૃતિ 11.14

દરેક ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}$ (સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ)

$= \frac{1}{2}$ (આધાર $\times$ ઊંચાઈ)

(કારણ કે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ = આધાર $\times$ ઊંચાઈ)

$= \frac{1}{2}(b \times h)$ (અથવા ટૂંકમાં $\frac{1}{2}bh$)

પ્રયત્ન કરો

1. ઉપરની પ્રવૃત્તિ જુદા જુદા પ્રકારના ત્રિકોણ લઈને કરો.
2. જુદા જુદા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ લો. તે દરેકને તેના કોઈ પણ એક વિકર્ણ પર કાપીને બે ત્રિકોણમાં વિભાજિત કરો. આ ત્રિકોણો એકરૂપ છે ?

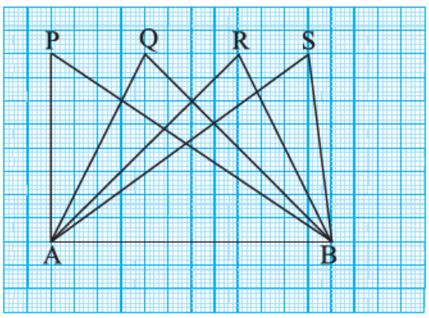
બાજુની આકૃતિ 11.15માં બધા ત્રિકોણનો આધાર AB = 6 સેમી છે.

દરેક ત્રિકોણની ABને અનુરૂપ ઊંચાઈ વિશે તમે શું કહી શકો ?

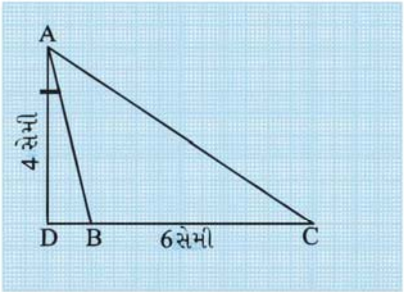
બધા ત્રિકોણનાં ક્ષેત્રફળ સમાન છે એમ કહી શકાય ? હા.

બધા ત્રિકોણ એકરૂપ પણ છે ? ના.

આપણે તારણ કાઢીએ કે બધા એકરૂપ ત્રિકોણનાં ક્ષેત્રફળ સરખાં છે પરંતુ સરખાં ક્ષેત્રફળવાળા ત્રિકોણ, એકરૂપ હોવા જરૂરી નથી.



આકૃતિ 11.15



આકૃતિ 11.16

6 સેમી આધારવાળો ગુરુકોણ ત્રિકોણ ABC લો. (આકૃતિ 11.16) તેની ઊંચાઈ AD કે જે શિરોબિંદુ Aમાંથી દોરેલો લંબ છે, તે ત્રિકોણની બહારના ભાગમાં છે.

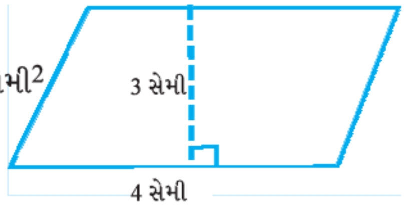
શું તમે આ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ ગણી શકો ?

ઉદાહરણ 6 એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની એક બાજુ અને તેને અનુરૂપ ઊંચાઈ અનુક્રમે 4 સેમી અને 3 સેમી છે. તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ આધાર(b)ની લંબાઈ = 4 સેમી અને ઊંચાઈ (h) = 3 સેમી આપેલાં છે.

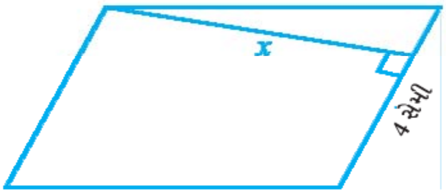
સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ = $b \times h$

= 4×3 સેમી = 12 સેમી^{2}



આકૃતિ 11.17

ઉદાહરણ 7 જો એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ 24 સેમી^{2} અને આધાર 4 સેમી હોય, તો તેની ઊંચાઈ 'x' શોધો.



આકૃતિ 11.18

ઉકેલ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ = $b \times h$

આથી, $24 = 4 \times x$ (આકૃતિ 11.18)

અથવા $\frac{24}{4} = x$ અથવા $x = 6$ સેમી

આમ, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની ઊંચાઈ 6 સેમી છે.

ઉદાહરણ 8 સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCDની બે બાજુઓ 6 સેમી અને 4 સેમી છે. આધાર CDને અનુરૂપ ઊંચાઈ 3 સેમી છે.

(i) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો. (ii) આધાર ADને અનુરૂપ ઊંચાઈ શોધો (આકૃતિ 11.19).

ઉકેલ

(i) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ = $b \times h$

= 6 સેમી $\times$ 3 સેમી = 18 સેમી^{2}

(ii) આધાર (b) = 4 સેમી, ઊંચાઈ = x ધારો.

ક્ષેત્રફળ = 18 સેમી^{2}

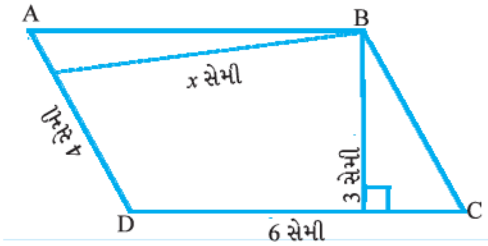
સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ = $b \times x$

$18 = 4 \times x$

$\frac{18}{4} = x$

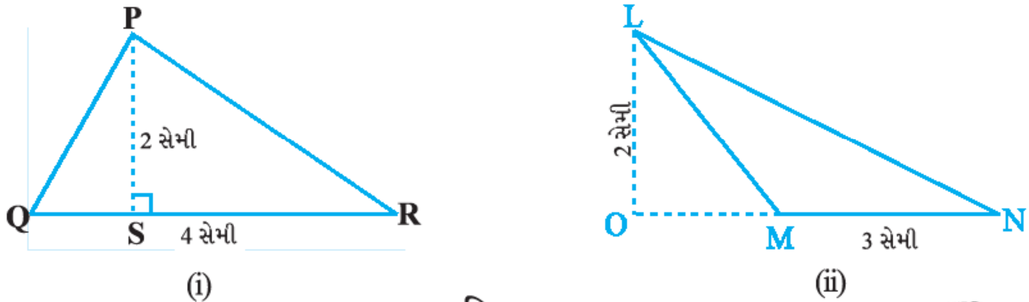
$\therefore x = 4.5$ સેમી

આથી, આધાર ADને અનુરૂપ ઊંચાઈ = 4.5 સેમી



આકૃતિ 11.19

ઉદાહરણ 9 નીચેના ત્રિકોણનાં ક્ષેત્રફળ શોધો (આકૃતિ 11.20).



આકૃતિ 11.20

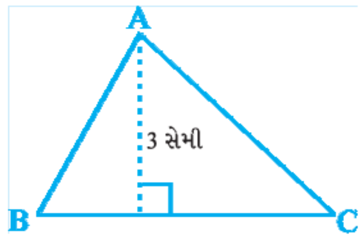
ઉકેલ (i) ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}\, bh = \frac{1}{2} \times \text{QR} \times \text{PS}$

$= \frac{1}{2} \times 4$ સેમી $\times\, 2$ સેમી $= 4$ સેમી^{2}

(ii) ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}\, bh = \frac{1}{2} \times \text{MN} \times \text{LO}$

$= \frac{1}{2} \times 3$ સેમી $\times\, 2$ સેમી $= 3$ સેમી^{2}

ઉદાહરણ 10 જો ΔABCનું ક્ષેત્રફળ 36 સેમી^{2} હોય અને ઊંચાઈ AD = 3 સેમી હોય, તો BC શોધો (આકૃતિ 11.21).



આકૃતિ 11.21

ઉકેલ ઊંચાઈ = 3 સેમી, ક્ષેત્રફળ = 36 સેમી^{2}

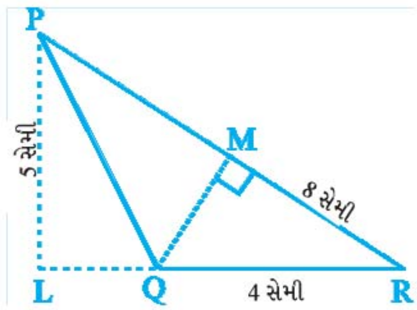
ત્રિકોણ ABCનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}\, bh$

અથવા, $36 = \frac{1}{2} \times b \times 3$ એટલે કે, $b = \frac{36 \times 2}{3} = 24$ સેમી

આથી, BC = 24 સેમી

ઉદાહરણ 11 જો ΔPQRમાં PR = 8 સેમી, QR = 4 સેમી PL = 5 સેમી છે (આકૃતિ 11.22).

(i) ΔPQRનું ક્ષેત્રફળ અને (ii) QM શોધો.



આકૃતિ 11.22

ઉકેલ

(i) QR = આધાર = 4 સેમી, PL = ઊંચાઈ = 5 સેમી

ત્રિકોણ PQRનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}\, bh$

$= \frac{1}{2} \times 4$ સેમી $\times\, 5$ સેમી $= 10$ સેમી^{2}

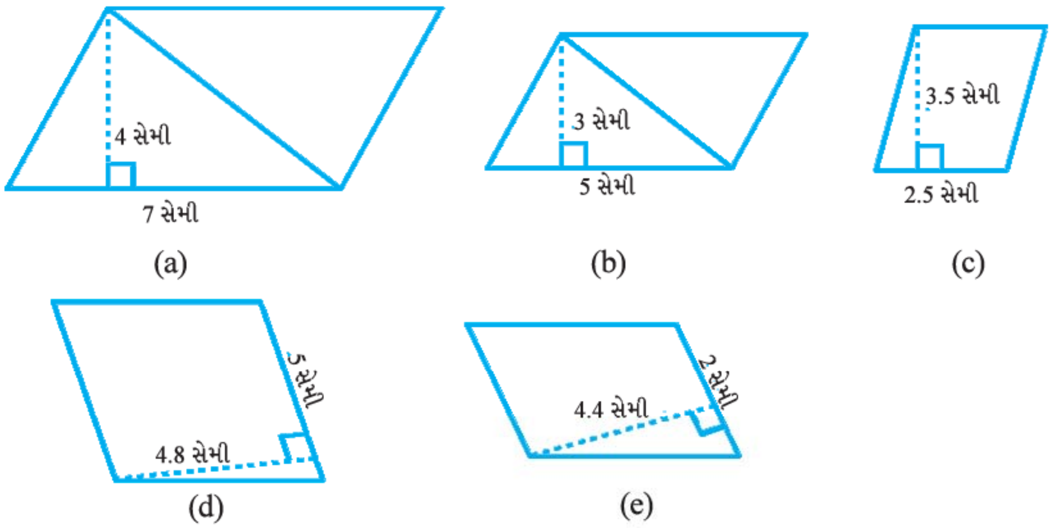
(ii) PR = આધાર = 8 સેમી, QM = ઊંચાઈ = ? ક્ષેત્રફળ = 10 સેમી^{2}

ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \times b \times h$ એટલે કે $10 = \frac{1}{2} \times 8 \times h$

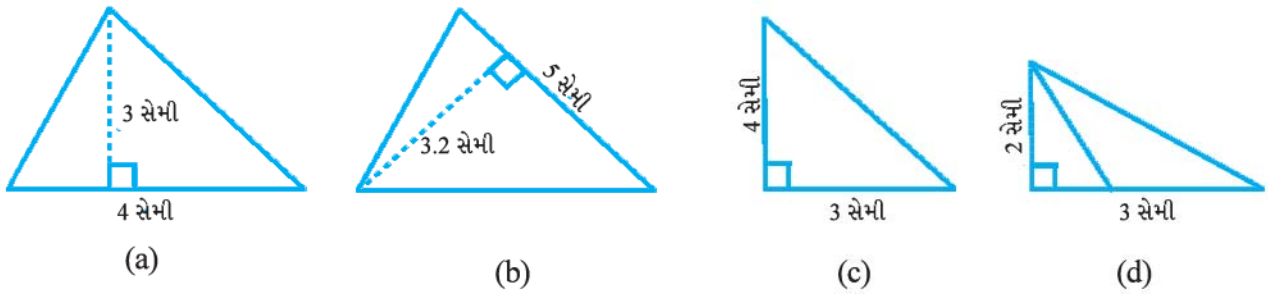
$h = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2.5$ આમ, QM = 2.5 સેમી

સ્વાધ્યાય 11.2

1. નીચેના દરેક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનાં ક્ષેત્રફળ શોધો :



2. નીચેના દરેક ત્રિકોણનાં ક્ષેત્રફળ શોધો :

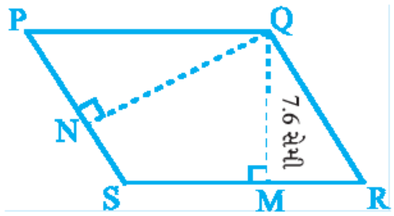


3. ખૂટતાં મૂલ્યો શોધો :

અનુક્રમ નંબર	આધાર	ઊંચાઈ	સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ
a.	20 સેમી		246 સેમી^{2}
b.		15 સેમી	154.5 સેમી^{2}
c.		8.4 સેમી	48.72 સેમી^{2}
d.	15.6 સેમી		16.38 સેમી^{2}

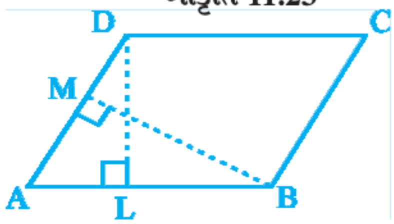
4. ખૂટતાં મૂલ્યો શોધો :

આધાર	ઊંચાઈ	ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ
15 સેમી		87 સેમી^{2}
	31.4 મિમી	1256 મિમી^{2}
22 સેમી		170.5 સેમી^{2}



આકૃતિ 11.23

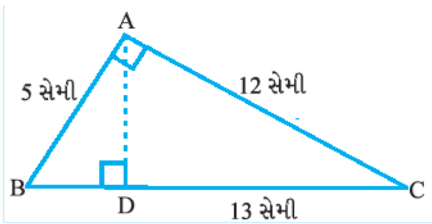
5. PQRS સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે (આકૃતિ 11.23). Qમાંથી SR પરની ઊંચાઈ QM છે અને Qમાંથી PS પરની ઊંચાઈ QN છે. જો SR = 12 સેમી અને QM = 7.6 સેમી હોય તો
(a) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ PQRSનું ક્ષેત્રફળ
(b) જો PS = 8 સેમી હોય તો QN શોધો.



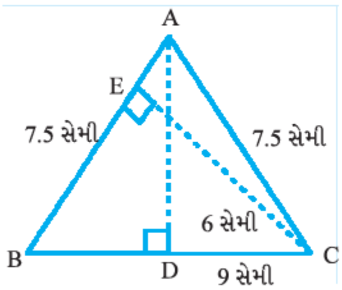
આકૃતિ 11.24

6. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCDમાં DL અને BM અનુક્રમે બાજુઓ AB અને AD પરની ઊંચાઈઓ છે (આકૃતિ 11.24). જો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ 1470 સેમી^{2} હોય અને AB = 35 સેમી તથા AD = 49 સેમી હોય, તો BM અને DLની લંબાઈઓ શોધો.

7. ΔABCમાં $\angle$A કાટખૂણો છે. (આકૃતિ 11.25). AD, BCને લંબ છે. જો AB = 5 સેમી, BC = 13 સેમી અને AC = 12 સેમી હોય તો ΔABCનું ક્ષેત્રફળ શોધો. ADની લંબાઈ પણ શોધો.



આકૃતિ 11.25



આકૃતિ 11.26

8. ΔABC સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે જેમાં AB = AC = 7.5 સેમી અને BC = 9 સેમી છે (આકૃતિ 11.26). Aમાંથી BC પરની ઊંચાઈ AD = 6 સેમી છે. ΔABC નું ક્ષેત્રફળ શોધો. C માંથી AB પરની ઊંચાઈ, એટલે કે CE કેટલી થશે ?

11.5 વર્તુળ (Circles)

દોડની રમત માટેનો રસ્તો બંને છેડે અર્ધ વર્તુળાકાર હોય છે (આકૃતિ 11.27).

જો કોઈ દોડવીર આવા રસ્તા પર બે ચક્ર પૂરાં કરે તો તેણે કાપેલું અંતર શોધી શકાય ? આપણે વર્તુળાકાર રસ્તા પર કપાતું અંતર શોધવા માટેની રીત શોધવી પડે.

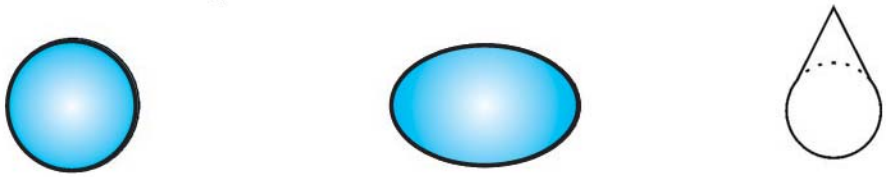
CKSM6F


આકૃતિ 11.27

11.5.1 વર્તુળનો પરિઘ (Circumference of a circle)

તાન્યાએ પૂઠાંમાંથી જુદાં જુદાં માપના કેટલાક વક્ર આકારો કાપ્યા. તેમને સુશોભિત કરવા માટે તાન્યા તે

આકારને ફરતે લેસ મૂકવા માગે છે. તેને દરેક માટે કેટલી લંબાઈની લેસ જોઈશે ? (આકૃતિ 11.28)



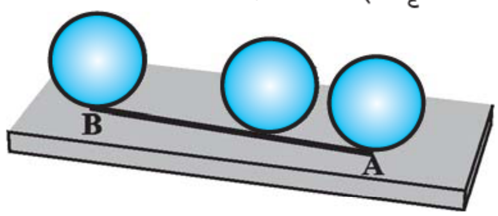
(a) (b) (c)

આકૃતિ 11.28

તમે વક્રરેખાની (આકૃતિ 11.28) લંબાઈ માપપટ્ટીની મદદથી માપી ન શકો, કારણ કે આ આકારો 'સીધા' નથી. તો શું કરીશું ?

આકૃતિ 11.29

આકૃતિ 11.28 (a) માં દર્શાવેલ આકાર માટે જરૂરી લેસ(પટ્ટી)ની લંબાઈ શોધવાનો એક રસ્તો આ પ્રમાણે છે. પૂંઠાના વક્ર આકારની ધાર પર કોઈ બિંદુ દર્શાવો. કાર્ડને ટેબલ પર મૂકો. બિંદુની સ્થિતિ ટેબલ પર પણ દર્શાવો (આકૃતિ 11.29).



આકૃતિ 11.30

હવે વર્તુળાકાર કાર્ડને ટેબલ પર એક સીધી રેખામાં એ રીતે ફેરવતાં જાઓ કે કાર્ડ પરનું બિંદુ ફરીથી ટેબલને સ્પર્શે. આ રેખા પરનું અંતર માપો. જરૂરી લેસની આટલી લંબાઈ છે (આકૃતિ 11.30). કાર્ડની ધાર પર નિશ્ચિત બિંદુથી શરૂ કરીને ફરીથી તે જ નિશ્ચિત બિંદુ સુધીનું એ અંતર છે.

વર્તુળાકાર વસ્તુની ધાર પર ચારે તરફ દોરી વીંટાળીને પણ તમે આ અંતર શોધી શકો.

વર્તુળાકાર પ્રદેશની (કિનારી) ફરતેનું અંતર, તેનો પરિઘ કહેવાય છે.

આ કરો

શીશીનું ઢાંકણ, બંગડી (કંગન) અથવા એવી કોઈ પણ વર્તુળાકાર વસ્તુ લઈ તેનો પરિઘ શોધો.

હવે, દોડવીરે રસ્તા પર કાપેલું અંતર તમે આ રીતે શોધી શકશો ?

હજુ પણ, દોરીના ઉપયોગથી આ રીતે વર્તુળાકાર રસ્તો કે બીજી કોઈ પણ વર્તુળાકાર વસ્તુનો પરિઘ માપવો ખૂબ મુશ્કેલ છે. વળી, આ માપ ચોક્કસ પણ નહિ હોય.

આથી, રૈખિક વસ્તુ કે આકાર માટે જેવું સૂત્ર છે તેવું કોઈક સૂત્ર આ શોધવા માટે જોઈએ.

ચાલો, આપણે જોઈએ કે વર્તુળનો વ્યાસ અને તેના પરિઘ વચ્ચે કોઈ સંબંધ છે કે નહિ.

નીચેનું કોષ્ટક જુઓ : ભિન્ન ત્રિજ્યાવાળાં છ વર્તુળ દોરો અને દોરીની મદદથી તેમનો પરિઘ શોધો. વળી, પરિઘ અને વ્યાસનો ગુણોત્તર પણ મેળવો.

વર્તુળ	ત્રિજ્યા	વ્યાસ	પરિઘ	પરિઘ અને વ્યાસનો ગુણોત્તર
1.	3.5 સેમી	7.0 સેમી	22.0 સેમી	$\frac{22}{7} = 3.14$

2.	7.0 સેમી	14.0 સેમી	44.0 સેમી	$\frac{44}{14} = 3.14$
3.	10.5 સેમી	21.0 સેમી	66.0 સેમી	$\frac{66}{21} = 3.14$
4.	21.0 સેમી	42.0 સેમી	132.0 સેમી	$\frac{132}{42} = 3.14$
5.	5.0 સેમી	10.0 સેમી	32.0 સેમી	$\frac{32}{10} = 3.2$
6.	15.0 સેમી	30.0 સેમી	94.0 સેમી	$\frac{94}{30} = 3.13$

આ કોષ્ટક પરથી તમે શું અનુમાન કરી શકો ? શું આ ગુણોત્તર લગભગ સરખો છે ? હા.

શું તમે એમ કહી શકો કે વર્તુળનો પરિઘ હંમેશાં તેના વ્યાસના ત્રણ ગણા કરતાં વધુ હોય છે ? હા.

આ ગુણોત્તર અચળ છે અને તેને π (પાઇ) વડે દર્શાવાય છે. તેની આશરે કિંમત $\frac{22}{7}$ અથવા 3.14 છે.

આમ, આપણે કહી શકીએ કે $\frac{C}{d} = \pi$ જ્યાં 'C' એટલે પરિઘ અને 'd' એટલે વ્યાસ.

અથવા, $C = \pi d$

આપણે જાણીએ છીએ કે વર્તુળનો વ્યાસ, તેની ત્રિજ્યા કરતાં બમણો છે એટલે કે, $d = 2r$

આથી, $C = \pi d = \pi \times 2r$ અથવા $C = 2\pi r$

પ્રયત્ન કરો

આકૃતિ 11.31 માં

(a) કયા ચોરસની પરિમિતિ વધુ છે ?

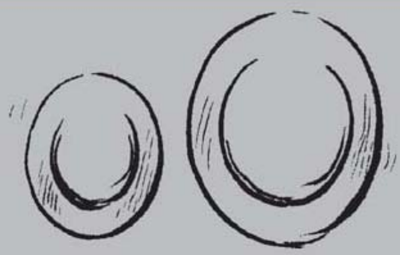
(b) નાના ચોરસની પરિમિતિ અને વર્તુળનો પરિઘ એ બેમાંથી કયું માપ મોટું છે ?


[redacted]

આકૃતિ 11.3[redacted]

આ કરો

આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે એક નાની અને એક મોટી પ્લેટ લો. બંનેને ટેબલની સપાટી પર એક વાર ગબડાવો. એક ચક્રમાં કઈ પ્લેટ વધુ અંતર કાપે છે ? ટેબલની આખી સપાટી પર ફરવામાં કઈ પ્લેટને ઓછાં ચક્કર ફરવા પડશે ?



ઉદાહરણ 12 10 સેમી વ્યાસવાળા વર્તુળનો પરિઘ કેટલો ? ($\pi = 3.14$ લો)

ઉકેલ વર્તુળનો વ્યાસ (d) = 10 સેમી

વર્તુળનો પરિઘ = πd

$= 3.14 \times 10 = 31.4$ સેમી

આથી, 10 સેમી વ્યાસવાળા વર્તુળનો પરિઘ 31.4 સેમી થાય.

ઉદાહરણ 13 14 સેમી ત્રિજ્યાવાળી વર્તુળાકાર તકતીનો પરિઘ કેટલો થાય ? ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)

ઉકેલ વર્તુળાકાર તકતીની ત્રિજ્યા (r) = 14 સેમી

તકતીનો પરિઘ = $2\pi r$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 14$ સેમી = 88 સેમી

આથી, વર્તુળાકાર તકતીનો પરિઘ = 88 સેમી

ઉદાહરણ 14 એક વર્તુળાકાર નળીની ત્રિજ્યા 10 સેમી છે. તેની આસપાસ એકવાર વીંટાળવા માટે કેટલી લંબાઈની પટ્ટી જોઈશે ? ($\pi = 3.14$)

ઉકેલ નળીની ત્રિજ્યા (r) = 10 સેમી

જરૂરી પટ્ટીની લંબાઈ, નળીના પરિઘ જેટલી થાય.

નળીનો પરિઘ = $2\pi r$

$= 2 \times 3.14 \times 10$ સેમી

$= 62.8$ સેમી

જરૂરી પટ્ટીની લંબાઈ = 62.8 સેમી

ઉદાહરણ 15 આકૃતિ 11.32 માં આપેલ આકારની પરિમિતિ શોધો. ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)

ઉકેલ અહીં આપણે ચોરસની દરેક બાજુ પરના અર્ધવર્તુળોના પરિઘ શોધવા જરૂરી છે. શું તમારે ચોરસની પરિમિતિ પણ શોધવી જરૂરી છે ? ના. આ આકૃતિની બહારની સીમારેખા અર્ધવતુર્ળોની બનેલી છે. દરેક અર્ધવર્તુળનો વ્યાસ 14 સેમી છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે :

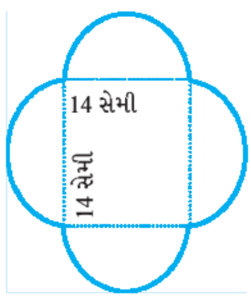
વર્તુળનો પરિઘ = πd

અર્ધવર્તુળનો પરિઘ = $\frac{1}{2}\pi d$

$= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 14$ સેમી = 22 સેમી

દરેક અર્ધવર્તુળનો પરિઘ = 22 સેમી

આથી આકૃતિની પરિમિતિ = 4×22 સેમી = 88 સેમી



આકૃતિ 11.32

ઉદાહરણ 16 7 સેમી ત્રિજ્યાવાળી વર્તુળાકાર તકતીને સુધાંશુ બે સરખા ભાગમાં વહેંચે છે. દરેક અર્ધવર્તુળાકાર તકતીની પરિમિતિ કેટલી થશે ? ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)

આકૃતિ 11.33

ઉકેલ અર્ધવર્તુળાકાર તકતીની પરિમિતિ શોધવા માટે (આકૃતિ 11.33) આપણે
(i) અર્ધવર્તુળનો પરિઘ અને (ii) વ્યાસ શોધવા પડે.

ત્રિજ્યા (r) = 7 સેમી આપેલ છે અને આપણે જાણીએ છીએ કે વર્તુળનો પરિઘ = $2\pi r$

આથી, અર્ધવર્તુળનો પરિઘ $= \frac{1}{2} \times 2\pi r = \pi r$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \text{ સેમી} = 22 \text{ સેમી}$$

વર્તુળનો વ્યાસ $= 2r = 2 \times 7$ સેમી = 14 સેમી

આમ, દરેક અર્ધવર્તુળ તકતીની પરિમિતિ = 22 સેમી + 14 સેમી = 36 સેમી

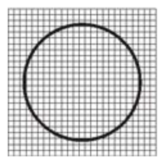
11.5.2 વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ (Area of Circle)

નીચેની વિગત ધ્યાનમાં લો :

- એક ખેડૂત, એક ખેતરની વચ્ચે 7 મીટર ત્રિજ્યાવાળો બાગ બનાવે છે. તેણે ખાતર ખરીદવાનું છે. 1 ચોરસ મીટર ક્ષેત્રફળ માટે 1 કિગ્રા ખાતર જરૂરી હોય તો તેણે કેટલું ખાતર ખરીદવું જોઈએ ?
- એક ચોરસ મીટરના ₹ 10 લેખે, 2 મીટર ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળાકાર ટેબલની સપાટીને પૉલિશ કરવાનો ખર્ચ કેટલો થશે ?

આવા કિસ્સાઓમાં શું શોધવું જરૂરી છે એ તમે કહી શકો ? ક્ષેત્રફળ કે પરિમિતિ ? આવા કિસ્સામાં આપણે વર્તુળાકાર ભાગનું ક્ષેત્રફળ (area) શોધવું જરૂરી છે.

ચાલો, આલેખપત્રનો ઉપયોગ કરીને આપણે વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ શોધીએ. એક આલેખપત્ર પર 4 સેમી ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દોરો આકૃતિ 11.34 વર્તુળની અંદર આવતાં ચોરસ ગણીને ક્ષેત્રફળ શોધો.

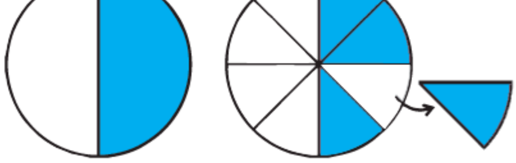


આકૃતિ 11.34

અહીં, આકૃતિ સીધી રેખાની નથી આથી આ રીતે આપણને વર્તુળના ક્ષેત્રફળનો અંદાજ મળી શકે.

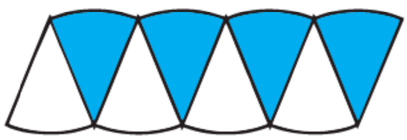
વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે બીજો રસ્તો છે.

એક વર્તુળ દોરો અને તેના અડધા ભાગને છાયાંકિત કરો [આકૃતિ 11.35(i)]. હવે વર્તુળને આઠ ભાગ થાય એ રીતે વાળો અને પડેલા સળ આગળથી કાપો [આકૃતિ 11.35(ii)].



(i) (ii)

આકૃતિ 11.35

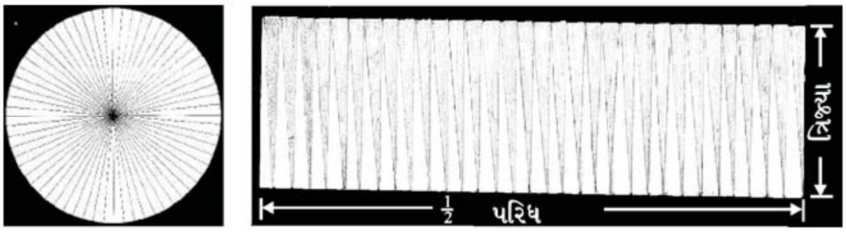


આકૃતિ 11.36

મળેલા ટુકડાઓને આકૃતિ 11.36 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ગોઠવો, જે લગભગ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ જેવો આકાર બને.

આપણે જેટલા વધુ વૃતાંશ કરીશું તેટલો આ આકાર, વધુ ને વધુ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ જેવો બનતો જશે.

ઉપરની જેમ જો આપણે વર્તુળને 64 ભાગમાં વિભાજિત કરીને આ વૃત્તાંશોને ગોઠવીએ તો તે લગભગ ચતુષ્કોણ આકાર થશે (આકૃતિ 11.37).



આકૃતિ 11.37

આ લંબચોરસની પહોળાઈ કેટલી છે ? લંબચોરસની પહોળાઈ વર્તુળની ત્રિજ્યા 'r' જેટલી છે.

આખા વર્તુળને 64 વૃત્તાંશોમાં વહેંચેલું છે અને બંને બાજુએ 32 વૃત્તાંશો ગોઠવ્યાં છે. આથી આ લંબચોરસની લંબાઈ, 32 વૃત્તાંશોની લંબાઈ જેટલી છે, જે પરિઘ કરતાં અડધી છે (આકૃતિ 11.37).

વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ = બનેલા લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ = $l \times b$

= (પરિઘનું અડધું) × ત્રિજ્યા = $\left(\frac{1}{2} \times 2\pi r\right) \times r = \pi r^2$

આથી, વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ = πr^2

પ્રયત્ન કરો

આલેખપત્ર પર ભિન્ન ત્રિજ્યાવાળાં વર્તુળ દોરો. અંદરનાં ચોરસની સંખ્યા ગણીને ક્ષેત્રફળ શોધો. સૂત્રના ઉપયોગથી પણ ક્ષેત્રફળ ગણો. તમારા બંને જવાબો સરખાવો.

ઉદાહરણ 17 30 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)

ઉકેલ ત્રિજ્યા $r = 30$ સેમી

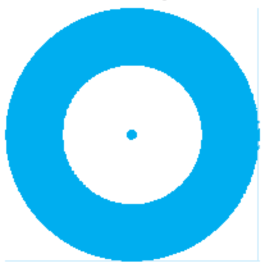
વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ = $\pi r^2 = 3.14 \times 30^2 = 2826$ સેમી^{2}

ઉદાહરણ 18 એક વર્તુળાકાર બાગનો વ્યાસ 9.8 મીટર છે. તેનું ક્ષેત્રફળ ગણો.

ઉકેલ વ્યાસ $d = 9.8$ મીટર, આથી ત્રિજ્યા $r = 9.8 \div 2 = 4.9$ મીટર

વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ = $\pi r^2 = \frac{22}{7} \times (4.9)^2$ મીટર^2 = $\frac{22}{7} \times 4.9 \times 4.9$ મીટર^2 = 75.46 મીટર^2

ઉદાહરણ 19 બાજુની આકૃતિમાં એક જ કેન્દ્રવાળાં બે વર્તુળ દર્શાવ્યાં છે. મોટા વર્તુળની ત્રિજ્યા 10 સેમી અને નાના વર્તુળની ત્રિજ્યા 4 સેમી છે.



(a) મોટા વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

(b) નાના વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

(c) બંને વર્તુળ વચ્ચેના રંગીન ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો ($\pi = 3.14$).

ઉકેલ

(a) મોટા વર્તુળની ત્રિજ્યા = 10 સેમી

આથી, મોટા વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ = πr^2

$= 3.14 \times 10 \times 10 = 314$ સેમી^{2}

(b) નાના વર્તુળની ત્રિજ્યા = 4 સેમી

આથી, નાના વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ = πr^2

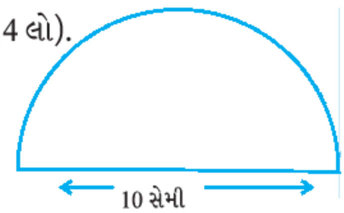
$= 3.14 \times 4 \times 4 = 50.24$ સેમી^{2}

(c) રંગીન ભાગનું ક્ષેત્રફળ = $(314 - 50.24)$ સેમી^{2} = 263.76 સેમી^{2}

સ્વાધ્યાય 11.3

1. નીચે વર્તુળની ત્રિજ્યા આપેલી છે. તેના પરથી વર્તુળનો પરિઘ શોધો : ($\pi = \frac{22}{7}$ લો)
   (a) 14 સેમી (b) 28 મિમી (c) 21 સેમી
2. નીચેનાં વર્તુળનાં ક્ષેત્રફળ ગણો, જ્યાં
   (a) ત્રિજ્યા = 14 મિમી ($\pi = \frac{22}{7}$ લો) (b) વ્યાસ = 49 મી
   (c) ત્રિજ્યા = 5 સેમી
3. એક વર્તુળાકાર કાગળનો પરિઘ 154 મી છે તો તેની ત્રિજ્યા શોધો. તેનું ક્ષેત્રફળ પણ શોધો. ($\pi = \frac{22}{7}$ લો)
4. એક માળી 21 મીટર વ્યાસવાળા બાગને ફરતેથી બંધ કરવા માગે છે. જો તે દોરડાને બાગ ફરતે બે વાર ફેરવવા માગતો હોય તો દોરડાની લંબાઈ શોધો. જો દોરડાની કિંમત એક મીટરના ₹ 4 હોય તો જરૂરી દોરડાની કિંમત શોધો ($\pi = \frac{22}{7}$ લો).

5. 4 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળાકાર કાગળમાંથી, 3 સેમી ત્રિજ્યાવાળો વર્તુળાકાર કાગળ દૂર કરવામાં આવે છે. બાકીના કાગળનું ક્ષેત્રફળ શોધો ($\pi = 3.14$ લો).
6. 1.5 મીટર વ્યાસવાળા વર્તુળાકાર ટેબલક્લોથની કિનારી પર, સાધના લેસ મૂકવા માગે છે, જરૂરી લેસની લંબાઈ શોધો અને જો 1 મીટર લેસના ₹ 15 હોય તો તેની કિંમત પણ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો).
7. બાજુમાં દર્શાવેલ અર્ધવર્તુળાકાર આકૃતિની વ્યાસ સહિત પરિમિતિ શોધો.

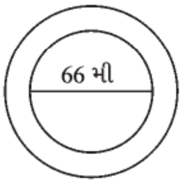


8. જો પૉલિશ કરવાનો દર ₹ 15/મી^{2} હોય તો 1.6 મીટર વ્યાસવાળા વર્તુળાકાર ટેબલની ઉપરની સપાટીને પૉલિશ કરવાનો ખર્ચ શોધો ($\pi = 3.14$ લો).
9. શ્રુતિએ 44 સેમી લંબાઈના તારને વર્તુળાકારમાં વાળ્યો. તે વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો. તેનું ક્ષેત્રફળ પણ શોધો. જો એ જ તારને ચોરસ આકારમાં વાળવામાં આવે તો તેની દરેક બાજુની લંબાઈ કેટલી થશે ? વર્તુળ અને ચોરસ એ બેમાંથી કઈ આકૃતિ વધુ ક્ષેત્રફળ આવરે છે ? ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)

10. 14 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળાકાર પૂંઠામાંથી, 3.5 સેમી ત્રિજ્યાવાળા બે વર્તુળ અને 3 સેમી લંબાઈ અને 1 સેમી પહોળાઈવાળો એક લંબચોરસ કાપવામાં આવે છે (બાજુની આકૃતિમાં દર્શાવ્યું છે). બાકીના પૂંઠાનું ક્ષેત્રફળ ગણો ($\pi = \frac{22}{7}$ લો).

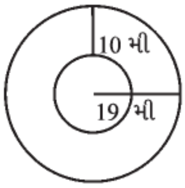
11.6 સેમી બાજુવાળા ચોરસ આકારના એલ્યુમિનિયમ પતરામાંથી 2 સેમી ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ કાપવામાં આવે છે. બાકીના પતરાનું ક્ષેત્રફળ કેટલું ? ($\pi = 3.14$ લો.)

12.એક વર્તુળનો પરિઘ 31.4 સેમી છે. તેની ત્રિજ્યા અને ક્ષેત્રફળ ગણો. ($\pi = 3.14$ લો).



13.એક વર્તુળાકાર ફૂલનો બાગ, ચારે બાજુથી 4 મીટર પહોળા રસ્તાથી ઘેરાયેલો છે. બાગનો વ્યાસ 66 મીટર છે. રસ્તાનું ક્ષેત્રફળ કેટલું થાય ? ($\pi = 3.14$ લો.)

14.એક વર્તુળાકાર ફૂલના બાગનું ક્ષેત્રફળ 314 મીટર^2 છે. બાગના કેન્દ્રમાં મૂકેલ પાણી છાંટવાનું મશીન, 12 મીટર ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળાકાર ભાગ પર પાણી છાંટી શકે છે. આ મશીન, આખા બાગને પાણી છાંટી શકે ? ($\pi = 3.14$ લો.)



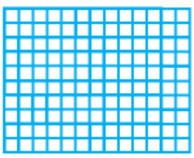
15.બાજુની આકૃતિમાં દર્શાવેલ અંદરના અને બહારનાં વર્તુળોના પરિઘ શોધો ($\pi = 3.14$ લો).

16.352 મીટર અંતર કાપવા માટે, 28 સેમી ત્રિજ્યાવાળાં પૈડાંએ કેટલા આંટા ફરવું પડે ? ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)

17.વર્તુળાકાર ચંદાવાળી ઘડિયાળનો મિનિટકાંટો 15 સેમી લાંબો છે. આ કાંટાનું ટોચનું બિંદુ 1 કલાકમાં કેટલું અંતર કાપશે ? ($\pi = 3.14$ લો.)

11.6 એકમનું રૂપાંતર (Conversion of Units)

CL2I83



આકૃતિ 11.38

આપણે જાણીએ છીએ કે 1 સેમી = 10 મિમી. શું તમે કહી શકો કે 1 સેમી^{2} બરાબર કેટલા મિમી^{2} થાય ? આપણે આના પ્રશ્નો વિશે વિચારીએ અને જાણીએ કે ક્ષેત્રફળનાં માપનમાં એકમોનું રૂપાંતર કેવી રીતે કરવું ?

આલેખપત્ર પર 1 સેમી બાજુવાળો ચોરસ દોરો (આકૃતિ 11.38). તમને જણાશે કે આ 1 સેમી બાજુવાળો ચોરસ, 100 ચોરસોમાં વિભાજિત છે જે દરેકની બાજુ 1 મિમીની છે.

આથી, 1 સેમી^{2} = 100 × 1 મિમી^{2}

અથવા 1 સેમી^{2} = 100 મિમી^{2}

તે જ રીતે, 1 મી^{2} = 1મી × 1 મી

= 100 સેમી × 100 સેમી (કારણ કે 1 મીટર = 100 સેમી)

= 10000 સેમી^{2}

હવે તમે 1 કિમી^{2} ને મી^{2} માં ફેરવી શકો ?

મેટ્રિક પદ્ધતિમાં, જમીનના ક્ષેત્રફળનું માપ હેક્ટરમાં મપાય છે.

100 મીટર લંબાઈની બાજુવાળા ચોરસનું ક્ષેત્રફળ 1 હેક્ટર છે.

આથી, 1 હેક્ટર = 100 × 100 મી^{2} = 10,000 મી^{2}

આપણે જ્યારે ક્ષેત્રફળના એક એકમને, નાના એકમમાં ફેરવીએ ત્યારે મળતા અંક મોટા હોય છે.

દા.ત. 1000 સેમી^{2} = 1000 × 100 મિમી^{2}

= 100000 મિમી^{2}

પરંતુ જ્યારે આપણે ક્ષેત્રફળના એકમને મોટા એકમમાં ફેરવીએ ત્યારે મોટા એકમના અંકો નાના મળશે.

દા.ત. 1000 સેમી$^2 = \frac{1000}{10000}$ મી$^2 = 0.1$ મી^{2}

પ્રયત્ન કરો

નીચે આપેલા માપનું રૂપાંતર કરો :

(i) 50 સેમી^{2} ને મિમી^{2} માં (ii) 2 હે ને મી^{2} માં (iii) 10 મી^{2} ને સેમી^{2} માં

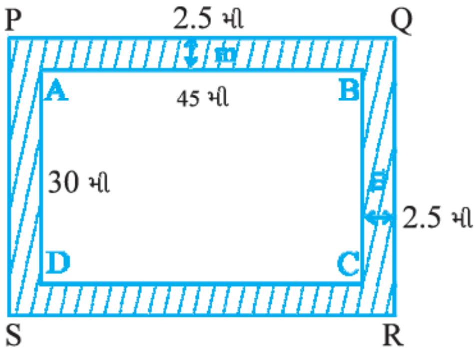
(iv) 1000 સેમી^{2} ને મી^{2} માં

11.7 ઉપયોગો (Applications)

તમે ઘણીવાર અવલોકન કર્યું હશે કે બાગમાં અથવા ફરવાની જગ્યાએ, ચારે બાજુએ અથવા વચ્ચે ચાલવા માટે રસ્તા બનાવેલા હોય છે. ચિત્રને ફ્રેમમાં મઢવામાં આવે ત્યારે પણ ચારે બાજુએ જગ્યા છોડવામાં આવે છે.

જ્યારે આપણે ચાલવાના રસ્તા કે ફ્રેમ બનાવવાનો ખર્ચ ગણવો હોય ત્યારે આપણે તેનું ક્ષેત્રફળ જાણવું જરૂરી છે.

ઉદાહરણ 20 એક લંબચોરસ બાગ 45 મીટર લંબાઈ અને 30 મીટર પહોળાઈ ધરાવે છે. બાગની ફરતે બહારથી 2.5 મીટર પહોળો રસ્તો બનાવવામાં આવે છે. આ રસ્તાનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



ઉકેલ ધારો કે ABCD, લંબચોરસ બાગ છે અને છાયાંકિત ભાગ, 2.5 મી પહોળો રસ્તો બતાવે છે. રસ્તાનું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે આપણે (લંબચોરસ PQRSનું ક્ષેત્રફળ - લંબચોરસ ABCD નું ક્ષેત્રફળ) શોધવું પડે.

આપેલી વિગત પ્રમાણે, PQ = (45 + 2.5 + 2.5) મી = 50 મી

PS = (30 + 2.5 + 2.5) મી = 35 મી

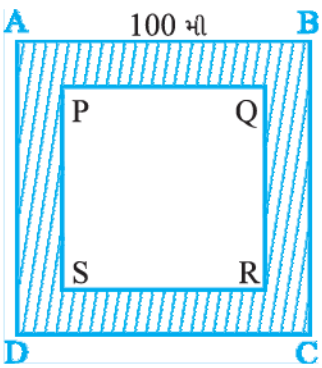
લંબચોરસ ABCDનું ક્ષેત્રફળ = $l \times b = 45 \times 30$ મી$^2 = 1350$ મી^{2}

લંબચોરસ PQRSનું ક્ષેત્રફળ = $l \times b = 50 \times 35$ મી$^2 = 1750$ મી^{2}

રસ્તાનું ક્ષેત્રફળ = લંબચોરસ PQRSનું ક્ષેત્રફળ – લંબચોરસ ABCDનું ક્ષેત્રફળ

= $(1750 - 1350)$ મી$^2 = 400$ મી^{2}

ઉદાહરણ 21 100 મી બાજુવાળા ચોરસ બાગને ફરતે અંદરથી 5 મીટર પહોળો રસ્તો છે. રસ્તાનું ક્ષેત્રફળ શોધો. દર 10 મી^{2}ના ₹ 250 પ્રમાણે આ રસ્તા પર સિમેન્ટ પાથરવાનો ખર્ચ પણ શોધો.



ઉકેલ ધારો કે ABCD, 100 મી બાજુવાળો ચોરસ બાગ છે. છાયાંકિત ભાગ, 5 મી પહોળો રસ્તો દર્શાવે છે.

PQ = 100 – (5 + 5) મી = 90 મી.

ચોરસ ABCDનું ક્ષેત્રફળ = (બાજુ)$^2 = (100)^2$ મી$^2 = 10000$ મી^{2}

ચોરસ PQRSનું ક્ષેત્રફળ = (બાજુ)$^2 = (90)^2$ મી$^2 = 8100$ મી^{2}

આથી રસ્તાનું ક્ષેત્રફળ = (10,000 – 8100) મી$^2 = 1900$ મી^{2}

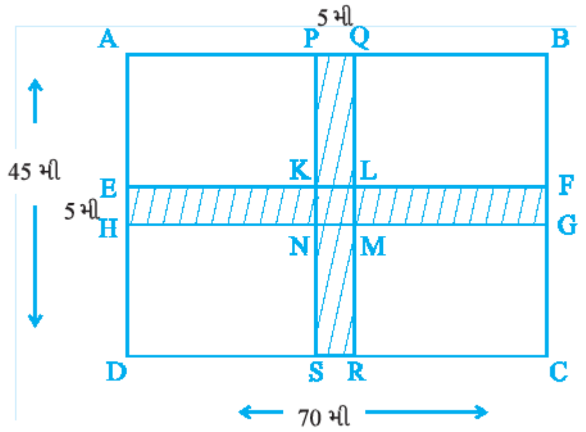
સિમેન્ટ પાથરવાનો દર 10 મી^{2} ના ₹ 250

માટે, 1 મી^{2} ના ₹ $\frac{250}{10}$

આથી, 1900મી^{2} પર સિમેન્ટ પાથરવાનો ખર્ચ = ₹ $\frac{250}{10} \times 1900$ = ₹ 47,500

ઉદાહરણ 22 70 મી લંબાઈ અને 45 મી પહોળાઈવાળા લંબચોરસ બાગની અંદર તેની બાજુઓને સમાંતર અને પરસ્પર લંબ એવા બે રસ્તા તેના કેન્દ્રમાંથી બનાવેલા છે. રસ્તાની પહોળાઇ 5 મી છે. રસ્તાઓનું ક્ષેત્રફળ ગણો. આ રસ્તા બનાવવા માટેનો ખર્ચ, ₹ 105 પ્રતિ ચો.મીટર પ્રમાણે શોધો.

ઉકેલ રસ્તાઓનું ક્ષેત્રફળ એ છાયાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ છે એટલે કે લંબચોરસ PQRSનું ક્ષેત્રફળ અને લંબચોરસ EFGHનું ક્ષેત્રફળ. પરંતુ આમ ગણતી વખતે ચોરસ KLMNનું ક્ષેત્રફળ બે વાર ગણાય છે. જે બાદ કરવું પડે.



હવે, PQ = 5 મી અને PS = 45 મી

EH = 5 મી અને EF = 70 મી

KL = 5 મી અને KN = 5 મી

રસ્તાનું ક્ષેત્રફળ = લંબચોરસ PQRSનું ક્ષેત્રફળ + લંબચોરસ EFGHનું ક્ષેત્રફળ–ચોરસ KLMNનું ક્ષેત્રફળ

$= PS \times PQ + EF \times EH - KL \times KN$

$= (45 \times 5 + 70 \times 5 - 5 \times 5)$ મી^{2}

$= (225 + 350 - 25)$ મી^{2} = 550 મી^{2}

રસ્તો બનાવવાનો ખર્ચ = ₹ 105×550 = ₹ 57,750.

સ્વાધ્યાય 11.4

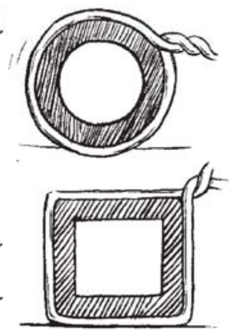
1. એક બાગ 90 મી લાંબો અને 75 મી પહોળો છે. તેની ફરતે ચારે તરફ બહારની બાજુએ 5 મી પહોળો રસ્તો બનાવવાનો છે. આ રસ્તાનું ક્ષેત્રફળ શોધો. બાગનું ક્ષેત્રફળ કેટલા હેક્ટર છે ?
2. 125 મી લંબાઈ અને 65 મી પહોળાઈ ધરાવતા એક લંબચોરસ બાગની ફરતે ચારે તરફ બહારની બાજુએ 3 મીટર પહોળો રસ્તો છે. આ રસ્તાનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
3. 8 સેમી લાંબા અને 5 સેમી પહોળા પૂંઠા પર એક ચિત્ર દોરેલું છે. પૂંઠા પર ચિત્રની ફરતે ચારે તરફ 1.5 સેમી હાંસિયો છોડેલો છે. આ હાંસિયાનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
4. 5.5 મી લાંબા અને 4 મી પહોળા ઓરડાની બહારની ચારે બાજુએ 2.25 મી પહોળો વરંડો બનાવેલ છે.
   (i) વરંડાનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
   (ii) વરંડાના ભોયતળિયા પર ₹ 200/મી^{2} પ્રમાણે સિમેન્ટ પાથરવાનો ખર્ચ શોધો.
5. 30 મી લંબાઈની બાજુવાળા ચોરસ બાગની અંદરની બાજુએ ચારે તરફ 1 મીટર પહોળો રસ્તો બનાવેલ છે.
   (i) રસ્તાનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
   (ii) બાગના રસ્તા સિવાયના ભાગમાં ₹ 40 / મી^{2} પ્રમાણે ઘાસ ઉગાડવાનો ખર્ચ શોધો.

6. 700 મીટર લંબાઈ અને 300 મીટર પહોળાઈ ધરાવતા બાગની મધ્યમાંથી પસાર થતા અને તેની બાજુઓને સમાંતર એવા 10 મી પહોળા બે પરસ્પર લંબ રસ્તા બનાવેલા છે. રસ્તાઓનું ક્ષેત્રફળ શોધો. રસ્તા સિવાયના બાગનું ક્ષેત્રફળ પણ શોધો. તમારા જવાબો હેક્ટરના માપમાં આપો.

7. 90 મીટર લંબાઈ અને 60 મીટર પહોળાઈ ધરાવતા ખેતરના મધ્યમાંથી પસાર થતા અને તેની બાજુઓને સમાંતર એવા 3 મીટર પહોળા બે પરસ્પર લંબ રસ્તા બનાવેલા છે.

(i) રસ્તાઓએ આવરેલું ક્ષેત્રફળ શોધો.

(ii) ₹ 110/મી^{2} પ્રમાણે રસ્તાઓ બનાવવાનો ખર્ચ શોધો.



8. પ્રજ્ઞાએ 4 સેમી ત્રિજ્યાવાળી એક વર્તુળાકાર નળીની ફરતે દોરી વીંટાળી (બાજુની આકૃતિ) અને જરૂરી લંબાઈની દોરી કાપી લીધી. હવે તેણે એ જ દોરીને 4 સેમીની બાજુ ધરાવતા ચોરસ ડબાની આસપાસ વીંટાળી (આકૃતિ જુઓ). શું તેની પાસે દોરી વધી હશે ? ($\pi = 3.14$)

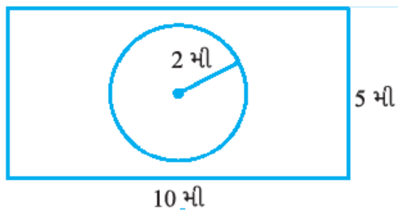
9. બાજુની આકૃતિમાં એક લંબચોરસ જમીન પરની લોનની મધ્યમાં ફૂલોનો એક વર્તુળાકાર બાગ દર્શાવેલો છે.

(i) બધી જમીનનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

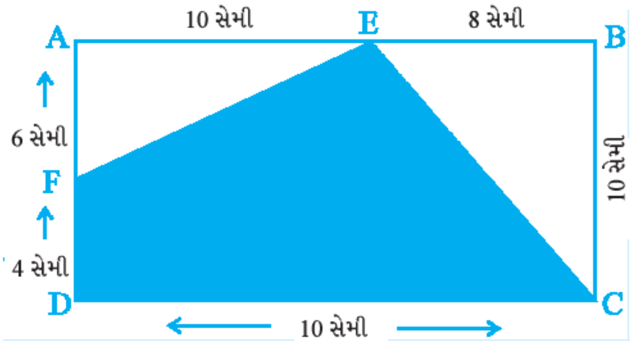
(ii) બાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

(iii) બાગ સિવાયની જગ્યાનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

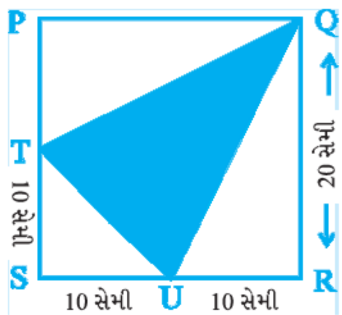
(iv) બાગનો પરિઘ શોધો.



10. નીચેની આકૃતિઓમાં છાયાંકિત ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



(i)



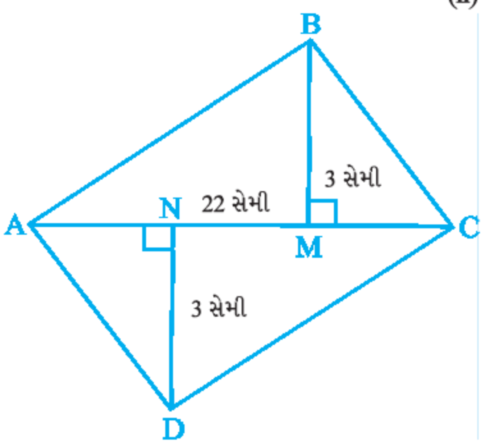
(ii)

11. ચતુષ્કોણ ABCDનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

અહીં, AC = 22 સેમી, BM = 3 સેમી,

DN = 3 સેમી અને

BM ⊥ AC તથા DN ⊥ AC છે.



આપણે શું ચર્ચા કરી ?

1. એક બંધ આકૃતિની સીમારેખાની લંબાઈ એ તેની પરિમિતિ છે જ્યારે તે આકૃતિએ સમતલમાં રોકેલી જગ્યાનું માપ એ તેનું ક્ષેત્રફળ છે.
2. અગાઉનાં વર્ષોમાં આપણે ચોરસ અને લંબચોરસની પરિમિતિ અને ક્ષેત્રફળ કેવી રીતે ગણવા તે શીખ્યાં છીએ. તેનાં સૂત્રો નીચે પ્રમાણે છે :
   (a) ચોરસની પરિમિતિ $= 4 \times$ બાજુ
   (b) લંબચોરસની પરિમિતિ $= 2 \times$ (લંબાઈ + પહોળાઈ)
   (c) ચોરસનું ક્ષેત્રફળ = બાજુ $\times$ બાજુ
   (d) લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ = લંબાઈ $\times$ પહોળાઈ
3. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ = આધાર $\times$ ઊંચાઈ
4. ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}$ (તેમાંથી બનતાં સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ)
   $= \frac{1}{2} \times$ આધાર $\times$ ઊંચાઈ
5. વર્તુળાકાર પ્રદેશની સીમારેખાનું માપ તેનો પરિઘ કહેવાય છે. વર્તુળનો પરિઘ $= \pi d$, જ્યાં $d =$ વર્તુળનો વ્યાસ અને $\pi = \frac{22}{7}$ અથવા $\pi = 3.14$ (આશરે).
6. વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ $= \pi r^2$, જ્યાં $r =$ વર્તુળની ત્રિજ્યા
7. અગાઉના અભ્યાસના આધારે, લંબાઈના એકમોના રૂપાંતરના આધારે ક્ષેત્રફળના એકમોનું પણ રૂપાંતરણ કરી શકાય :
   1 સેમી^{2} = 100 મિમી^{2}, 1 મી^{2} = 10000 સેમી^{2}, 1 હેક્ટર = 10000 મી^{2}

પ્રકરણ 12

બીજગણિતીય પદાવલિ

FL99KM

12.1 પ્રસ્તાવના :

આપણે ધોરણ-6માં કેટલીક બીજગણિતીય અભિવ્યક્તિ શીખી ગયાં છીએ. જેવી કે $x + 3$, $y - 5$, $4x + 5$, $10y - 5$ વગેરે. આપણે જોયું કે અભિવ્યક્તિ આપણને કોયડાની રચના અને પ્રશ્નના ઉકેલ માટે કેટલી ઉપયોગી છે. કેટલીક અભિવ્યક્તિનાં ઉદાહરણ સરળ સમીકરણના પ્રકરણમાં આપણે જોઈ ગયાં છીએ.

અભિવ્યક્તિ એ બીજગણિતના પાયાનો ખ્યાલ છે. આ પ્રકરણમાં તેને આપણે બીજગણિતીય પદાવલિ તરીકે ઓળખીશું. તમે જ્યારે આ પ્રકરણનો અભ્યાસ કરશો ત્યારે તમે શીખશો કે બીજગણિતીય પદાવલિની રચના કેવી રીતે થાય છે, કેવી રીતે તેમાં પ્રક્રિયાઓ થાય છે, કેવી રીતે તેની કિંમત શોધી શકાય છે અને કેવી રીતે તે ઉપયોગી છે.

11.2 પદાવલિની રચના કેવી રીતે થાય છે ?

આપણે સારી રીતે જાણીએ છીએ કે ચલ શું છે ? આપણે x, y, l, m જેવા અક્ષરોનો ઉપયોગ ચલને દર્શાવવા માટે કરીએ છીએ. **ચલ** જુદી-જુદી કિંમતો ધારણ કરી શકે છે. તેની કિંમત ચોક્કસ હોતી નથી. બીજી બાજુ **અચલ**ને ચોક્કસ કિંમત હોય છે. 4, 100, (–17) વગેરે અચલનાં ઉદાહરણ છે.

ચલ અને અચલનાં જોડાણથી બીજગણિતીય પદાવલિ રચાય છે. આ માટે આપણે સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકાર જેવી ક્રિયાઓનો ઉપયોગ કરીએ છીએ. ખરેખર તો આપણે $4x + 5$, $10y - 20$ જેવી બીજગણિતીય પદાવલિ શીખી ગયાં છીએ. પદાવલિ $4x + 5$ આપણને ચલ x નો અચલ 4 સાથે ગુણાકાર કરી તેમાં 5 ઉમેરવાથી મળે છે. તે જ રીતે $10y - 20$ એ પહેલાં y નો 10 વડે ગુણાકાર કરી તેમાંથી 20 બાદ કરતાં મળે છે.

ઉપરની પદાવલિ ચલ અને અચલના જોડાણથી મેળવી શક્યા છીએ. આપણે એવી પદાવલિ મેળવીશું કે જેમાં ચલનું પોતાની સાથે અથવા બીજા ચલ સાથે જોડાણ થયેલું હોય. નીચેની પદાવલિ કેવી રીતે મેળવી છે તે જુઓ :

$$x^2, 2y^2, 3x^2 - 5, xy, 4xy + 7$$

(i) પદાવલિ x^2 એ ચલ xના તેની સાથેના ગુણાકાર વડે મળે છે.

$$x \times x = x^2$$

જેમ $4 \times 4 = 4^2$ લખીએ છીએ તેમ $x \times x = x^2$ લખાય. તેને સામાન્ય રીતે xનો વર્ગ એમ વંચાય છે.

(આગળ આપણે ઘાત અને ઘાતાંકના પ્રકરણમાં જોઈશું કે x^2 ને x ની બે ઘાત એમ વંચાય.)

તે જ રીતે આપણે $x \times x \times x = x^3$ લખીએ છીએ.

સામાન્ય રીતે x^3 ને ''xનો ઘન'' એમ વંચાય છે. x^3ને x ની ત્રણ ઘાત એમ પણ વંચાય.

$x, x^2, x^3, ...$ એ તમામ xમાંથી મળતી બીજગણિતીય પદાવલિ છે.

(ii) અભિવ્યક્તિ $2y^2$ એ y વડે મેળવાય છે : $2y^2 = 2 \times y \times y$

અહીં yનો y સાથે ગુણાકાર કરવાથી y^2 મળે છે અને પછી y^2 નો અચલ 2 સાથે ગુણાકાર કરવામાં આવે છે.

આ પ્રયત્ન કરો

નીચેનાં પદ કેવી રીતે મેળવવામાં આવે છે તે વર્ણવો.
$7xy + 5, x^2y, 4x^2 - 5x$

(iii) $3x^2 - 5$ માં પહેલાં x^2 લઈ તેને 3 વડે ગુણાકાર કરી $3x^2$ મેળવવામાં આવે છે. $3x^2$ માંથી 5 બાદ કરી છેવટે $3x^2 - 5$ મળે છે.

(iv) xy માં આપણે ચલ x નો બીજા ચલ y સાથે ગુણાકાર કરીએ છીએ. આમ, $x \times y = xy$.

(v) $4xy + 7$માં પહેલા xy લઈ તેનો 4 સાથે ગુણાકાર કરી $4xy$ મેળવી તેમાં 7 ઉમેરી $4xy + 7$ પદાવલી મેળવવામાં આવે છે.

12.3 પદાવલિના પદ (Terms of an Expression) :

CLBE9Q

આગળ આપણે જે અભિવ્યક્તિની રચના શીખી ગયાં તેની પદ્ધતિસરની રચના આપણે જોઈએ. આ માટે આપણને પદાવલિના **પદ** અને તેના **અવયવ**ની સમજણ હોવી જરૂરી છે.

$(4x + 5)$ અભિવ્યક્તિને લઈએ. આ પદાવલિની રચના માટે પહેલાં આપણે 4 અને x નો ગુણાકાર કરી તેમાં 5 ઉમેરીએ છીએ તે જ રીતે પદાવલિ $(3x^2 + 7y)$માં પહેલાં 3, x અને xનો ગુણાકાર કરી $3x^2$ મેળવીએ છીએ તે જ રીતે 7 અને y નો ગુણાકાર કરી $7y$ મેળવીએ છીએ. $3x^2$ અને $7y$ નો સરવાળો કરી આપેલ પદાવલિ મેળવીએ છીએ.

તમે જોયું હશે કે આપણે પદાવલિ જે બનાવી તે આ જ રીતે કરી છે. તેમાંના ભાગોને અલગ રીતે મેળવી અને પછી સરવાળો કરવામાં આવ્યો. પદાવલિના આ ભાગો કે જેને અલગ રીતે મેળવીને સરવાળો કરવામાં આવ્યો તે ભાગોને **પદ** તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. પદાવલિ $(4x^2 - 3xy)$ જુઓ. આપણે કહી શકીશું કે તેમાં બે પદ $4x^2$ અને $-3xy$ છે. $4x^2$ એ 4, x અને x નો ગુણાકાર જ્યારે પદ $(-3xy)$ એ (-3), x અને y નો ગુણાકાર છે.

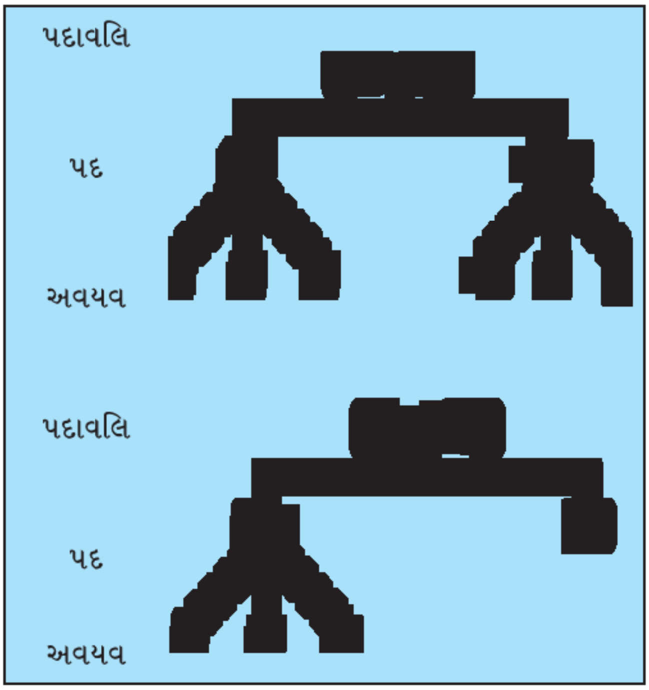
પદાવલિની રચના માટે પદોનો સરવાળો પદાવલિ $4x + 5$ એ પદ $4x$ અને 5નો સરવાળો કરી મેળવવામાં આવે છે. $4x^2$ અને $(-3xy)$નો સરવાળો કરી $(4x^2 - 3xy)$ મેળવવામાં આવે છે. કારણ કે $4x^2 + (-3xy) = 4x^2 - 3xy$.

> નોંધો કે ઋણ ચિહ્ન(–)નો પદમાં સમાવેશ કરેલ છે. પદાવલિ $4x^2 - 3xy$ માં આપણે પદ $(-3xy)$ લીધું છે $3xy$ નહીં અને તેથી જ આપણે પદ ઉમેરવું કે બાદ કરવું તે કહેવાની જરૂર નથી. પદાવલિની રચનામાં ઉમેરવું એમ કહેવું પૂરતું છે.

પદના અવયવ (Factors of a term)

આપણે જોઈ ગયાં કે પદાવલિ $(4x^2 - 3xy)$ એ બે પદ $4x^2$ અને $-3xy$ની બનેલી છે. પદ $4x^2$ એ 4, x અને x નો ગુણાકાર છે. આપણે કહીશું કે, 4, x અને x એ $4x^2$ ના અવયવ છે. આપેલું પદ એ તેના અવયવોનો ગુણાકાર છે. પદ $-3xy$ એ અવયવ -3, x અને y નો ગુણાકાર છે.

આપણે પદાવલિ અને તેના પદ તથા તે પદોના અવયવને ‘‘ટ્રી ચાર્ટ’’ (વૃક્ષ જેવી રચના) વડે સરળ અને સુંદર રીતે દર્શાવી શકીએ. ($4x^2 - 3xy$) પદાવલિનો ટ્રી ચાર્ટ બાજુની આકૃતિમાં બતાવેલ છે.



> નોંધો કે, ટ્રી ચાર્ટમાં આપણે તૂટક રેખાનો ઉપયોગ અવયવ અને રેખાનો ઉપયોગ પદ માટે કરીએ છીએ તેઓ ભેગી ન થાય.

પદાવલિ $5xy + 10$ માટે રેખાકૃતિ જુઓ.

અવયવ એ છે કે જેમનું આગળ અવયવીકરણ થઈ શકતું નથી. તેથી આપણે $5xy$ ને $5 \times xy$ લખી શકતાં નથી. કારણ કે xy નું અવયવીકરણ થઈ શકે છે. તે જ રીતે, x^3 એ પદ હોય તો તેને $x \times x \times x$ લખાશે, નહિ કે $x^2 \times x$. એ યાદ રાખો કે 1 ને અલગ અવયવ તરીકે લેવામાં આવતો નથી.

સહગુણક (Coefficient)

આપણે શીખી ગયાં કે પદને અવયવના ગુણાકાર વડે કેવી રીતે લખી શકાય. તેમાંનો એક અવયવ સંખ્યાત્મક અને બીજો બીજગણિતીય હશે (એટલે કે ચલને સમાવતા હશે). સંખ્યાત્મક અવયવને સંખ્યાત્મક સહગુણક અથવા પદના **સહગુણક** તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. તેને બાકીના પદ માટેનો સહગુણક કહે છે (જે દેખીતી રીતે પદના બીજગણિતીય અવયવોથી મળે છે). આમ, $5xy$ માં 5 એ પદનો સહગુણક છે. તે xy નો પણ સહગુણક છે. $10xyz$ પદમાં 10 એ xyz નો સહગુણક છે. પદ $-7x^2y^2$ માં -7 એ x^2y^2 નો સહગુણક છે.

> **આ પ્રયત્ન કરો**
>
> [redacted]
>
> 1. નીચેની પદાવલિઓમાં કયાં પદો છે ? પદો કેવી રીતે બન્યા છે તે દર્શાવો. દરેક પદાવલિ માટે ટ્રી ચાર્ટ બનાવો :
>
> $8y + 3x^2$, $7mn - 4$, $2x^2y$
>
> 2. 4 પદો વાળી ત્રણ પદાવલિઓ લખો.

જ્યારે પદનો સહગુણક +1 હોય ત્યારે તેને સામાન્ય રીતે અવગણવામાં આવે છે. દાખલા તરીકે $1x$ ને x લખવામાં આવે છે.$1x^2y^2$ ને x^2y^2 લખવામાં આવે છે. સહગુણક (-1) એ માત્ર ઋણ ચિહ્ન જ સૂચવે છે. આમ $(-1)x$ ને $-x$ લખવામાં આવે છે. $(-1)x^2y^2$ ને $-x^2y^2$ લખવામાં આવે છે.

> **આ પ્રયત્ન કરો**
>
> નીચેની પદાવલિઓમાં પદોના સહગુણકો ઓળખો :
>
> $4x - 3y$, $a + b + 5$, $2y + 5$, $5xy$

કેટલીક વખતે શબ્દ સહગુણકનો ઉપયોગ ઘણો વ્યાપક રીતે કરવામાં આવે છે. આમ આપણે કહી શકીએ કે $5xy$ પદમાં 5 એ xy નો સહગુણક છે. x એ $5y$ નો સહગુણક છે અને y એ $5x$નો સહગુણક છે. $10xy^2$ માં 10 એ xy^2 નો સહગુણક છે. x એ $10y^2$ નો અને y^2 એ $10x$ નો સહગુણક છે. આમ વધુ વ્યાપક રીતે સહગુણક એ સંખ્યાત્મક અવયવ અથવા બીજગણિતીય અવયવ અથવા બે કે વધુ અવયવનો ગુણાકાર છે. તેને બાકીના અવયવોના ગુણાકારનો સહગુણક કહે છે.

ઉદાહરણ 1 : નીચેની પદાવલિઓમાં અચળ સિવાયના પદો દર્શાવો. તેમના સંખ્યાત્મક સહગુણકો લખો.

$$xy + 4,\ 13 - y^2, 13 - y + 5y^2,\ 4p^2q - 3pq^2 + 5$$

ઉકેલ

ક્રમ	પદાવલિ	પદ (જે અચળ નથી)	સંખ્યાત્મક સહગુણક
(i)	$xy + 4$	xy	1
(ii)	$13 - y^2$	$-y^2$	-1
(iii)	$13 - y + 5y^2$	$-y$ $5y^2$	-1 5
(iv)	$4p^2q - 3pq^2 + 5$	$4p^2q$ $-3pq^2$	4 -3

ઉદાહરણ 2

(a) નીચેની પદાવલિમાં xના કયા સહગુણક છે તે લખો.

$4x - 3y$, $8 - x + y$, $y^2x - y$, $2z - 5xz$

(b) નીચેની પદાવલિમાં y ના સહગુણક કયા છે તે લખો.

$4x - 3y$, $8 + yz$, $yz^2 + 5$, $my + m$

ઉકેલ

(a) દરેક પદાવલિમાં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે x એક અવયવ છે. પદનો બાકીનો ભાગ એ x નો સહગુણક છે.

ક્રમ	પદાવલિ	અવયવ x સાથેનું પદ	x નો સહગુણક
(i)	$4x - 3y$	$4x$	4
(ii)	$8 - x + y$	$-x$	-1
(iii)	$y^2x - y$	y^2x	y^2
(iv)	$2z - 5xz$	$-5xz$	$-5z$

(b) ઉપર પ્રમાણેની સમાન પદ્ધતિથી.

ક્રમ	પદાવલિ	અવયવ y સાથેનું પદ	y નો સહગુણક
(i)	$4x - 3y$	$-3y$	-3
(ii)	$8 + yz$	yz	z
(iii)	$yz^2 + 5$	yz^2	z^2
(iv)	$my + m$	my	m

12.4 સજાતીય અને વિજાતીય પદ (Like and Unlike Terms) :

જે પદમાં સમાન બીજગણિતીય અવયવો હોય, તે પદોને **સજાતીય પદો** કહે છે. જ્યારે પદમાં અસમાન બીજગણિતીય અવયવો હોય તો તેને **વિજાતીય પદ** કહે છે. દાખલા તરીકે પદાવલિ $2xy - 3x + 5xy - 4$ના પદ $2xy$ અને $5xy$ જુઓ. $2xy$ના અવયવ 2, x અને y છે. $5xy$ના અવયવ 5, x અને y છે. આમ

CLKABD

તેમના બીજગણિતીય (એટલે કે તે ચલના બનેલા) અવયવ સરખા છે તેથી તે સજાતીય પદ છે. બીજી બાજુ $2xy$ અને $-3x$માં બીજગણિતીય અવયવ જુદા જુદા છે. તેથી તેઓ વિજાતીય પદ છે. તે જ રીતે પદ $2xy$ અને 4 એ વિજાતીય પદ છે. $-3x$ અને 4 પણ વિજાતીય પદ છે.

આ પ્રયત્ન કરો

નીચે આપેલામાંથી સજાતીય પદોનું જૂથ બનાવો.

$12x, 12, -25x, -25, -25y, 1, x, 12y, y$

12.5 (એકપદી) (Monomials), (દ્વિપદી) (Binomials), (ત્રિપદી) (Trinomials) અને (બહુપદી) (Polynomials)

એવી પદાવલિ કે જેમાં માત્ર એક જ પદ હોય તો તેને એકપદી કહેવાય.

દા.ત. $7xy, -5m, 3z^2$, 4 વગેરે

એવી પદાવલિ કે જેમાં બે વિજાતીય પદો હોય તો તેને **દ્વિપદી** કહે છે. $x + y$, $m - 5$, $mn + 4m$, $a^2 - b^2$ વગેરે. પદાવલિ $10pq$ એ દ્વિપદી નથી. તે એકપદી છે. પદાવલિ $(a + b + 5)$ એ દ્વિપદી નથી કારણ કે તેમાં ત્રણ પદ છે.

એવી પદાવલિ કે જેમાં ત્રણ પદ હોય, તેને **ત્રિપદી** કહે છે. પદાવલિ $x + y + 7$, $ab + a + b$, $3x^2 - 5x + 2$, $m + n + 10$ એ ત્રિપદી છે. પદાવલિ $ab + a + b + 5$ એ તેમ છતાં **ત્રિપદી** નથી કારક કે તેમાં ત્રણ નહિ પણ 4 પદ છે. પદાવલિ $x + y + 5x$ એ ત્રિપદી નથી, કારણ કે x અને $5x$ એ સજાતીય પદ છે.

આ પ્રયત્ન કરો

નીચે આપેલ પદાવલિઓને એકપદી, દ્વિપદી અને ત્રિપદીમાં વર્ગીકૃત કરો.

$a + b$, $ab + a + b$, $ab + a + b - 5$, xy, $xy + 5$, $5x^2 - x + 2$, $4pq - 3q + 5p$ 7, $4m - 7n + 10$, $4má + 7$.

ટૂંકમાં, આપેલ પદાવલિમાં એક અથવા વધુ પદો હોય તો તેને **બહુપદી** કહે છે. આમ એકપદી, દ્વિપદી અને ત્રિપદી એ બહુપદી છે.

ઉદાહરણ 3 કારણ સહિત કહો કે નીચે આપેલાં પદની જોડમાંથી ક્યાં પદ સજાતીય અને ક્યા પદ વિજાતીય છે.

(i) $7x, 12y$ (ii) $15x, -21x$ (iii) $-4ab, 7ba$ (iv) $3xy, 3x$

(v) $6xy^2, 9x^2y$ (vi) $pq^2, -4pq^2$ (vii) $mn^2, 10\,mm$

ક્રમ	જોડ	અવયવો	બીજગણિતીય અવયવો સરખા છે કે જુદા	સજાતીય કે વિજાતીય	નોંધ
(i)	$7x$ $12y$	$\left.\begin{matrix}7, x\\12, y\end{matrix}\right\}$	જુદા	વિજાતીય	પદોમાં ચલ જુદા જુદા છે.
(ii)	$15x$ $-21x$	$\left.\begin{matrix}15, x\\-21, x\end{matrix}\right\}$	સરખા	સજાતીય	
(iii)	$-4ab$ $7ba$	$\left.\begin{matrix}-4, a, b\\7, a, b\end{matrix}\right\}$	સરખા	સજાતીય	યાદ રાખો કે $ab = ba$

(iv)	$3xy$ $3x$	$\left.\begin{array}{r}3, x, y\\ 3, x\end{array}\right\}$	જુદા	વિજાતીય	ચલ y માત્ર એક જ પદમાં છે.
(v)	$6xy^2$ $9x^2y$	$\left.\begin{array}{r}6, x, y, y\\ 9, x, x, y\end{array}\right\}$	જુદા	વિજાતીય	બે પદોમાં ચલ સરખા છે પરંતુ ઘાત સમાન નથી.
(vi)	pq^2 $-4pq^2$	$\left.\begin{array}{r}1, p, q, q\\ -4, p, q, q\end{array}\right\}$	સરખા	સજાતીય	નોંધો કે સંખ્યાત્મક અવયવ 1 દેખાતો નથી.
(vii)	mn^2 $10mn$	$\left.\begin{array}{r}m, n, n\\ 10, m, n\end{array}\right\}$	જુદા	વિજાતીય	n ના ઘાત સરખા નથી.

નીચેનાં પગથિયાં તમને આપેલાં પદ **સજાતીય** છે કે **વિજાતીય** તે નક્કી કરવામાં ઉપયોગી થશે.

(i) સંખ્યાત્મક સહગુણકને અવગણો. પદના બીજગણિતીય ભાગ પર ધ્યાન આપો.

(ii) પદમાંના ચલને તપાસો. તે સરખા જ હોવા જોઈએ.

(iii) હવે, પદમાંના દરેક ચલના ઘાતાંક તપાસો. તે પણ સરખા જ હોવા જોઈએ.

ધ્યાને લો કે સજાતીય પદ નક્કી કરવા માટે બે બાબતોનો કોઈ જ વાંધો નથી : (1) પદના સહગુણક (2) પદમાં ગુણાકાર સ્વરૂપે ગોઠવાયેલા ચલનો ક્રમ.

સ્વાધ્યાય 12.1

1. નીચે આપેલી બાબતોમાં ચલ, અચલ અને ગાણિતિક પ્રક્રિયાઓનો ઉપયોગ કરી બીજગણિતીય પદાવલિઓ બનાવો.

   (i) yમાંથી z બાદ કરો.

   (ii) x અને yના સરવાળાના અડધા.

   (iii) સંખ્યા zનો તે જ સંખ્યા સાથેનો ગુણાકાર

   (iv) p અને qના ગુણાકારનો ચતુર્થ ભાગ

   (v) x અને y બંને સંખ્યાનો વર્ગ અને તેમનો સરવાળો

   (vi) m અને n સંખ્યાના ગુણાકારના ત્રણ ગણામાં 5 ઉમેરતાં

   (vii) y અને zના ગુણાકારને 10માંથી બાદ કરતાં

   (viii) a અને bના ગુણાકારમાંથી તેમનો સરવાળો બાદ કરતાં

2. (i) નીચે આપેલ પદાવલિમાંથી પદ અને તેમના અવયવ ઓળખી કાઢો.
   આ પદ અને અવયવને ટ્રી ચાર્ટ વડે દર્શાવો.

   (a) $x - 3$ (b) $1 + x + x^2$ (c) $y - y^3$

   (d) $5xy^2 + 7x^2y$ (e) $-ab + 2b^2 - 3a^2$

   (ii) નીચે આપેલી પદાવલિમાંથી પદ અને અવયવ ઓળખી કાઢો.

   (a) $-4x + 5$ (b) $-4x + 5y$ (c) $5y + 3y^2$

   (d) $xy + 2x^2y^2$ (e) $pq + q$ (f) $1.2ab - 2.4\,b + 3.6\,a$

(g) $\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ (e) $0.1\,p^2 + 0.2\,q^2$

3. નીચે આપેલી પદાવલિમાં (અચલ સિવાયના) પદનો સંખ્યાત્મક સહગુણક શોધીને લખો.

(i) $5 - 3t^2$ (ii) $1 + t + t^2 + t^3$ (iii) $x + 2xy + 3y$

(iv) $100m + 1000n$ (v) $-p^2q^2 + 7pq$ (vi) $1.2\,a + 0.8\,b$

(vii) $3.14\,r^2$ (viii) $2\,(l + b)$ (ix) $0.1\,y + 0.01\,y^2$

4. (a) x વાળાં પદો શોધો અને xના સહગુણક લખો.

(i) $y^2x + y$ (ii) $13y^2 - 8yx$ (iii) $x + y + 2$

(iv) $5 + z + zx$ (v) $1 + x + xy$ (vi) $12xy^2 + 25$

(vii) $7x + xy^2$

(b) y^2 વાળું પદ શોધી તેમનો સહગુણક લખો.

(i) $8 - xy^2$ (ii) $5y^2 + 7x$ (iii) $2x^2y - 15\,xy^2 + 7y^2$

5. નીચેનાનું એકપદી, દ્વિપદી અને ત્રિપદીમાં વર્ગીકરણ કરો.

(i) $4y - 7z$ (ii) y^2 (iii) $x + y - xy$ (iv) 100

(v) $ab - a - b$ (vi) $5 - 3t$ (vii) $4p^2q - 4pq^2$ (viii) $7mn$

(ix) $z^2 - 3z + 8$ (x) $a^2 + b^2$ (xi) $z^2 + z$ (xii) $1 + x + x^2$

6. નીચે આપેલી જોડ સજાતીય કે વિજાતીય પદોની છે તે કહો.

(i) 1, 100 (ii) $-7x, \frac{5}{2}x$ (iii) $-29x, -29y$

(iv) $14xy, 42yx$ (v) $4m^2p, 4mp^2$ (vi) $12xz, 12x^2z^2$

7. નીચેનામાંથી સજાતીય પદ શોધી કાઢો.

(a) $-xy^2, -4yx^2, 8x^2, 2xy^2, 7y, -11x^2, -100x, -11yx, 20x^2y,$
$-6x^2, y, 2xy, 3x$

(b) $10pq, 7p, 8q, -p^2q^2, -7qp, -100q, -23, 12q^2p^2, -5p^2, 41, 2405p,$
$78qp, 13p^2q, qp^2, 701p^2$

12.6 પદાવલિના સરવાળા બાદબાકી

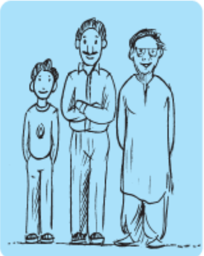
નીચેની સમસ્યા ઉકેલો :

1. સરિતા પાસે કેટલીક લખોટીઓ છે. અમીના પાસે તેનાથી 10 વધુ છે. અપ્પુએ કહ્યું કે તેની પાસે સરિતા અને અમીના પાસેની લખોટીઓને ભેગી કરીએ તેના કરતાં 3 વધારે લખોટી છે. તમે અપ્પુ પાસે કેટલી લખોટી છે તે કેવી રીતે જાણી શકશો ?

D1KD9E

અહીં સરિતા પાસે કેટલી લખોટી છે તે આપેલ નથી, ધારો કે આપણે તે x લઈએ. અમીના પાસે તેના કરતાં 10 લખોટી વધુ છે એટલે કે $x + 10$ છે. અપ્પુએ કહ્યું કે તેની પાસે અમીના અને સરિતા

પાસેની લખોટીઓને ભેગી કરીએ તેના કરતાં 3 લખોટી વધારે છે. તેથી આપણે અમીના પાસેની લખોટીઓ અને સરિતા પાસેની લખોટીઓનો સરવાળો લઈશું અને આ સરવાળામાં 3 ઉમેરીશું. આપણે x, $x + 10$ અને 3નો સરવાળો કરીશું.



2. રામુના પિતાની હાલની ઉંમર રામુની ઉંમર કરતાં 3 ગણી છે. રામુના દાદાની ઉંમર રામુની ઉંમર અને તેના પિતાની ઉંમરના સરવાળા કરતાં 13 વર્ષ વધુ છે. તમે રામુના દાદાની ઉંમર કેવી રીતે શોધશો ?

   અહીં રામુની ઉંમર આપેલ નથી. ચાલો, આપણે તેને y વર્ષ લઈએ. તેથી તેના પિતાની ઉંમર $3y$ થશે. રામુના દાદાની ઉંમર શોધવા આપણે રામુની ઉંમર (y) અને તેના પિતાની ઉંમર ($3y$)નો સરવાળો કરી આ સરવાળામાં 13 ઉમેરવા પડશે. આમ, આપણે y, $3y$ અને 13નો સરવાળો કરવો પડશે.

3. એક બગીચાના ચોરસ પ્લોટમાં ગુલાબ અને ગલગોટાના છોડ રોપવામાં આવ્યા છે. ગલગોટા રોપવામાં આવ્યા છે તે ચોરસ પ્લોટની લંબાઈ, ગુલાબ રોપવામાં આવ્યા છે તે ચોરસ પ્લોટની લંબાઈ કરતાં 3 મીટર વધુ છે. ગુલાબના પ્લોટના ક્ષેત્રફળ કરતાં ગલગોટાના પ્લોટનું ક્ષેત્રફળ કેટલું વધુ હશે ?

   ચાલો ગુલાબના પ્લોટની એક બાજુની લંબાઈ l મીટર લો. તેથી ગલગોટાના પ્લોટની લંબાઈ $(l + 3)$ મીટર હશે. તેને અનુરૂપ ક્ષેત્રફળ l^2 અને $(l + 3)^2$ થશે. $(l + 3)^2$ અને l^2 નો તફાવત ગલગોટાના પ્લોટનું ક્ષેત્રફળ કેટલું વધારે છે તે દર્શાવશે.

ત્રણેય પરિસ્થિતિમાં આપણે બીજગણિતીય પદાવલિનાં સરવાળા અથવા બાદબાકી લીધા. આપણા વાસ્તવિક જીવનમાં ઘણા બધા પ્રશ્નો છે કે જેમાં આપણને પદાવલિ અને તેના પરની ક્રિયાઓની જરૂર પડશે. હવે પછી આપણે બીજગણિતીય પદાવલિના સરવાળા અને બાદબાકી કેવી રીતે કરવામાં આવે છે, તે જોઈશું.

પ્રયત્ન કરો

ઓછામાં ઓછી બે પરિસ્થિતિ વિચારો કે જેમાં તમારે બે બીજગણિતીય પદાવલિના સરવાળા કે બાદબાકી કરવાની જરૂર પડે.

સજાતીય પદોના સરવાળા અને બાદબાકી

સૌથી સરળ પદાવલિ એ એકપદીઓ છે. તે માત્ર એક જ પદની બનેલી છે. સજાતીય પદોનાં સરવાળા કે બાદબાકી કેવી રીતે કરી શકાય તે આપણે શીખીશું.

- ચાલો $3x$ અને $4x$નો સરવાળો કરો. આપણે જાણીએ છીએ કે x એ સંખ્યા છે તેથી $3x$ અને $4x$ પણ સંખ્યા જ છે.

હવે, $3x + 4x = (3 \times x) + (4 \times x)$

$= (3 + 4) \times x$ (વિભાજનના નિયમ મુજબ)

$= 7 \times x = 7x$

અથવા, $3x + 4x = 7x$

અહીં ચલ એ સંખ્યા છે. તેમના માટે વિભાજનનો નિયમ આપણે વાપરી શકીએ.

- હવે $8xy$, $4xy$ અને $2xy$નો સરવાળો કરો.

$$8xy + 4xy + 2xy = (8 \times xy) + (4 \times xy) + (2 \times xy)$$
$$= (8 + 4 + 2) \times xy$$
$$= 14 \times xy = 14xy$$

અથવા, $8xy + 4xy + 2xy = 14xy$

- $7n$માંથી $4n$ બાદ કરો.

$$7n - 4n = (7 \times n) - (4 \times n)$$
$$= (7 - 4) \times n = 3 \times n = 3n$$

અથવા, $7n - 4n = 3n$

- આ જ રીતે $11ab$માંથી $5ab$ બાદ કરો.

$$11ab - 5ab = (11 - 5)\ ab = 6ab$$

આમ, બે કે તેથી વધુ સજાતીય પદોનો સરવાળો એ એવું સજાતીય પદ છે કે જેનો સંખ્યાત્મક સહગુણક આપેલા સજાતીય પદોના સંખ્યાત્મક સહગુણકોના સરવાળા જેટલો છે.

તે જ રીતે, બે સજાતીય પદોનો તફાવત એ એવું સજાતીય પદ છે કે જેનો સંખ્યાત્મક સહગુણક આપેલા સજાતીય પદોના સંખ્યાત્મક સહગુણકોના તફાવત જેટલો છે.

નોંધો કે, સજાતીય પદોનાં સરવાળા કે બાદબાકીની જેમ વિજાતીય પદોનાં સરવાળા કે બાદબાકી કરી શકાતાં નથી. આપણે તેનું ઉદાહરણ આગળ જોઈ જ ગયાં છીએ કે જ્યારે xમાં 5 ઉમેરવાના હોય ત્યારે આપણે $(x + 5)$ લખીએ છીએ. જુઓ કે $(x + 5)$ માંના બંને પદ 5 અને x એમના એમ જ રહેશે. તે જ રીતે વિજાતીય પદો $3xy$ અને 7 નો સરવાળો $3xy + 7$ થશે.

આ જ રીતે $3xy$માંથી 7 બાદ કરતાં પરિણામ $3xy - 7$ આવશે.

સામાન્ય બીજગણિતીય પદાવલિઓનાં સરવાળા-બાદબાકી

ચાલો, કેટલાંક ઉદાહરણ લઈએ.

- $3x + 11$ અને $7x - 5$ નો સરવાળો કરો.

સરવાળો $= 3x + 11 + 7x - 5$

હવે, આપણે જાણીએ છીએ કે $3x$ અને $7x$ સજાતીય પદો છે અને તે જ રીતે 11 અને -5 પણ સજાતીય પદો છે.

વધુમાં $3x + 7x = 10\,x$ અને $11 + (-5) = 6$. આમ આપણે આ દાખલાને સરળ રૂપ આપી શકીએ.

સરવાળો $= 3x + 11 + 7x - 5$

$= 3x + 7x + 11 - 5$ (પદોને ફરીથી ગોઠવતાં)

$= 10x + 6$

તેથી, $3x + 11 + 7x - 5 = 10x + 6$

- $3x + 11 + 8z$ અને $7x - 5$ નો સરવાળો કરો.

સરવાળો $= 3x + 11 + 8z + 7x - 5$

$= 3x + 7x + 11 - 5 + 8z$ (પદોને ફરીથી ગોઠવતાં)

સજાતીય પદોને સાથે ગોઠવીશું અને એકમાત્ર વિજાતીય પદ $8z$ ને ત્યાંના ત્યાં જ રાખીશું.

તેથી સરવાળો $= 10x + 6 + 8z$ થશે.

- $3a - b + 4$ માંથી $a - b$ બાદ કરો.

તફાવત $= 3a - b + 4 - (a - b)$

$= 3a - b + 4 - a + b$

$(a - b)$ને કેવી રીતે કૌંસમાં લીધો છે તે જુઓ અને કૌંસ છોડતી વખતે નિશાનીની કાળજી રાખો. સજાતીય પદો સાથે રહે તે રીતે પદોની ગોઠવણી કરો.

નોંધો કે જેમ
$-(5 - 3) = -5 + 3$, તેમ
$-(a - b) = -a + b$,
સંખ્યાની નિશાનીની જેમ જ બીજગણિતીય પદની નિશાની બદલાય.

તફાવત $= 3a - a + b - b + 4$

$= (3 - 1)a + (1 - 1)\,b + 4$

તફાવત $= 2a + (0)b + 4 = 2a + 4$

અથવા $3a - b + 4 - (a - b) = 2a + 4$

પદાવલિનાં સરવાળા અને બાદબાકીના વધુ મહાવરા માટે કેટલાંક વધુ ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ 4 સજાતીય પદો ગોઠવીને પદાવલિનું સાદું રૂપ આપો.

$$12m^2 - 9m + 5m - 4m^2 - 7m + 10$$

ઉકેલ પદોને ગોઠવતાં,

$$12m^2 - 4m^2 + 5m - 9m - 7m + 10$$

$$= (12 - 4)\,m^2 + (5 - 9 - 7)\,m + 10$$

$$= 8m^2 + (-4 - 7)\,m + 10$$

$$= 8m^2 + (-11)\,m + 10$$

$$= 8m^2 - 11m + 10$$

પ્રયત્ન કરો

સરવાળા અને બાદબાકી કરો.

(i) $m - n,\ m + n$

(ii) $mn + 5 - 2,\ mn + 3$

નોંધ : બાદબાકી એ સરવાળાની ઉલટી પ્રક્રિયા છે. $-10b$ બાદ કરવા અને $+10b$ ઉમેરવા, બંને સમાન છે. $-18a$ બાદ કરવા અને $+18a$ ઉમેરવા, બંને સમાન છે. $24ab$ બાદ કરવા અને $-24ab$ ઉમેરવા બંને સમાન છે. પદાવલિની નીચે બતાવેલાં ચિહ્નોને યોગ્ય રીતે લઈને બાદબાકી કરો.

ઉદાહરણ 5 $30ab + 12b + 14a$ માંથી $24ab - 10b - 18a$ બાદ કરો.

ઉકેલ $30ab + 12b + 14a - (24ab - 10b - 18a)$

$$= 30ab + 12b + 14a - 24ab + 10b + 18a$$

$$= 30ab - 24ab + 12b + 10b + 14a + 18a$$

$$= 6ab + 22b + 32a$$

બીજી રીત, એક પદાવલિની નીચે બીજીને એવી રીતે ગોઠવો કે જેથી બંનેના સજાતીય પદ એકબીજાની નીચે રહે.

$$\begin{array}{r} 30ab + 12b + 14a \\ 24ab - 10b - 18a \\ -\qquad +\qquad + \\ \hline 6ab + 22b + 32a \\ \hline \end{array}$$

ઉદાહરણ 6 $2y^2 + 3yz,\ -y^2 - yz - z^2$ અને $yz + 2z^2$, ના સરવાળામાંથી $3y^2 - z^2$ અને $-y^2 + yz + z^2$નો સરવાળો બાદ કરો.

ઉકેલ પહેલાં આપણે $2y^2 + 3yz,\ -y^2 - yz - z^2$ અને $yz + 2z^2$ નો સરવાળો કરો.

$$\begin{array}{rrr} 2y^2 & +\ 3yz & \\ -\ y^2 & -\ yz & -\ z^2 \\ & +\ yz & +\ 2z^2 \\ \hline y^2 & +\ 3yz & +\ z^2 \\ \hline \end{array} \qquad (1)$$

હવે આપણે, $3y^2 - z^2$ અને $-y^2 + yz + z^2$ નો સરવાળો કરીએ,

$$\begin{array}{rrr} 3y^2 & & -\ z^2 \\ -\ y^2 & +\ yz & +\ z^2 \\ \hline 2y^2 & +\ yz & \\ \hline \end{array} \qquad (2)$$

હવે, સરવાળા (1) માંથી સરવાળા (2) બાદ કરતાં :

$$\begin{array}{rrr} y^2 & +\ 3yz & +\ z^2 \\ 2y^2 & +\ yz & \\ - & - & \\ \hline -y^2 & +\ 2yz & +\ z^2 \\ \hline \end{array}$$

સ્વાધ્યાય 12.2

1. સજાતીય પદ સાથે ગોઠવી સાદું રૂપ આપો :

   (i) $21b - 32 + 7b - 20b$
   (ii) $-z^2 + 13z^2 - 5z + 7z^3 - 15z$
   (iii) $p - (p - q) - q - (q - p)$
   (iv) $3a - 2b - ab - (a - b + ab) + 3ab + b - a$
   (v) $5x^2y - 5x^2 + 3yx^2 - 3y^2 + x^2 - y^2 + 8xy^2 - 3y^2$
   (vi) $(3y^2 + 5y - 4) - (8y - y^2 - 4)$

2. સરવાળા કરો :
   (i) $3mn, -5mn, 8mn, -4mn$
   (ii) $t - 8tz, 3tz - z, z - t$
   (iii) $-7mn + 5, 12mn + 2, 9mn - 8, -2mn - 3$
   (iv) $a + b - 3, b - a + 3, a - b + 3$
   (v) $14x + 10y - 12xy - 13, 18 - 7x - 10y + 8xy, 4xy$
   (vi) $5m - 7n, 3n - 4m + 2, 2m - 3mn - 5$
   (vii) $4x^2y, -3xy^2, -5xy^2, 5x^2y$

(viii) $3p^2q^2 - 4pq + 5, - 10p^2q^2, 15 + 9pq + 7p^2q^2$

(ix) $ab - 4a, 4b - ab, 4a - 4b$

(x) $x^2 - y^2 - 1, y^2 - 1 - x^2, 1 - x^2 - y^2$

3. બાદબાકી કરો :

(i) y^2 માંથી $-5y^2$

(ii) $-12xy$માંથી $6xy$

(iii) $(a + b)$માંથી $(a - b)$

(iv) $b(5 - a)$માંથી $a(b - 5)$

(v) $4m^2 - 3mn + 8$ માંથી $- m^2 + 5mn$

(vi) $5x - 10$માંથી $- x^2 + 10x - 5$

(vii) $3ab - 2a^2 - 2b^2$ માંથી $5a^2 - 7ab + 5b^2$

(viii) $5p^2 + 3q^2 - pq$ માંથી $4pq - 5q^2 - 3p^2$

4. (a) $x^2 + xy + y^2$ માં શું ઉમેરવાથી $2x^2 + 3xy$ મેળવી શકાય ?

(b) $2a + 8b + 10$માંથી શું બાદ કરવાથી $-3a + 7b + 16$ મેળવી શકાય ?

5. $3x^2 - 4y^2 + 5xy + 20$ માંથી શું લઈ લેવાથી $- x^2 - y^2 + 6xy + 20$ મેળવી શકાય.

6. (a) $3x - y + 11$ અને $-y - 11$ના સરવાળામાંથી $3x - y - 11$ બાદ કરો.

(b) $4 + 3x$ અને $5 - 4x + 2x^2$ના સરવાળામાંથી $3x^2 - 5x$ અને $- x^2 + 2x + 5$નો સરવાળો બાદ કરો.

12.7 આપેલી પદાવલિની કિંમત શોધવી

D1U9B2

આપણે જાણીએ છીએ કે બીજગણિતીય પદાવલિની કિંમત તે પદાવલિની રચના કરતાં ચલની કિંમત પર આધારિત હોય છે. ઘણી એવી પરિસ્થિતિ હોય છે કે જેમાં આપણને પદાવલિની કિંમત શોધવાની જરૂર પડે છે. જેમ કે જ્યારે આપણને એમ થાય કે આપેલ ચલની ચોક્કસ કિંમત સમીકરણનું સમાધાન કરે છે કે નહિ તે ચકાસવા માટે.

ભૂમિતિના સૂત્રના ઉપયોગમાં અને રોજિંદા ગણિતમાં આપણે પદાવલિની કિંમત શોધી તેનો ઉપયોગ કરીએ છીએ. દા.ત. ચોરસનું ક્ષેત્રફળ l^2 છે. જ્યાં l એ ચોરસની એક બાજુની લંબાઈ છે. જો $l = 5$ સેમી તો ક્ષેત્રફળ 5^2 સેમી^{2} અથવા 25 સેમી^{2} છે. જો બાજુ 10 સેમી હોય તો ક્ષેત્રફળ 10^2 સેમી^{2} અથવા 100 સેમી^{2} થાય. હવે પછીના ભાગમાં આપણે આ પ્રકારનાં વધુ ઉદાહરણો જોઈશું.

ઉદાહરણ 7 $x = 2$ માટે નીચે આપેલી પદાવલિની કિંમત શોધો.

(i) $x + 4$ (ii) $4x - 3$ (iii) $19 - 5x^2$ (iv) $100 - 10x^3$

ઉકેલ $x = 2$ મૂકતાં,

(i) આપણે $x + 4$ની કિંમત શોધીએ.

એટલે કે $x + 4 = 2 + 4 = 6$

(ii) $4x - 3$ માં આપણે

$4x - 3 = (4 \times 2) - 3 = 8 - 3 = 5$ મેળવીશું.

(iii) $19 - 5x^2$ માં આપણે

$19 - 5x^2 = 19 - (5 \times 2^2) = 19 - (5 \times 4) = 19 - 20 = (-1)$ મેળવીશું.

(iv) $100 - 10x^3$ માં આપણે

$100 - (10 \times 2^3) = 100 - (10 \times 8)$ (નોંધ : $2^3 = 8$ થાય.)

$= 100 - 80 = 20$

ઉદાહરણ 8 $n = -2$ માટે નીચેની પદાવલિઓની કિંમત શોધો.

(i) $5n - 2$ (ii) $5n^2 + 5n - 2$ (iii) $n^3 + 5n^2 + 5n - 2$

ઉકેલ

(i) $n = -2$ કિંમત $5n - 2$ માં મૂકતાં

$5(-2) - 2 = -10 - 2 = -12$

(ii) $5n^2 + 5n - 2$ માં

$n = -2$, માટે $5n - 2 = -12$

અને $5n^2 = 5 \times (-2)^2 = 5 \times 4 = 20$ [જ્યાં $(-2)^2 = 4$]

સાથે લખતાં,

$5n^2 + 5n - 2 = 20 - 12 = 8$

(iii) હવે $n = -2$ માટે

$5n^2 + 5n - 2 = 8$ અને

$n^3 = (-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = (-8)$

હવે, સાથે લખતાં,

$n^3 + 5n^2 + 5n - 2 = -8 + 8 = 0$

હવે, આપણે બે ચલની પદાવલિ જોઈશું. ઉદારણ તરીકે, $x + y$ અને xy બે ચલ ધરાવતી પદાવલિની સંખ્યાત્મક કિંમત શોધીએ. અહીં આપણને બંને ચલની કિંમતની જરૂર પડશે. જેમ કે, $x = 3$ અને $y = 5$ માટે $(x + y)$ ની કિંમત $3 + 5 = 8$ થશે.

ઉદાહરણ 9 $a = 3$ અને $b = 2$ માટે નીચેની પદાવલિની કિંમત શોધો.

(i) $a + b$ (ii) $7a - 4b$ (iii) $a^2 + 2ab + b^2$ (iv) $a^3 - b^3$

ઉકેલ $a = 3$ અને $b = 2$ મૂકતાં

(i) $a + b = 3 + 2 = 5$

(ii) $7a - 4b$ માટે

$7a - 4b = 7 \times 3 - 4 \times 2 = 21 - 8 = 13$

(iii) $a^2 + 2ab + b^2$ માટે

$a^2 + 2ab + b^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times 2 + 2^2 = 9 + 2 \times 6 + 4 = 9 + 12 + 4 = 25$

(iv) $a^3 - b^3$ માટે

$a^3 - b^3 = 3^3 - 2^3 = 3 \times 3 \times 3 - 2 \times 2 \times 2 = 9 \times 3 - 4 \times 2 = 27 - 8 = 19$

સ્વાધ્યાય 12.3

1. જો $m = 2$ હોય તો નીચેનાં પદોની કિંમત શોધો :
   (i) $m - 2$ (ii) $3m - 5$ (iii) $9 - 5m$
   (iv) $3m^2 - 2m - 7$ (v) $\frac{5m}{2} - 4$
2. જો $p = -2$ હોય, તો નીચેનાની કિંમત શોધો :
   (i) $4p + 7$ (ii) $-3p^2 + 4p + 7$ (iii) $-2p^3 - 3p^2 + 4p + 7$
3. $x = -1$ માટે નીચેની પદાવલિની કિંમત શોધો.
   (i) $2x - 7$ (ii) $-x + 2$ (iii) $x^2 + 2x + 1$
   (iv) $2x^2 - x - 2$
4. જો $a = 2$ અને $b = -2$ હોય તો નીચેનાંની કિંમત શોધો :
   (i) $a^2 + b^2$ (ii) $a^2 + ab + b^2$ (iii) $a^2 - b^2$
5. $a = 0$, $b = -1$ માટે આપેલ પદાવલિની કિંમત શોધો.
   (i) $2a + 2b$ (ii) $2a^2 + b^2 + 1$ (iii) $2a^2b + 2ab^2 + ab$
   (iv) $a^2 + ab + 2$
6. આપેલી પદાવલિઓનું સાદું રૂપ આપી $x = 2$ માટે કિંમત શોધો.
   (i) $x + 7 + 4(x - 5)$ (ii) $3(x + 2) + 5x - 7$
   (iii) $6x + 5(x - 2)$ (iv) $4(2x - 1) + 3x + 11$
7. આપેલી પદાવલિઓનું સાદું રૂપ આપો અને $x = 3$, $a = -1$ અને $b = -2$ લઈ કિંમત શોધો.
   (i) $3x - 5 - x + 9$ (ii) $2 - 8x + 4x + 4$
   (iii) $3a + 5 - 8a + 1$ (iv) $10 - 3b - 4 - 5b$
   (v) $2a - 2b - 4 - 5 + a$
8. (i) જો $z = 10$ હોય તો, $z^3 - 3(z - 10)$ની કિંમત શોધો.
   (ii) $p = -10$ હોય તો, $p^2 - 2p - 100$ની કિંમત શોધો.
9. $x = 0$ માટે $2x^2 + x - a$ ની કિંમત 5 હોય તો aની કિંમત શોધો.
10. આપેલી પદાવલિનું સાદુંરૂપ આપી $a = 5$ અને $b = -3$ માટે કિંમત શોધો.
    $2(a^2 + ab) + 3 - ab$

12.8 બીજગણિતીય પદાવલિનો ઉપયોગ - સૂત્રો અને નિયમો

બીજગણિતીય પદાવલિનો ઉપયોગ કરીને ગણિતમાં સૂત્રો અને નિયમોને સંક્ષિપ્તમાં સામાન્ય રીતે કેવી રીતે લખી શકાય તે આપણે અગાઉ શીખી ગયાં. આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

CLU6D1

- **પરિમિતિનાં સૂત્રો**

1. સમબાજુ ત્રિકોણની પરિમિતિ = 3 × તેની એક બાજુની લંબાઈ

   જો આપણે સમબાજુ ત્રિકોણની બાજુની લંબાઈને l તરીકે ઓળખીએ તો

   સમબાજુ ત્રિકોણની પરિમિતિ = $3l$ થશે.

2. તે જ રીતે **ચોરસની પરિમિતિ** = $4l$

   જ્યાં l એ ચોરસની બાજુની લંબાઈ છે.

3. નિયમિત **પંચકોણની પરિમિતિ** = $5l$

   જ્યાં l એ પંચકોણની બાજુની લંબાઈ છે.

- **ક્ષેત્રફળનાં સૂત્રો**

1. જો આપણે ચોરસની બાજુની લંબાઈને l લઈશું તો તે ચોરસનું ક્ષેત્રફળ l^2 થશે.
2. જો આપણે લંબચોરસની બાજુની લંબાઈને l અને તેની પહોળાઈને b કરીએ તો લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ $l \times b = lb$ થશે.
3. તે જ રીતે ત્રિકોણના પાયાને b અને ઊંચાઈને h લેવામાં આવે તો ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ = $\frac{b \times h}{2} = \frac{bh}{2}$ થશે.

આપેલ રાશિ માટે બીજગણિતીય પદાવલિનાં સૂત્ર જાણતા હોઈએ તો જરૂર પ્રમાણે અન્ય રાશિની કિંમત જાણી શકાય. જેમ કે, ચોરસની લંબાઈ 3 સેમી છે. ચોરસની પરિમિતિની અભિવ્યક્તિમાં $l = 3$ સેમી કિંમત મૂકી પરિમિતિ મેળવી શકાય એટલે કે $4l$.

આપેલા ચોરસની પરિમિતિ = (4×3) સેમી = 12 સેમી

તે જ રીતે ચોરસના ક્ષેત્રફળની અભિવ્યક્તિમાં $l = 3$ સેમી કિંમત મૂકી ચોરસનું ક્ષેત્રફળ મેળવી શકીએ. તે l^2 છે. આપેલા ચોરસનું ક્ષેત્રફળ = $(3)^2$ સેમી^{2} = 9 સેમી^{2}

- **આંકડાની પેટર્નના નિયમો :**

નીચેનાં વિધાનો વાંચો.

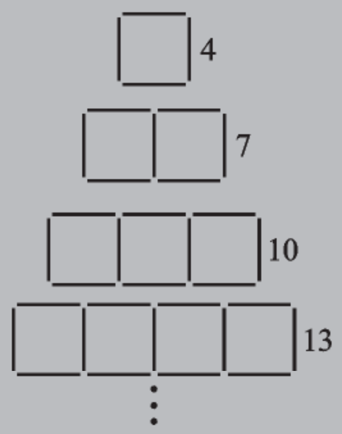
1. જો કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યાને n કહીએ તો તેની અનુગામી સંખ્યા $(n + 1)$ થશે. આપણે કોઈ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યા માટે તે ચકાસી શકીએ. જેમ કે, જો $n = 10$ તો તેની અનુગામી સંખ્યા $n + 1 = 11$ છે. જે આપણે જાણીએ છીએ.

2. જો પ્રાકૃતિક સંખ્યાને n કહીએ તો $2n$ એ બેકી સંખ્યા અને $2n + 1$ એ એકી સંખ્યા થશે. ચાલો કોઈ પણ સંખ્યા માટે ચકાસીએ. $n = 15$ લઈએ તો $2n = 2 \times n = 2 \times 15 = 30$ જે ખરેખર બેકી સંખ્યા છે અને $2n + 1 = 2 \times 15 + 1 = 30 + 1 = 31$ જે ખરેખર એકી સંખ્યા છે.

જાતે કરો

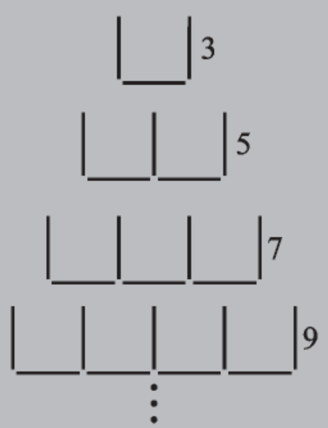
સરખી લંબાઈના રેખાખંડો લો જેવાં કે, દિવાસળીની સળીઓ, દાંતખોતરણી, અથવા સ્ટ્રોને કાપીને બનાવેલા સરખી લંબાઈના નાના ટુકડા. આપેલી આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે યોગ્ય પેટર્નમાં જોડો.

1. આકૃતિ 12.1માંની પેટર્ન જુઓ. અહીં □ આકારનું પુનરાવર્તન દર્શાવ્યું છે. જે ચાર રેખાખંડનો બનેલો છે. જો તમારે એક આકાર બનાવવો હોય તો 4 ટુકડાની જરૂર પડશે. બે આકાર માટે 7, ત્રણ આકાર માટે 10 અને તે જ રીતે જો આકારોની સંખ્યા n હોય તો આ n આકારો માટે ટુકડાની સંખ્યા $(3n + 1)$ જરૂર પડશે.
   તમે $n = 1, 2, 3, 4, \ldots 10 \ldots$ વગેરે લઈને ચકાસી શકશો. જેમ કે જો આપણે ત્રીજા પ્રકારની રચના કરવી હોય તો જરૂરી રેખાખંડની સંખ્યા $3 \times 3 + 1 = 9 + 1 = 10$ જોઈશે. જે બાજુની આકૃતિમાં દર્શાવેલ છે.



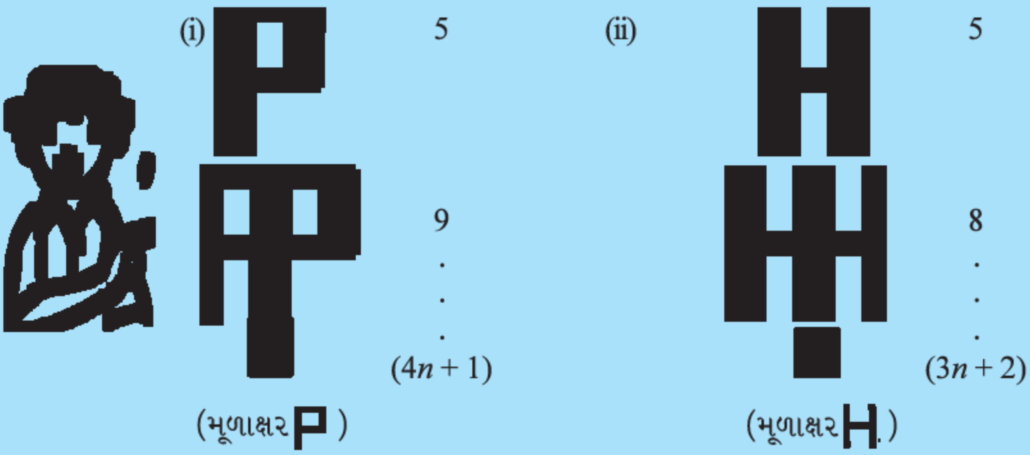
આકૃતિ 12.1

2. આકૃતિ 12.2 માંની તરાહ જુઓ. અહીં ⊔ આકારનું પુનરાવર્તન છે. અહીં 1, 2, 3, 4, ... આકારને અનુરૂપ જરૂરી ટુકડાઓની સંખ્યા અનુક્રમે 3, 5, 7, 9, ... છે. જો n આકારની રચના કરવી હોય તો જરૂરી ટુકડાઓની સંખ્યા પદાવલિ $(2n + 1)$ વડે દર્શાવી શકાય. n ની કોઈ પણ કિંમત લઈ પદાવલિ સાચી છે કે નહીં તે ચકાસો. જો $n = 4$ લઈએ તો $(2n + 1) = (2 \times 4) + 1 = 9$, જે ખરેખર 4 આકારની રચના માટે જરૂરી રેખાખંડોની સંખ્યા છે.



આકૃતિ 12.2

પ્રયત્ન કરો



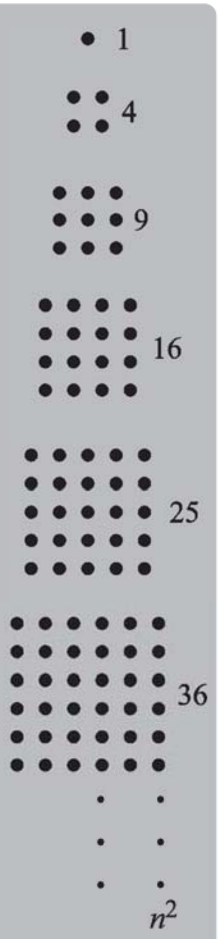
(આકૃતિ બનાવવા માટે કેટલા ટુકડાની જરૂર પડે છે તે જમણી બાજુમાં દર્શાવેલ છે. n આકાર બનાવવા માટે કેટલા ટુકડાની જરૂર પડશે તેની પદાવલિ પણ આપેલ છે.)

આગળ વધો અને આ રીતની વધુ પેટર્ન શોધો.

જાતે કરો

નીચે પ્રમાણે ટપકાં (ડોટ)ની પેટર્ન બનાવો. જો તમે ગ્રાફપેપર કે ડોટપેપરનો ઉપયોગ કરશો તો તે સરળતાથી બનાવી શકશો.

અવલોકન કરો કે ચોરસ આકારમાં ટપકાં (ડોટ) કેવી રીતે ગોઠવાયેલા છે. જો કોઈ ચોક્સ આકૃતિમાં હાર અને સ્તંભમાં ગોઠવાયેલા ડોટનો ચલ n લેવામાં આવે, તો આકૃતિમાં ડોટની સંખ્યા $n \times n = n^2$ થશે. જેમ કે $n = 4$ લઈએ તો આકૃતિમાં ડોટની સંખ્યા હાર કે સ્તંભમાં 4 પ્રમાણે લેતાં $4 \times 4 = 16$ થશે. જે ખરેખર આકૃતિમાં જોઈ શકાય છે. તમે nની બીજી કોઈ કિંમત માટે ચકાસો. પ્રાચીન ગ્રીક ગણિતશાસ્ત્રીઓ સંખ્યાઓ 1, 4, 9, 16, 25. ... ને ‘સ્ક્વેર સંખ્યા’ (વર્ગ સંખ્યા) તરીકે ઓળખતા.



- **સંખ્યાની કેટલીક વધુ પેટર્ન**

ચાલો, અંકોની બીજી પેટર્ન જુઓ. આ વખતે કોઈ પણ ચિત્રની મદદ વગર કરીએ.

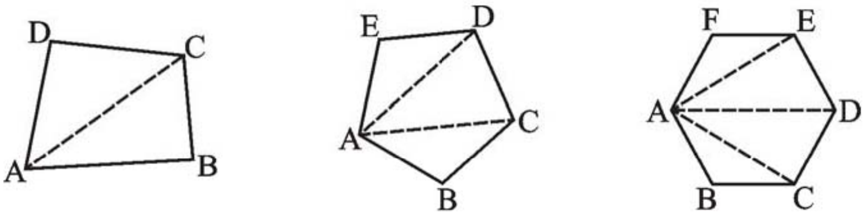
$$3, 6, 9, 12 \ldots, 3n, \ldots$$

આ નંબરો એવા છે કે જે 3થી શરૂ થાય છે અને 3ના ગુણકમાં ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવાયેલ છે. nના સ્થાને ક્યું પદ હશે તે પદાવલિ $3n$ વડે જાણી શકાશે. તમે 10મા સ્થાને રહેલું પદ સરળતાથી (કે જે $3 \times 10 = 30$) શોધી શકશો. તે જ રીતે 100મા સ્થાને પદ (કે જે $3 \times 100 = 300$) મેળવી શકશો.

- **ભૂમિતિમાં પેટર્ન**

ચતુષ્કોણનાં એક શિરોબિંદુમાંથી કેટલા વિકર્ણો દોરી શકાય ? તપાસો, તે એક છે.

પંચકોણના એક શિરોબિંદુમાંથી ? તપાસો, તે બે છે.



ષટ્કોણના શિરોબિંદુમાંથી ? તપાસો, તે ત્રણ છે.

n બાજુઓ ધરાવતા બહુકોણના એક શિરોબિંદુમાંથી $(n - 3)$ સંખ્યામાં વિકર્ણો દોરી શકાય. સપ્તકોણ (સાત બાજુ) અને અષ્ટકોણ (આઠ બાજુ) માટે આકૃતિ દોરીને તે ચકાસો. ત્રિકોણ (3 બાજુ) માટે કેટલા હશે ? અવલોકન કરો કે કોઈ પણ શિરોબિંદુમાંથી દોરવામાં આવેલ વિકર્ણો બહુકોણને એકબીજા પર ઓવરલેપીંગ ન કરતા ત્રિકોણોમાં વિભાજીત કરે છે.

અહીં બનતા ત્રિકોણની સંખ્યા શિરોબિંદુમાંથી રચાતા વિકર્ણોની સંખ્યા કરતા એક વધુ હોય છે.

સ્વાધ્યાય 12.4

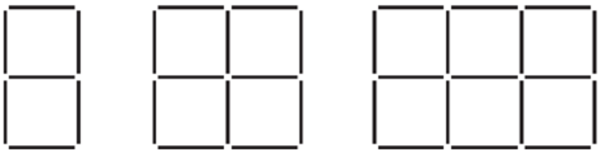
1. એકસરખા રેખાખંડોમાંથી બનાવેલ આંકડાની પેટર્નનું અવલોકન કરો. આ પ્રકારના વિભાજિત અંકો તમે ઇલેક્ટ્રોનિક્સ ઘડિયાળ કે કેલક્યુલેટરમાં જોયા હશે.

(a)  ... ...

6 11 16 21.... $(5n + 1)$...

(b)  ... ...

4 7 10 13.... $(3n + 1)$...

(c)  ... ...

7 12 17 22.... $(5n + 2)$...

જો રચવામાં આવતાં આંકડાની સંખ્યા n લેવામાં આવે તો n અંક રચવા માટેના ટુકડાની સંખ્યા દરેક પેટર્નની જમણી બાજુ બીજગણિતીય પદાવલિ વડે દર્શાવવામાં આવેલ છે.

6, 4, 8. ની જેમ 5, 10 અને 100 અંકો રચવા માટે કેટલા ટુકડાની જરૂર પડશે ?

2. આપેલ બીજગણિતીય પદાવલિનો ઉપયોગ કરી નંબર પેટર્નથી કોષ્ટક પૂર્ણ કરો.

ક્રમ	પદાવલિ	પદ									
		1^{st}	2^{nd}	3^{rd}	4^{th}	5^{th}	...	10^{th}	...	100^{th}	...
(i)	$2n-1$	1	3	5	7	9	-	19	-	-	-
(ii)	$3n+2$	5	8	11	14	-	-	-	-	-	-
(iii)	$4n+1$	5	9	13	17	-	-	-	-	-	-
(iv)	$7n+20$	27	34	41	48	-	-	-	-	-	-
(v)	n^2+1	2	5	10	17	-	-	-	-	10,001	-

આપણે શી ચર્ચા કરી ?

1. બીજગણિતીય પદાવલિ ચલ અને અચલની બનેલી હોય છે. આપણે **સરવાળા**, **બાદબાકી**, **ગુણાકાર** અને **ભાગાકાર** જેવી ક્રિયાઓ પદાવલિના ચલ અને અચલ પર કરીએ છીએ. ઉદાહરણ તરીકે પદાવલિના $4xy + 7$ એ ચલ x અને y તથા અચલ પદ 4 અને 7ની બનેલી છે. અચલ 4 અને ચલ x અને yનો ગુણાકાર કરી $4xy$ મેળવવામાં આવે છે. જેમાં 7 ઉમેરી આ પદાવલિ બનાવવામાં આવે છે.
2. પદાવલિ એ **પદ**ની બનેલી હોય છે. પદોના **સરવાળા**થી પદાવલિ બને છે. દાખલા તરીકે પદો $4xy$ અને 7નો સરવાળો પદાવલિ $4xy + 7$ બનાવે છે.
3. પદ એ **અવયવોનો ગુણાકાર** છે. પદાવલિ $4xy + 7$ માં $4xy$ એ અવયવ x, y અને 4નો ગુણાકાર છે. અવયવ જો ચલનો હોય તો તેને **બીજગણિતીય અવયવ** કહે છે.
4. **સહગુણક** એ પદમાં આંકડાકીય અવયવ છે. કેટલીક વખત પદમાંના કોઈ પણ અવયવને તે પદના બાકીના ભાગનો સહગુણક કહે છે.
5. પદાવલિમાં એક અથવા વધુ પદ હોય તો તેને **બહુપદી** કહે છે. ખાસ કરીને જો એક જ પદ પદાવલિમાં હોય તો તેને **એકપદી**, પદાવલિમાં બે પદ હોય તો **દ્વિપદી** અને ત્રણ પદ હોય તો તેને ત્રિપદી કહે છે.
6. પદો કે જેમાં સરખા બીજગણિતીય અવયવો હોય તો તે **સજાતીય પદો** છે. પદો કે જેમાં ભિન્ન બીજગણિતીય અવયવો હોય તો તે **વિજાતીય પદો** છે. આમ, પદો $4xy$ અને $-3xy$ સજાતીય પદો છે પરંતુ પદો $4xy$ અને$-3x$ સજાતીય પદો નથી.
7. **બે સજાતીય પદોનો સરવાળો** (અથવા **તફાવત**) એ એવું સજાતીય પદ છે, કે જેનો સહગુણક આ બંને સજાતીય પદોના **સહગુણકો**ના સરવાળા (તથા **તફાવત**) જેટલો હોય છે. જેમકે,
   $8xy - 3xy = (8 - 3)xy$, એટલે કે $5xy$
8. જ્યારે આપણે બે પદાવલિનો સરવાળો કરીએ છીએ ત્યારે **સજાતીય પદો**નો સરવાળો ઉપર આપ્યા પ્રમાણે કરવામાં આવે છે અને **વિજાતીય પદોને જ્યાં હોય ત્યાં છોડી દેવામાં આવે છે**. આમ $4x^2 + 5x$ અને$2x + 3$ એ $4x^2 + 7x + 3$ થાય. સજાતીય પદ $5x$ અને $2x$નો સરવાળો $7x$ થાય, જ્યારે $4x^2$ અને 3 જ્યાં હોય ત્યાં છોડી દેવામાં આવે છે.

9. એવી સ્થિતિં, જેમ કે સમીકરણ ઉકેલવું અને સૂત્રનો ઉપયોગ કરવામાં આપણે પદાવલિની કિંમત શોધીએ છીએ. પદાવલિની કિંમત પદાવલિની રચના કરતા ચલની કિંમત પર આધાર રાખે છે. આમ $7x - 3$ ની કિંમત $x = 5$ માટે 32 છે, જ્યાં $7(5) - 3 = 35 - 3 = 32$.

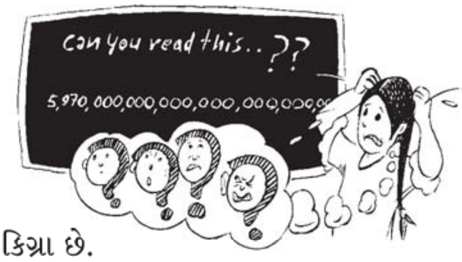
10. સંક્ષિપ્ત અને સામાન્ય સ્વરૂપે ગણિતમાં લખવામાં આવતાં નિયમો અને સૂત્રો માટે બીજગણિતીય પદાવલિનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. આમ, લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ $= lb$, જ્યાં l એ લંબાઈ અને b એ પહોળાઈ છે.

પદાવલિમાં સામાન્ય રીતે (n^{th}) પદોની નંબર પેટર્ન (અથવા ક્રમ) એ nમાં પદાવલિ છે. આમ, 11, 21, 31, 41, ... પેટર્નના nમાં પદની પદાવલિ $(10n + 1)$ છે.

પ્રકરણ 13

ઘાત અને ઘાતાંક

13.1 પ્રસ્તાવના :



શું તમે જાણો છો કે પૃથ્વીનું દળ કેટલું છે ? હા, તે 5, 970, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000 કિગ્રા છે.

તમે આ સંખ્યા વાંચી શકશો ?

યુરેનસનું દળ 86, 800, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000 કિગ્રા છે.

કોનું દળ વધુ છે પૃથ્વીનું કે યુરેનસનું ?

સૂર્ય અને શનિ વચ્ચેનું અંતર 1, 433, 500, 000, 000 મીટર તેમજ સૂર્ય અને યુરેનસ વચ્ચેનું અંતર 1, 439, 000, 000, 000 મીટર છે. શું તમે આ સંખ્યા વાંચી શકશો ? ક્યું અંતર ઓછું છે ?

આ એટલી મોટી સંખ્યા છે કે જે વાંચવા, સમજવા અને સરખામણી કરવામાં મુશ્કેલ છે. આ સંખ્યાને સરળતાથી વાંચવા, સમજવા અને તેમની સરખામણી કરવા માટે આપણે ઘાતાંકનો ઉપયોગ કરીશું. આ પ્રકરણમાં આપણે ઘાતાંક અને તેનો ઉપયોગ કેવી રીતે કરવામાં આવે છે એ શીખીશું.

13.2 ઘાતાંક (Exponents) :

આપણે મોટી સંખ્યાને ઘાતાંકનો ઉપયોગ કરી ટૂકમાં નીચે પ્રમાણે લખી શકીએ.

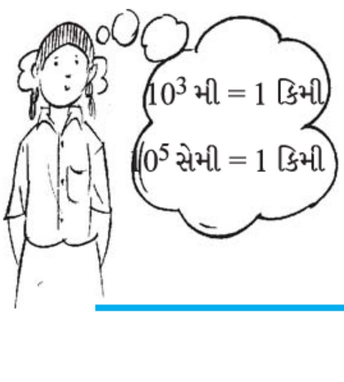
જુઓ $10{,}000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$

ગુણાકાર $10 \times 10 \times 10 \times 10$ માટેનો ટૂંકો સંકેત 10^4 છે. અહીં '10'ને **આધાર** અને '4'ને **ઘાતાંક** કહે છે. સંખ્યા 10^4 ને 10 ની 4 ઘાત એટલે કે દસની ચાર ઘાત એમ વાંચવામાં આવે છે. 10^4 ને 10000 નું ઘાતાંકીય સ્વરૂપ કહે છે.

તે જ રીતે આપણે 1000 ને 10ના ઘાતાંક સ્વરૂપે લઈ શકીએ.

નોંધો કે,

$1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$



ફરીથી અહીં 10^3 એ, 1000 નું ઘાતાંકીય સ્વરૂપ છે.

તે જ રીતે, $1{,}00{,}000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5$

10^5 એ 1,00,000 નું ઘાતાંકીય સ્વરૂપ છે. 10^3 ના કિસ્સામાં ઘાતાંક 3 અને 10^5 ના કિસ્સામાં ઘાતાંક 5 છે.

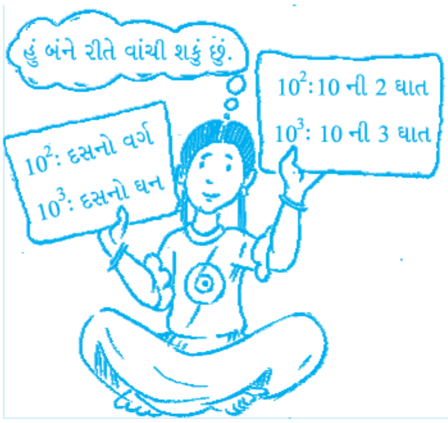
આપણે સંખ્યાઓ જેવી કે 10, 100 અને 1000 વગેરેનો ઉપયોગ કર્યો. આપણે સંખ્યાઓને દર્શાવ્યા મુજબ વિસ્તૃત સ્વરૂપે લખી શકીએ છીએ,

ઉદાહરણ તરીકે, $47561 = 4 \times 10000 + 7 \times 1000 + 5 \times 100 + 6 \times 10 + 1$.

આને આમ પણ લખી શકાય

$$4 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10 + 1$$

આ જ રીતે, સંખ્યાઓ 172, 5642 અને 6374ને લખવા પ્રયત્ન કરો. ઉપરનાં બધાં જ ઉદાહરણમાં આપણે જોયું કે સંખ્યાઓનો આધાર 10 છે. જો કે આધાર બીજી કોઈ સંખ્યા પણ હોઈ શકે.



જેમ કે, $81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$ ને $81 = 3^4$ એમ લખી શકાય.

અહીં 3 એ આધાર છે અને 4 એ ઘાતાંક છે.

કેટલાક ઘાતાંકને ચોક્કસ નામ હોય છે. જેમ કે, 10^2, જેને 10ની બે ઘાત કહે છે. પણ તેને '10નો વર્ગ' એમ પણ કહેવાય. 10^3, જેને 10નો ત્રણ ઘાત કહે છે. પણ તેને 10નો ઘન પણ કહેવાય. 5^3(5નો ઘન)નો અર્થ શું થાય તે કહી શકશો ?

$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$

તેથી, આપણે કહી શકીશું કે 125 એ 5નો 3 ઘાત છે.

5^3નો આધાર અને ઘાતાંક કયો છે ?

તે જ રીતે $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ જે 2નો પંચ ઘાત છે.

2^5 માં 2 એ આધાર અને 5 એ ઘાતાંક છે.

તેવી જ રીતે, $243 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$

$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$

$625 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$

પ્રયત્ન કરો

આ પ્રકારનાં વધુ પાંચ ઉદાહરણ શોધો જેમાં સંખ્યાને ઘાતાંકીય સ્વરૂપે રજૂ કરી શકાય. દરેક કિસ્સામાં આધાર અને ઘાતાંક પણ ઓળખી કાઢો.

જ્યારે આધાર ઋણ પૂર્ણાંક હોય ત્યારે પણ આ રીતે વિસ્તૃત કરી લખી શકો.

$(-2)^3$ નો અર્થ શું છે ?

તે છે $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = (-8)$

$(-2)^4 = 16$ છે ? તે ચકાસો.

કોઈ ચોક્કસ સંખ્યા લેવાને બદલે આધાર તરીકે કોઈ પૂર્ણાંક a લઈએ અને સંખ્યાની જેમ લખતાં,

$a \times a = a^2$ (જે aનો વર્ગ અથવા aનો બે ઘાત કહેવાય)

$a \times a \times a = a^3$ (જેને aનો ઘન અથવા aનો ત્રણ ઘાત કહેવાય)

$a \times a \times a \times a = a^4$ (જેને aનો ચાર ઘાત અથવા aનો ચતુર્થ ઘાત વંચાય)

....

$a \times a \times a \times a \times a \times a \times a = a^7$ (જેને aનો સાત ઘાત અથવા aનો સપ્ત ઘાત એમ વંચાય)

અને તે પરથી,

$a \times a \times a \times b \times b$ ને $a^3 b^2$ વડે દર્શાવી શકાય. (જેને a ઘન b વર્ગ વંચાય)

$a \times a \times b \times b \times b \times b$ ને $a^2 b^4$ વડે દર્શાવી શકાય. (જેને aની બે ઘાત bની ચાર ઘાત એમ વંચાય)

ઉદાહરણ 1 256ને 2ના ઘાત સ્વરૂપે દર્શાવો.

ઉકેલ આપણી પાસે

$256 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

તેથી આપણે કહી શકીએ કે $256 = 2^8$

ઉદાહરણ 2 2^3 અને 3^2 માં કઈ મોટી છે ?

ઉકેલ $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ અને $3^2 = 3 \times 3 = 9$

$9 > 8$ તેથી 3^2 એ 2^3 થી મોટી છે.

ઉદાહરણ 3 8^2 અને 2^8 માંથી કઈ મોટી છે ?

ઉકેલ $8^2 = 8 \times 8 = 64$

$2^8 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$

સ્પષ્ટ છે કે, $2^8 > 8^2$

ઉદાહરણ 4 વિસ્તરણ કરો $a^3 b^2$, $a^2 b^3$, $b^2 a^3$, $b^3 a^2$ શું તે બધા સરખા છે ?

ઉકેલ $a^3 b^2 = a^3 \times b^2$

$= (a \times a \times a) \times (b \times b)$

$= a \times a \times a \times b \times b$

$a^2 b^3 = a^2 \times b^3$

$= a \times a \times b \times b \times b$

$b^2 a^3 = b^2 \times a^3$

$= b \times b \times a \times a \times a$

$b^3 a^2 = b^3 \times a^2$

$= b \times b \times b \times a \times a$

નોંધો કે $a^3 b^2$ અને $a^2 b^3$ પદોના કિસ્સામાં a અને bના ઘાતાંક જુદા-જુદા છે. આમ $a^3 b^2$ અને $a^2 b^3$ જુદા જુદા છે.

બીજી બાજુ, $a^3 b^2$ અને $b^2 a^3$ એ સરખા છે. અહીં બંને પદોમાં a અને bના ઘાતાંક સરખા છે. તેમના અવયવના ક્રમનો કોઈ વાંધો નથી.

આ રીતે, $a^3 b^2 = a^3 \times b^2 = b^2 \times a^3 = b^2 a^3$ તે જ રીતે, $a^2 b^3$ અને $b^3 a^2$ સરખા છે.

પ્રયત્ન કરો

અભિવ્યક્તિ કરો :

(i) 729ને 3ની ઘાતમાં

(ii) 128ને 2ની ઘાતમાં

(iii) 343ને 7ની ઘાતમાં

ઉદાહરણ 5 નીચેની સંખ્યાઓના અવિભાજ્ય અવયવ પાડીને તેના ગુણાકાર સ્વરૂપને ઘાતમાં દર્શાવો.

(i) 72 (ii) 432 (iii) 1000 (iv) 16000

ઉકેલ

(i) $72 = 2 \times 36 = 2 \times 2 \times 18$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 9$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$

આમ, $72 = 2^3 \times 3^2$ (માંગેલા અવિભાજ્ય અવયવના ગુણાકાર સ્વરૂપ)

2	72
2	36
2	18
3	9
	3

(ii) $432 = 2 \times 216 = 2 \times 2 \times 108 = 2 \times 2 \times 2 \times 54$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 27 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 9$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

અથવા $432 = 2^4 \times 3^3$ (માગેલું સ્વરૂપ)

(iii) $1000 = 2 \times 500 = 2 \times 2 \times 250 = 2 \times 2 \times 2 \times 125$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 25 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$

અથવા $1000 = 2^3 \times 5^3$

> અતુલ આ ઉદાહરણને જુદી રીતે ઉકેલવા માંગે છે.
>
> $1000 = 10 \times 100 = 10 \times 10 \times 10$
>
> $= (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5)$ (જ્યાં $10 = 2 \times 5$)
>
> $= 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$
>
> અથવા $1000 = 2^3 \times 5^3$
>
> શું અતુલની રીત સાચી છે ?

(iv) $16{,}000 = 16 \times 1000 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times 1000 = 2^4 \times 10^3$ (જ્યાં $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$)

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5) = 2^4 \times 2^3 \times 5^3$

(જ્યાં $1000 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$)

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (5 \times 5 \times 5)$

અથવા $16{,}000 = 2^7 \times 5^3$

ઉદાહરણ 6 કિંમત શોધો : $(1)^5, (-1)^3, (-1)^4, (-10)^3, (-5)^4$.

ઉકેલ

(i) $(1)^5 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$

હકીકતમાં, તમને ખ્યાલ આવશે કે 1ના કોઈ પણ ઘાતની કિંમત 1 જ થાય.

> $(-1)^{\text{એકી સંખ્યા}} = -1$
>
> $(-1)^{\text{બેકી સંખ્યા}} = +1$

(ii) $(-1)^3 = (-1) \times (-1) \times (-1) = 1 \times (-1) = (-1)$

(iii) $(-1)^4 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = 1 \times 1 = 1$

તમે જોશો કે (–1) ના **એકી** ઘાતની કિંમત (–1) થાય અને (–1) ના **બેકી** ઘાતની કિંમત (+1) થાય.

(iv) $(-10)^3 = (-10) \times (-10) \times (-10) = 100 \times (-10) = -1000$

(v) $(-5)^4 = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = 25 \times 25 = 625$

સ્વાધ્યાય 13.1

1. કિંમત શોધો :

(i) 2^6 (ii) 9^3 (iii) 11^2 (iv) 5^4

2. નીચે દર્શાવેલ સ્વરૂપને ઘાત સ્વરૂપે લખો.

(i) $6 \times 6 \times 6 \times 6$ (ii) $t \times t$ (iii) $b \times b \times b \times b$

(iv) $5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$ (ii) $2 \times 2 \times a \times a$ (iii) $a \times a \times a \times c \times c \times c \times c \times d$

3. નીચે દર્શાવેલ દરેક સંખ્યાને ઘાતસ્વરૂપે ઘાતાંક સંકેતનો ઉપયોગ કરીને લખો :

(i) 512 (ii) 343 (iii) 729 (iv) 3125

4. નીચેના દરેકમાંથી શક્ય હોય ત્યાં મોટી સંખ્યા શોધી કાઢો.

(i) 4^3 અને 3^4 (ii) 5^3 અને 3^5 (iii) 2^8 અને 8^2

(iv) 100^2 અને 2^{100} (v) 2^{10} અને 10^2

5. નીચેના દરેકના અવિભાજ્ય અવયવ પાડીને તેના ગુણાકારને ઘાત સ્વરૂપે દર્શાવો.

(i) 648 (ii) 405 (iii) 540 (iv) 3,600

6. સાદુંરૂપ આપો :

(i) 2×10^3 (ii) $7^2 \times 2^2$ (iii) $2^3 \times 5$ (iv) 3×4^4

(v) 0×10^2 (vi) $5^2 \times 3^3$ (vii) $2^4 \times 3^2$ (viii) $3^2 \times 10^4$

7. સાદુંરૂપ આપો :

(i) $(-4)^3$ (ii) $(-3) \times (-2)^3$ (iii) $(-3)^2 \times (-5)^2$

(iv) $(-2)^3 \times (-10)^3$

8. નીચેની સંખ્યાઓની સરખામણી કરો :

(i) 2.7×10^{12} ; 1.5×10^8 (ii) 4×10^{14} ; 3×10^{17}

13.3 ઘાતાંકના નિયમો (Laws of Exponents)

13.3.1 સમાન આધારની ઘાતનો ગુણાકાર (Multiplying Powers with the Same Base)

CM42EN

(i) ચાલો ગણીએ : $2^2 \times 2^3$

$$2^2 \times 2^3 = (2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 2^{2+3}$$

નોંધ કરો કે 2^2 અને 2^3 નો આધાર સરખો છે અને તેમના ઘાતાંકો એટલે કે 2 અને 3 નો સરવાળો 5 છે.

(ii) $$(-3)^4 \times (-3)^3 = [(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)] \times [(-3) \times (-3) \times (-3)]$$
$$= (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$$
$$= (-3)^7$$
$$= (-3)^{4+3}$$

ફરીથી નોંધો કે, જો આધાર સરખો હોય તો ઘાતાંકોનો સરવાળો થાય, એટલે કે 4 અને 3નો સરવાળો 7 થાય.

(iii) $$a^2 \times a^4 = (a \times a) \times (a \times a \times a \times a)$$
$$= a \times a \times a \times a \times a \times a = a^6$$

(નોંધ : આધાર સરખો છે અને ઘાતાંકોનો સરવાળો $2 + 4 = 6$)

તે જ રીતે ચકાસો,

$$4^2 \times 4^2 = 4^{2+2}$$
$$3^2 \times 3^3 = 3^{2+3}$$

પ્રયત્ન કરો

સાદુંરૂપ આપો અને ઘાત સ્વરૂપે લખો :

(i) $2^5 \times 2^3$
(ii) $p^3 \times p^2$
(iii) $4^3 \times 4^2$
(iv) $a^3 \times a^2 \times a^7$
(v) $5^3 \times 5^7 \times 5^{12}$
(vi) $(-4)^{100} \times (-4)^{20}$

હવે, તમે યોગ્ય સંખ્યા આપેલા બૉક્સમાં લખી શકશો.

$$(-11)^2 \times (-11)^6 = (-11)^{\square}$$

$b^2 \times b^3 = b^{\square}$ (યાદ રાખો કે આધાર સરખો છે અને b પૂર્ણાંક છે.)

$c^3 \times c^4 = c^{\square}$ (c એ કોઈ પૂર્ણાંક છે.)

$d^{10} \times d^{20} = d^{\square}$

આ પરથી આપણે સામાન્ય રીતે તારવી શકીશું કે કોઈ પણ શૂન્ય સિવાયનો પૂર્ણાંક a હોય અને m અને n પૂર્ણ સંખ્યાઓ હોય તો.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

વિચારો !

ગણો $2^3 \times 3^2$

શું તમે ઘાતાંકોનો સરવાળો કરી શકશો ? ના, તમે જોયું, શા માટે ? 2^3 નો આધાર 2 છે જ્યારે 3^2 નો આધાર 3 છે. આધાર સરખા નથી.

13.3.2 સરખા આધાર પર ઘાતાંકોનો ભાગાકાર (Dividing Powers with the Same Base)

ચાલો સાદુંરૂપ આપીએ $3^7 \div 3^4$?

$$3^7 \div 3^4 = \frac{3^7}{3^4} = \frac{3\times3\times3\times3\times3\times3\times3}{3\times3\times3\times3}$$
$$= 3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 3^{7-4}$$

આમ, $3^7 \div 3^4 = 3^{7-4}$

(નોંધ 3^7 અને 3^4 નો આધાર સરખો છે અને $3^7 \div 3^4$ એ 3^{7-4} બને છે.)

તે જ રીતે,

$$5^6 \div 5^2 = \frac{5^6}{5^2} = \frac{5\times5\times5\times5\times5\times5}{5\times5}$$
$$= 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4 = 5^{6-2}$$

અથવા, $5^6 \div 5^2 = 5^{6-2}$

શૂન્ય સિવાયના પૂર્ણાંક હોય ત્યારે,

$$a^4 \div a^2 = \frac{a^4}{a^2} = \frac{a\times a\times a\times a}{a\times a} = a \times a = a^2 = a^{4-2}$$

અથવા, $a^4 \div a^2 = a^{4-2}$

હવે, તમે ઝડપથી જવાબ આપી શકશો ?

$$10^8 \div 10^3 = 10^{8-3} = 10^5$$
$$7^9 \div 7^6 = 7^{\square}$$
$$a^8 \div a^5 = a^{\square}$$

શૂન્ય સિવાયના પૂર્ણાંકો b અને c માટે,

$$b^{10} \div b^5 = b^{\square}$$

$$c^{100} \div c^{90} = c^{\square}$$

વ્યાપક રીતે, શૂન્ય સિવાયના પૂર્ણાંક a માટે,

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

જ્યાં m અને n પૂર્ણાંક સંખ્યા છે અને $m > n$.

પ્રયત્ન કરો

સાદુંરૂપ આપી તેને ઘાત સ્વરૂપે લખો :

(દા.ત. $11^6 \div 11^2 = 11^4$)

(i) $2^9 \div 2^3$ (ii) $10^8 \div 10^4$

(iii) $9^{11} \div 9^7$ (iv) $20^{15} \div 20^{13}$

(v) $7^{13} \div 7^{10}$

13.3.3 ઘાતનો ઘાત (Taking Power of a Power)

સાદું રૂપ આપો : $(2^3)^2\ (3^2)^4$

હવે, $(2^3)^2$, નો અર્થ (2^3) નો તેની સાથેનો બે વખત ગુણાકાર

$$(2^3)^2 = 2^3 \times 2^3$$

$$= 2^{3+3}\ (a^m \times a^n = a^{m+n})$$

$$= 2^6 = 2^{3\times2}$$

આમ, $(2^3)^2 = 2^{3\times2}$

તે જ રીતે, $(3^2)^4 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3^2$

$$= 3^{2+2+2+2}$$

$$= 3^8 \quad \text{(8 એ 2 અને 4નો ગુણાકાર છે)}$$

$$= 3^{2\times4}$$

તમે કહી શકશો કે, $(7^2)^{10}$ ને સમાન શું થશે ?

અહીં, $(2^3)^2 = 2^{3\times2} = 2^6$

$$(3^2)^4 = 3^{2\times4} = 3^8$$

તે જ રીતે, $(7^2)^{10} = 7^{2\times10} = 7^{20}$

$$(a^2)^3 = a^{2\times3} = a^6$$
$$(a^m)^3 = a^{m\times3} = a^{3m}$$

આ ઉપરથી આપણે તારવી શકીએ કે કોઈ શૂન્ય સિવાયનો પૂર્ણાંક 'a' હોય અને જ્યાં m અને n પૂર્ણ સંખ્યાઓ હોય, તો

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

આ પ્રયત્ન કરો

સાદું રૂપ આપી ઘાતાંક સ્વરૂપે જવાબ લખો :

(i) $(6^2)^4$ (ii) $(2^2)^{100}$

(iii) $(7^{50})^2$ (iv) $(5^3)^7$

ઉદાહરણ 7 $(5^2) \times 3$ અને $(5^2)^3$ માંથી કયું પદ મોટું છે તે તમે કહી શકશો ?

ઉકેલ $(5^2) \times 3$નો અર્થ 5^2નો 3 સાથેનો ગુણાકાર છે એટલે કે $5 \times 5 \times 3 = 75$

પરંતુ $(5^2)^3$ નો અર્થ 5^2નો પોતાની સાથેનો ત્રણ વખત ગુણાકાર છે. એટલે કે,

$$5^2 \times 5^2 \times 5^2 = 5^6 = 15,625$$

તેથી, $(5^2)^3 > (5)^2 \times 3$

13.3.4 સરખા ઘાતાંકના ઘાતનો ગુણાકાર (Multiplying Powers with the Same Exponents)

તમે $2^3 \times 3^3$ નું સાદું રૂપ આપી શકશો ? નોંધો કે અહીં બે પદો 2^3 અને 3^3 ના આધાર જુદા છે પણ ઘાતાંક સરખા છે.

હવે, $2^3 \times 3^3 = (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3)$
$= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$
$= 6 \times 6 \times 6$
$= 6^3$ (6 એ 2 વડે 3નો ગુણાકાર છે)

ગણો $4^4 \times 3^4 = (4 \times 4 \times 4 \times 4) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3)$
$= (4 \times 3) \times (4 \times 3) \times (4 \times 3) \times (4 \times 3)$
$= 12 \times 12 \times 12 \times 12$
$= 12^4$

ગણો $3^2 \times a^2 = (3 \times 3) \times (a \times a)$
$= (3 \times a) \times (3 \times a)$
$= (3 \times a)^2$
$= (3a)^2$ (નોંધ $3 \times a = 3a$)

આમ કરો

$a^m \times b^m = (ab)^m$; નો ઉપયોગ કરીને તે સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

(i) $4^3 \times 2^3$ (ii) $2^5 \times b^5$
(iii) $a^2 \times t^2$ (iv) $5^6 \times (-2)^6$
(v) $(-2)^4 \times (-3)^4$

તે જ રીતે, $a^4 \times b^4 = (a \times a \times a \times a) \times (b \times b \times b \times b)$
$= (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b)$
$= (a \times b)^4$
$= (ab)^4$ (નોંધ $a \times b = ab$)

તારવી શકાય કે, કોઈ શૂન્ય સિવાયના પૂર્ણાંક a અને b માટે.

$$a^m \times b^m = (ab)^m$$ (જ્યાં m એ એક પૂર્ણ સંખ્યા છે.)

ઉદાહરણ 8 નીચેનાં પદોને ઘાત સ્વરૂપે દર્શાવો.

(i) $(2 \times 3)^5$ (ii) $(2a)^4$ (iii) $(-4m)^3$

ઉકેલ

(i) $(2 \times 3)^5 = (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$
$= (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)$
$= 2^5 \times 3^5$

(ii) $(2a)^4 = 2a \times 2a \times 2a \times 2a$

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (a \times a \times a \times a)$

$= 2^4 \times a^4$

(iii) $(-4m)^3 = (-4 \times m)^3$

$= (-4 \times m) \times (-4 \times m) \times (-4 \times m)$

$= (-4) \times (-4) \times (-4) \times (m \times m \times m)$

$= (-4)^3 \times m^3$

13.3.5 સરખા ઘાતાંકવાળી સંખ્યાઓનો ભાગાકાર (Dividing Powers with the Same Exponents)

નીચે આપેલું સાદુંરૂપ જુઓ :

(i) $\dfrac{2^4}{3^4} = \dfrac{2\times2\times2\times2}{3\times3\times3\times3} = \dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^4$

(ii) $\dfrac{a^3}{b^3} = \dfrac{a\times a\times a}{b\times b\times b} = \dfrac{a}{b}\times\dfrac{a}{b}\times\dfrac{a}{b} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^3$

ઉદાહરણો પરથી આપણે તારવી શકીએ કે,

$a^m \div b^m = \dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$ જ્યા a અને b શૂન્ય સિવાયના પૂર્ણાંક છે અને m એ પૂર્ણ સંખ્યા છે.

પ્રયત્ન કરો

$a^m \div b^m = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$ નો ઉપયોગ કરી બીજી રીતે લખો.

(i) $4^5 \div 3^5$

(ii) $2^5 \div b^5$

(iii) $(-2)^3 \div b^3$

(iv) $p^4 \div q^4$

(v) $5^6 \div (-2)^6$

ઉદાહરણ 9 વિસ્તાર કરો : (i) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^4$ (ii) $\left(\dfrac{-4}{7}\right)^5$

ઉકેલ

(i) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^4 = \dfrac{3^4}{5^4} = \dfrac{3\times3\times3\times3}{5\times5\times5\times5}$

(ii) $\left(\dfrac{-4}{7}\right)^5 = \dfrac{(-4)^5}{7^5} = \dfrac{(-4)\times(-4)\times(-4)\times(-4)\times(-4)}{7\times7\times7\times7\times7}$

- **ઘાતાંક 0 સાથેની સંખ્યા (Numbers with Exponent Zero)**

$\dfrac{3^5}{3^5}$ ને સમાન શું હશે ? તે તમે કહી શકશો ?

$\dfrac{3^5}{3^5} = \dfrac{3\times3\times3\times3\times3}{3\times3\times3\times3\times3} = 1$

ઘાતાંકના નિયમનો ઉપયોગ કરતાં

a^0 શું છે ?

નીચેની પેટર્નનું અવલોકન કરો

$2^6 = 64$

$2^5 = 32$

$2^4 = 16$

$2^3 = 8$

$2^2 = ?$

$2^1 = ?$

$2^0 = ?$

આ પેટર્નના અભ્યાસ પરથી તમે 2^0ની કિંમતનું અનુમાન કરી શકશો. તમે શોધી શકશો કે $2^0 = 1$ જો તમે $3^6 = 729$ થી શરૂ કરો અને ઉપર દર્શાવેલ પદ્ધતિને અનુસરો તો લખી શકશો કે 3^5, 3^4, 3^3, ... વગેરે, હવે 3^0 શું હશે ?

$$3^5 \div 3^5 = 3^{5-5} = 3^0$$

તેથી, $3^0 = 1$

7^0 ને સમાન સંખ્યા કઈ તે હવે તમે કહી શકશો ?

$$7^3 \div 7^3 = 7^{3-3} = 7^0$$

અને, $\frac{7^3}{7^3} = \frac{7\times7\times7}{7\times7\times7} = 1$

તેથી, $7^0 = 1$

તેવી જ રીતે, $a^3 \div a^3 = a^{3-3} = a^0$

અને, $a^3 \div a^3 = \frac{a^3}{a^3} = \frac{a\times a\times a}{a\times a\times a} = 1$

આમ, $a^0 = 1$ (શૂન્ય સિવાયના પૂર્ણાંક a માટે)

તેથી, આપણે કહી શકીએ કે કોઈ પણ સંખ્યા(0 સિવાયની)ના 0 ઘાતની કિંમત 1 છે.

13.4 ઘાતાંકના નિયમોનો ઉપયોગ થતો હોય તેવાં ઉદાહરણો

ઘાતાંકના નિયમોનો ઉપયોગ થતો હોય તેવા કેટલાંક ઉદાહરણો આપણે જોઈએ,

ઉદાહરણ 10 2ને આધાર તરીકે લઈ $8 \times 8 \times 8 \times 8$ને ઘાતાંક સ્વરૂપે દર્શાવો.

ઉકેલ હવે, $8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^4$

પરંતુ આપણે જાણીએ છીએ કે, $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

તેથી, $8^4 = (2^3)^4 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3$

$= 2^{3\times4}$ [અહીં તમે $(a^m)^n = a^{mn}$ નો ઉપયોગ કર્યો છે]

$= 2^{12}$

ઉદાહરણ 11 સાદુંરૂપ આપો અને જવાબને ઘાતાંક સ્વરૂપે લખો.

(i) $\left(\frac{3^7}{3^2}\right) \times 3^5$ (ii) $2^3 \times 2^2 \times 5^5$ (iii) $(6^2 \times 6^4) \div 6^3$

(iv) $[(2^2)^3 \times 3^6] \times 5^6$ (v) $8^2 \div 2^3$

ઉકેલ

(i) $\left(\frac{3^7}{3^2}\right) \times 3^5 = \left(3^{7-2}\right) \times 3^5$

$= 3^5 \times 3^5 = 3^{5+5} = 3^{10}$

(ii) $2^3 \times 2^2 \times 5^5 = 2^{3+2} \times 5^5$

$= 2^5 \times 5^5 = (2 \times 5)^5 = 10^5$

(iii) $(6^2 \times 6^4) \div 6^3 = 6^{2+4} \div 6^3$

$= \dfrac{6^6}{6^3} = 6^{6-3} = 6^3$

(iv) $\left[\left(2^2\right)^3 \times 3^6\right] \times 5^6 = \left[2^6 \times 3^6\right] \times 5^6$

$= (2 \times 3)^6 \times 5^6$

$= (2 \times 3 \times 5)^6 = 30^6$

(v) $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

તેથી, $8^2 \div 2^3 = (2^3)^2 \div 2^3$

$= 2^6 \div 2^3 = 2^{6-3} = 2^3$

ઉદાહરણ 12 સાદુંરૂપ આપો :

(i) $\dfrac{12^4 \times 9^3 \times 4}{6^3 \times 8^2 \times 27}$ (ii) $2^3 \times a^3 \times 5a^4$ (iii) $\dfrac{2 \times 3^4 \times 2^5}{9 \times 4^2}$

ઉકેલ

(i) અહીં, $\dfrac{12^4 \times 9^3 \times 4}{6^3 \times 8^2 \times 27} = \dfrac{(2^2 \times 3)^4 \times (3^2)^3 \times 2^2}{(2 \times 3)^3 \times (2^3)^2 \times 3^3}$

$= \dfrac{(2^2)^4 \times (3)^4 \times 3^{2\times3} \times 2^2}{2^3 \times 3^3 \times 2^{2\times3} \times 3^3} = \dfrac{2^8 \times 2^2 \times 3^4 \times 3^6}{2^3 \times 2^6 \times 3^3 \times 3^3}$

$= \dfrac{2^{8+2} \times 3^{4+6}}{2^{3+6} \times 3^{3+3}} = \dfrac{2^{10} \times 3^{10}}{2^9 \times 3^6}$

$= 2^{10-9} \times 3^{10-6} = 2^1 \times 3^4$

$= 2 \times 81 = 162$

(ii) $2^3 \times a^3 \times 5a^4 = 2^3 \times a^3 \times 5 \times a^4$

$= 2^3 \times 5 \times a^3 \times a^4 = 8 \times 5 \times a^{3+4}$

$= 40\, a^7$

(iii) $\dfrac{2 \times 3^4 \times 2^5}{9 \times 4^2} = \dfrac{2 \times 3^4 \times 2^5}{3^2 \times (2^2)^2} = \dfrac{2 \times 2^5 \times 3^4}{3^2 \times 2^{2\times 2}}$

$$= \frac{2^{1+5} \times 3^4}{2^4 \times 3^2} = \frac{2^6 \times 3^4}{2^4 \times 3^2} = 2^{6-4} \times 3^{4-2}$$

$$= 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$$

નોંધ : આ પ્રકરણનાં મોટાં ભાગનાં ઉદાહરણમાં ઘાતાંકનો આધાર પૂર્ણાંક સંખ્યા લેવામાં આવેલ છે. પરંતુ પ્રકરણનાં બધાં જ નિયમોમાં આધાર તરીકે સંમેય સંખ્યા હોય તો પણ સમાન રીતે લાગુ પડે છે.

સ્વાધ્યાય 13.2

1. ઘાતાંકના નિયમોનો ઉપયોગ કરી સાદુંરૂપ આપો અને જવાબને ઘાત સ્વરૂપે લખો.

(i) $3^2 \times 3^4 \times 3^8$ (ii) $6^{15} \div 6^{10}$ (iii) $a^3 \times a^2$

(iv) $7^x \times 7^2$ (v) $(5^2)^3 \div 5^3$ (vi) $2^5 \times 5^5$

(vii) $a^4 \times b^4$ (viii) $(3^4)^3$ (ix) $(2^{20} \div 2^{15}) \times 2^3$

(x) $8^t \div 8^2$

2. સાદુંરૂપ આપી નીચેના દરેકને ઘાત સ્વરૂપે દર્શાવો.

(i) $\dfrac{2^3 \times 3^4 \times 4}{3 \times 32}$ (ii) $\left[\left(5^2\right)^3 \times 5^4\right] \div 5^7$ (iii) $25^4 \div 5^3$

(iv) $\dfrac{3 \times 7^2 \times 11^8}{21 \times 11^3}$ (v) $\dfrac{3^7}{3^4 \times 3^3}$ (vi) $2^0 + 3^0 + 4^0$

(vii) $2^0 \times 3^0 \times 4^0$ (viii) $(3^0 + 2^0) \times 5^0$ (ix) $\dfrac{2^8 \times a^5}{4^3 \times a^3}$

(x) $\left(\dfrac{a^5}{a^3}\right) \times a^8$ (xi) $\dfrac{4^5 \times a^8 b^3}{4^5 \times a^5 b^2}$ (xii) $(2^3 \times 2)^2$

3. ખરાં છે કે ખોટાં તે કહો અને તમારા જવાબને ચકાસો.

(i) $10 \times 10^{11} = 100^{11}$ (ii) $2^3 > 5^2$ (iii) $2^3 \times 3^2 = 6^5$

(iv) $3^0 = (1000)^0$

4. નીચેના ગુણાકારના અવિભાજ્ય અવયવ પાડી તેને ઘાત સ્વરૂપે દર્શાવો.

(i) 108×192 (ii) 270 (iii) 729×64

(iv) 768

5. સાદું રૂપ આપો :

(i) $\dfrac{\left(2^5\right)^2 \times 7^3}{8^3 \times 7}$ (ii) $\dfrac{25 \times 5^2 \times t^8}{10^3 \times t^4}$ (iii) $\dfrac{3^5 \times 10^5 \times 25}{5^7 \times 6^5}$

13.5 દશાંશ પદ્ધતિ (Decimal Number System)

CMCXGB

47561નું વિસ્તૃત સ્વરૂપ જુઓ, કે જે આપણે જાણીએ છીએ :

$$47561 = 4 \times 10000 + 7 \times 1000 + 5 \times 100 + 6 \times 10 + 1$$

આપણે તેને 10ના ઘાતનો ઉપયોગ કરી ઘાત સ્વરૂપે દર્શાવીએ.

તેથી, $47561 = 4 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 1 \times 10^0$

(નોંધો કે, $10000 = 10^4$, $1000 = 10^3$, $100 = 10^2$, $10 = 10^1$ અને $1 = 10^0$)

ચાલો, બીજી સંખ્યાનું વિસ્તરણ જોઈએ :

$$104278 = 1 \times 100000 + 0 \times 10000 + 4 \times 1000 + 2 \times 100 + 7 \times 10 + 8 \times 1$$
$$= 1 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 8 \times 10^0$$
$$= 1 \times 10^5 + 4 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 8 \times 10^0$$

નોંધો કે, xનો ઘાત મહત્તમ કિંમત 5 થી શરૂ થાય છે અને દરેક પગથિયે 1નો ઘટાડો થઈ ડાબેથી જમણાં જતાં 0 થાય છે.

13.6 વિશાળ સંખ્યાઓને પ્રમાણભૂત સ્વરૂપમાં દર્શાવવી

ચાલો, આપણે પ્રકરણની શરૂઆત થઈ ત્યાં પાછા જઈએ. આપણે કહ્યું હતું કે મોટી સંખ્યાઓને ઘાતાંકનો ઉપયોગ કરીને સરળતાથી દર્શાવી શકીએ છીએ. આપણે હજુ સુધી તે સંખ્યાઓ જોઈ નથી, હવે આપણે તે જોઈએ.

1. સૂર્ય એ આપણી આકાશગંગા ગેલેક્સીના કેન્દ્રથી 300, 000, 000, 000, 000, 000, 000 મીટર દૂર આવેલો છે.
2. આપણી ગેલેક્સીમાં 100, 000, 000, 000 તારાઓ આવેલા છે.
3. પૃથ્વીનું દળ 5, 976, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000 કિગ્રા છે.

આ સંખ્યાઓ વાંચવા અને લખવા માટે સરળ નથી. તેને સરળ બનાવવા ઘાતનો ઉપયોગ કરીશું.

નીચેનાનું અવલોકન કરો :

$$59 = 5.9 \times 10 = 5.9 \times 10^1$$
$$590 = 5.9 \times 100 = 5.9 \times 10^2$$
$$5900 = 5.9 \times 1000 = 5.9 \times 10^3$$
$$59000 = 5.9 \times 10000 = 5.9 \times 10^4$$

પ્રયત્ન કરો

10 ના ઘાતમાં વિસ્તૃત રીતે દર્શાવી ઘાત સ્વરૂપ લખો.

(i) 172

(ii) 5,643

(iii) 56,439

(iv) 1,76,428

કોઈ પણ સંખ્યાને (1 તથા 1.0 અને 10.0 વચ્ચેની દશાંશ સંખ્યા $\times$ 10 નો ઘાત) સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય છે. સંખ્યાના આવા સ્વરૂપને પ્રમાણભૂત સ્વરૂપ કહે છે.

$5{,}985 = 5.985 \times 1000 = 5.985 \times 10^3$ એ 5985નું પ્રમાણભૂત સ્વરૂપ છે.

નોંધો કે 5985ને 59.85×100 અથવા 59.85×10^2 સ્વરૂપે લખી શકાય, પણ તે 5985નું પ્રમાણભૂત સ્વરૂપ નથી. તે જ રીતે $5985 = 0.5985 \times 10{,}000 = 0.5985 \times 10^4$ લખી શકાય, તે પણ 5985નું પ્રમાણભૂત સ્વરૂપ નથી. હવે આપણે પ્રકરણની શરૂઆતમાં આવતી વિશાળ સંખ્યાઓને આ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકીશું. આપણી ગેલેક્સી (આકાશગંગા)ના કેન્દ્રથી સૂર્યનું અંતર

300, 000, 000, 000, 000, 000, 000 મીટરને

$3.0 \times 100, 000, 000, 000, 000, 000, 000 = 3.0 \times 10^{20}$ મીટર લખી શકીશું.

હવે, તમે 40, 000, 000, 000 ને આ સ્વરૂપે દર્શાવી શકશો ?

આમાં, કેટલા ‘0’ છે તે ગણો તે 10 છે.

તેથી, $40, 000, 000, 000 = 4.0 \times 10^{10}$

પૃથ્વીનું દળ = 5,976, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000 કિગ્રા

$= 5.976 \times 10^{24}$ કિગ્રા

તમે એ હકીકત સાથે સહમત છો કે પ્રમાણભૂત સ્વરૂપમાં દર્શાવવામાં આવતી સંખ્યા એ 25 અંકમાં લખવામાં આવતી સંખ્યા કરતાં વાંચવા, સમજવા કે સરખામણી કરવામાં સરળ છે ?

યુરેનસનું દળ = 86, 800, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000 કિગ્રા

$= 8.68 \times 10^{25}$ કિગ્રા

ઉપરના બંનેની 10 ની ઘાત સરળતાથી સરખાવી શકાય. તમે કહી શકશો કે યરેનસનું દળ એ પૃથ્વીનાં દળ કરતાં વધુ હશે.

સૂર્ય અને શનિ વચ્ચેનું અંતર 1,433, 500, 000, 000 મીટર અથવા 1.4335×10^{12} મીટર છે. યુરેનસ અને શનિ વચ્ચેનું અંતર 1, 439, 000, 000, 000 મીટર અથવા 1.439×10^{12} મીટર થશે. સૂર્ય અને પૃથ્વી વચ્ચેનું અંતર 1, 49, 600, 000, 000 મીટર અથવા 1.496×10^{11} મીટર છે.

ત્રણમાંથી સૌથી ઓછું અંતર કયું છે તે તમે કહી શકશો ?

ઉદાહરણ 13 નીચેની સંખ્યાઓને પ્રમાણભૂત સ્વરૂપમાં દર્શાવો :

(i) 5985.3 (ii) 65,950

(iii) 3, 430,000 (iv) 70,040,000,000

ઉકેલ

(i) $5985.3 = 5.9853 \times 1000 = 5.9853 \times 10^3$

(ii) $65{,}950 = 6.595 \times 10{,}000 = 6.595 \times 10^4$

(iii) $3{,}430{,}000 = 3.43 \times 1{,}000{,}000 = 3.43 \times 10^6$

(iv) $70{,}040{,}000, 000 = 7.004 \times 10{,}000{,}000, 000 = 7.004 \times 10^{10}$

એ મુદ્દો યાદ રાખો કે જો સંખ્યામાં દશાંશચિહ્ન આપેલ હોય અને તેને 10 ની ઘાતના પ્રમાણભૂત સ્વરૂપમાં ફેરવવાની હોય તો દશાંશચિહ્નની ડાબી બાજુ જેટલા અંકો હોય તેના કરતાં એક અંક ઓછો આવશે. આમ 70,040,000,000 માં દશાંશચિહ્ન દેખાતું નથી. આપણે અનુમાન કરીએ કે તે જમણી બાજુના છેડે હશે, ત્યાંથી ડાબી બાજુના અંકોની સંખ્યા 11 છે. તેથી તેના પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં 10નો ઘાત 11 – 1 = 10 થશે. 5983.3 માં દશાંશ ચિહ્નની ડાબી બાજુ 4 અંક છે. તેથી તેના પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં 10નો ઘાત (4–1) = 3 થશે.

સ્વાધ્યાય 13.3

1. નીચેની સંખ્યાઓને વિસ્તૃત સ્વરૂપે લખો :

   279404, 3006194, 2806196, 120719, 20068

2. આપેલા દરેક વિસ્તૃત સ્વરૂપને સંખ્યામાં દર્શાવો.

   (a) $8 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0$

   (b) $4 \times 10^5 + 5 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 2 \times 10^0$

   (c) $3 \times 10^4 + 7 \times 10^2 + 5 \times 10^0$

   (d) $9 \times 10^5 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1$

3. નીચેની સંખ્યાઓને પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં લખો :

   (i) 5, 00, 00, 000 (ii) 70,00,000 (iii) 3,18,65,00,000

   (iv) 3,90,878 (v) 39087.8 (vi) 3908.78

4. નીચેનાં વિધાનોમાં દેખાતી સંખ્યાઓને પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં ફેરવો.

   (a) પૃથ્વી અને ચંદ્ર વચ્ચેનું અંતર 384, 000, 000 મીટર છે.

   (b) શૂન્યાવકાશમાં પ્રકાશનો વેગ 300, 000, 000 મી/સે છે.

   (c) પૃથ્વીનો વ્યાસ 1, 27, 56, 000 મીટર છે.

   (d) સૂર્યનો વ્યાસ 1, 400, 000, 000 મીટર છે.

   (e) આકાશ ગંગામાં સરેરાશ 100, 000, 000, 000 તારાઓ છે.

   (f) વિશ્વ 12,000, 000, 000, વર્ષ પહેલાં અસ્તિત્વમાં આવ્યું છે.

   (g) આકાશગંગા ગેલેક્સીના કેન્દ્રથી સૂર્યનું અંતર 300, 000, 000, 000, 000, 000, 000 મીટર છે.

   (h) 1.8 ગ્રામ વજન ધરાવતાં પાણીનાં ટીપાંમાં 60, 230, 000, 000, 000, 000, 000, 000 પરમાણુંઓ સમાયેલાં હોય છે.

   (i) પૃથ્વી પર 1, 353, 000, 000, ઘન કિલોમીટર દરિયાનું પાણી છે.

   (j) માર્ચ 2001માં ભારતની વસ્તી આશરે 1, 027, 000, 000 હતી.

આપણે શી ચર્ચા કરી ?

1. ઘણી મોટી સંખ્યાઓ વાંચવી, સમજવી, તેમની સરખામણી કરવી તથા તેમના પર કામ કરવાનું અઘરું છે, પરંતુ આપણે ઘાતાંકનો ઉપયોગ કરી આ મોટી સંખ્યાને નાના સ્વરૂપમાં ફેરવી તેને સરળ બનાવી શકીએ છીએ.

2. નીચે કેટલીક સંખ્યાઓનું ઘાત સ્વરૂપ આપેલ છે.

   $10,000 = 10^4$ (વંચાય 10નો 4 ઘાત)

   $243 = 3^5$, $128 = 2^7$

   અહીં, 10, 3 અને 2 આધાર છે, જ્યારે 4, 5 અને 7 તેને અનુરૂપ ઘાતાંક છે. આપણે તેમ પણ કહીશું કે 10,000 એ 10 નો 4 ઘાત છે, 243 એ 3નો 5 ઘાત છે. વગેરે...

3. ઘાતાંકીય સ્વરૂપમાં રહેલી સંખ્યાઓ ચોક્કસ નિયમોને અનુસરે છે, જે નીચે પ્રમાણે છે.

   શૂન્ય સિવાયના પૂર્ણાંક a અને b હોય અને m અને n પૂર્ણ સંખ્યાઓ હોય, તો

   (a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

   (b) $a^m \div a^n = a^{m-n}$, $m > n$

   (c) $(a^m)^n = a^{mn}$

   (d) $a^m \times b^m = (ab)^m$

   (e) $a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

   (f) $a^0 = 1$

   (g) (–1) નો બેકી ઘાત હોય તો કિંમત 1 મળે.

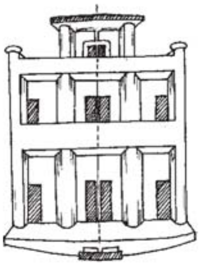
   (–1) નો એકી ઘાત હોય તો કિંમત (–1) મળે.

પ્રકરણ 14

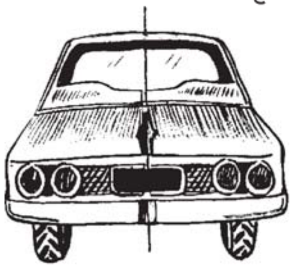
સંમિતિ

14.1 પ્રસ્તાવના :

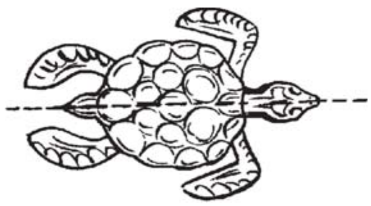
સંમિતિ એક મહત્ત્વપૂર્ણ ભૌમિતિક વિચાર છે, જે સામાન્ય રીતે પ્રકૃતિમાં પ્રદર્શિત થાય છે અને તેનો ઉપયોગ લગભગ દરેક ક્ષેત્રની પ્રવૃત્તિમાં કરવામાં આવે છે. કલાકારો, વ્યાવસાયિકો, કપડાં અથવા દાગીનાના ડિઝાઈનર, કાર ઉત્પાદકો, આર્કિટેક્ટ અને અન્ય ઘણા લોકો સંમિતિના વિચારનો ઉપયોગ કરે છે. મધપૂડો, ફૂલો, ઝાડના પાંદડાં, ધાર્મિક પ્રતીકો, ગાદલાં અને હાથ રૂમાલ જેવી દરેક જગ્યાએ તમને સંમિત આકૃતિઓની રચના મળશે.



સ્થાપત્ય



ઈજનેરી

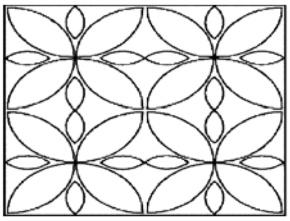


કુદરત

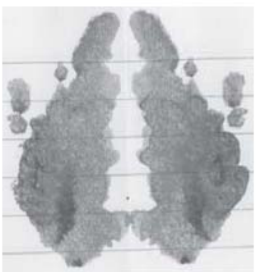
અગાઉનાં ધોરણમાં તમે રેખાની સંમિતિ વિશે શીખી ગયાં છો.

નીચેની આકૃતિઓ રેખાની સંમિતિ ધરાવે છે, જો તેમાં દર્શાવેલ રેખા પાસેથી તેને વાળી દેવાય તો આકૃતિના બંને ભાગ બંધ બેસતાં થાય.

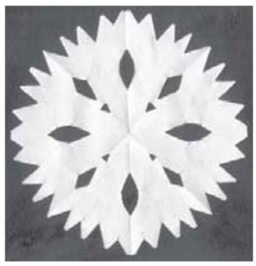
તમને આ વિચારોને તાજા કરવા ગમશે. તમને મદદ કરવા માટે અહીં કેટલીક પ્રવૃત્તિઓ આપી છે.



સંમિતિ દર્શાવતો ચિત્ર-સંગ્રહ બનાવો



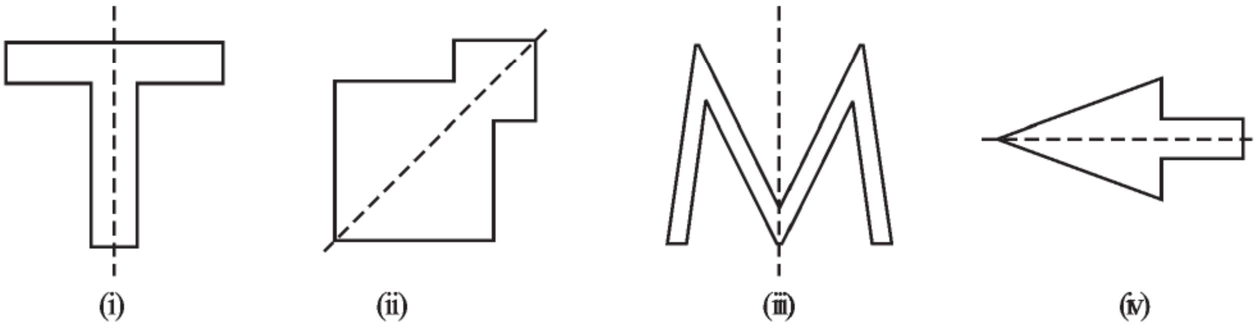
રંગીન શાહીના કેટલાક ડાઘા બનાવો



કાગળ કાપીને સંમિતિની રચના બનાવો

તમે એકત્રિત કરેલી રચનામાં રેખાઓની (જેને અક્ષ પણ કહેવાય છે) સંમિતિને ઓળખી તેનો આનંદ માણો.

ચાલો, આપણે હવે સંમિતિ પરના આપણા વિચારોને વધુ મજબૂત કરીએ. નીચેની આકૃતિઓનો અભ્યાસ કરો, જેમાં સંમિતિની રેખાને તૂટક રેખા વડે બતાવેલી છે. (આકૃતિ 14.1 (i) થી (iv)).



આકૃતિ 14.1

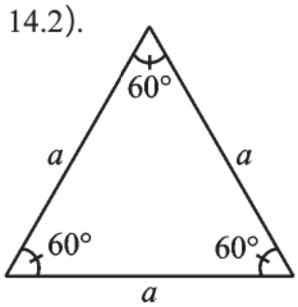
14.2 નિયમિત બહુકોણ આકૃતિ માટે રેખાઓની સંમિતિ

CMLTHY

તમે જાણો છો કે બહુકોણ એ બંધ આકૃતિ છે, જે ઘણા રેખાખંડથી બને છે. રેખાખંડની ઓછામાં ઓછી સંખ્યાથી બનેલો બહુકોણ એ ત્રિકોણ છે.(શું કોઈ બહુકોણ હોઈ શકે કે જે તમે હજુ પણ ઓછા રેખાખંડથી દોરી શકો ? એના વિશે વિચારો.)

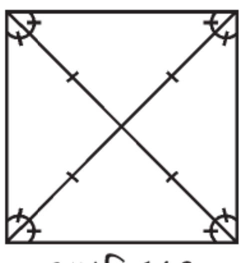
જો બહુકોણની તમામ બાજુઓ સમાન લંબાઈની હોય અને તમામ ખૂણા સમાન માપના હોય તો તેને નિયમિત બહુકોણ કહેવામાં આવે છે. આમ, એક સમબાજુ ત્રિકોણ એ ત્રણ બાજુઓનો નિયમિત બહુકોણ છે. શું તમે ચાર બાજુઓના નિયમિત બહુકોણનું નામ આપી શકો છો ?

એક સમબાજુ ત્રિકોણ નિયમિત છે કારણ કે તેની દરેક બાજુઓની લંબાઈ સમાન અને તેના દરેક ખૂણાનું માપ 60° છે. (આકૃતિ 14.2).



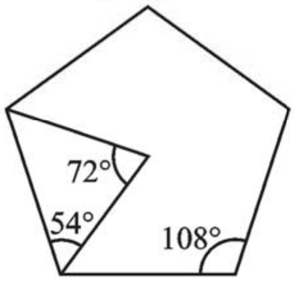
આકૃતિ 14.2

ચોરસ પણ નિયમિત છે. કારણ કે તેની બધી બાજુઓ સમાન લંબાઈની છે અને તેના દરેક ખૂણા કાટખૂણા (એટલે કે 90°) છે. તેના વિકર્ણ એકબીજાના લંબ દ્વિભાજક હોવાનું જણાય છે (આકૃતિ 14.3).

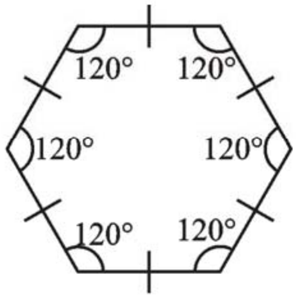


આકૃતિ 14.3

જો પંચકોણ નિયમિત હોય તો, સ્વાભાવિક રીતે તેની બાજુઓ સમાન લંબાઈની હોવી જોઈએ. તમને પાછળથી જાણવા મળશે કે, તે દરેકના ખૂણાનું માપ 108° થાય (આકૃતિ 14.4).



આકૃતિ 14.4



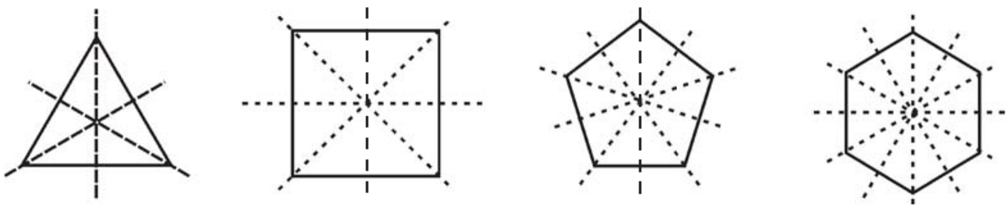
આકૃતિ 14.5

નિયમિત ષટ્કોણમાં તેની બાજુઓ સમાન હોય છે અને તેના દરેક ખૂણાનું માપ 120° હોય છે. તમે આ આકૃતિઓ વિશે આગળ વધુ અભ્યાસ કરશો. (આકૃતિ 14.5).

નિયમિત બહુકોણની આકૃતિઓ સપ્રમાણ હોય છે અને તેથી તેમની સંમિતિની રેખાઓ થોડી રસપ્રદ હોય છે. [આકૃતિ 14.6 (i) - (iv)].

દરેક નિયમિત બહુકોણ જેટલી બાજુઓ ધરાવે છે, તેટલી જ સંમિતિ રેખાઓ ધરાવે છે. આપણે કહી શકીએ છીએ, તેઓ બહુવિધ સંમિતિ રેખા ધરાવે છે.

ત્રણ સંમિતિ રેખા | **ચાર સંમિતિ રેખા** | **પાંચ સંમિતિ રેખા** | **છ સંમિતિ રેખા**



સમબાજુ ત્રિકોણ (i) | **ચોરસ** (ii) | **નિયમિત પંચકોણ** (iii) | **નિયમિત ષટ્કોણ** (iv)

આકૃતિ 14.6

કદાચ, તમને આ વિશે કાગળને વાળીને જાણવાનું ગમશે, કરી જુઓ.

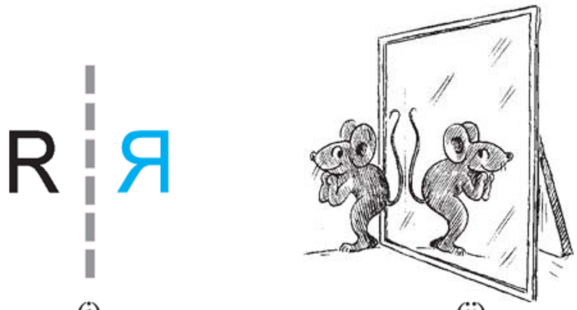
રૈખિક સંમિતિનો ખ્યાલ અરીસાના પ્રતિબિંબ સાથે ગાઢ સંબંધ ધરાવે છે. જ્યારે કોઈ આકારનો અડધો ભાગ તેના બીજા અડધા ભાગનું પ્રતિબિંબ હોય, ત્યારે તે આકાર રૈખિક સંમિતિ ધરાવે છે (આકૃતિ 14.7). આમ, અરીસાની રેખા, રૈખિક સંમિતિને જોવા માટે મદદરૂપ થાય છે (આકૃતિ 14.8).

આકૃતિ 14.7

તૂટક રેખા એ અરીસાની રેખા છે ? ના | **તૂટક રેખા એ અરીસાની રેખા છે ? હા**

આકૃતિ 14.8

જ્યારે આપણે અરીસાના પ્રતિબિંબની વાત કરીએ ત્યારે ડાબી અને જમણી બાજુના ફેરફારોને ધ્યાનમાં રાખવાની જરૂર છે. કે જે, અહીં આકૃતિમાં દર્શાવાયું છે (આકૃતિ 14.9).

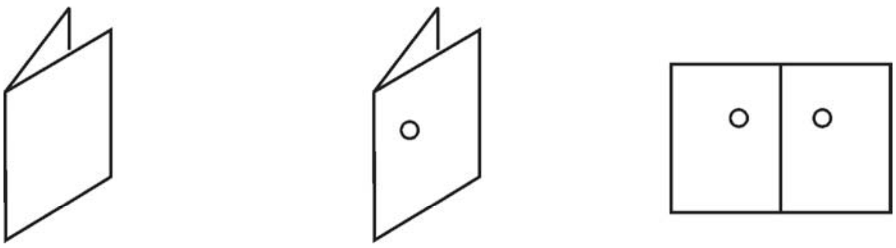


(i) (ii)

આકૃતિ 14.9

આકાર સરખા છે. પણ દિશા વિરુદ્ધ છે !

આ પંચિંગ ગેમ રમો



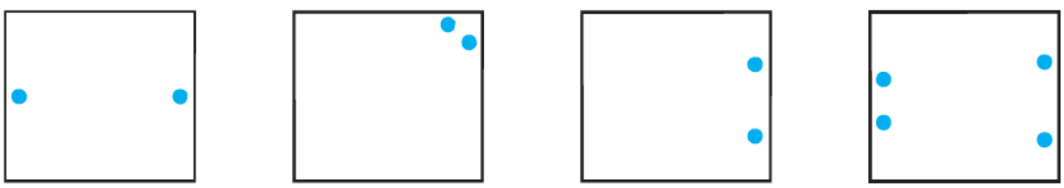
એક પૂંઠાને બે ભાગમાં વાળો | **તેમાં છિદ્ર પાડો** | **સંમિત ગડીની આજુબાજુ બે છિદ્રો**

આકૃતિ 14.10

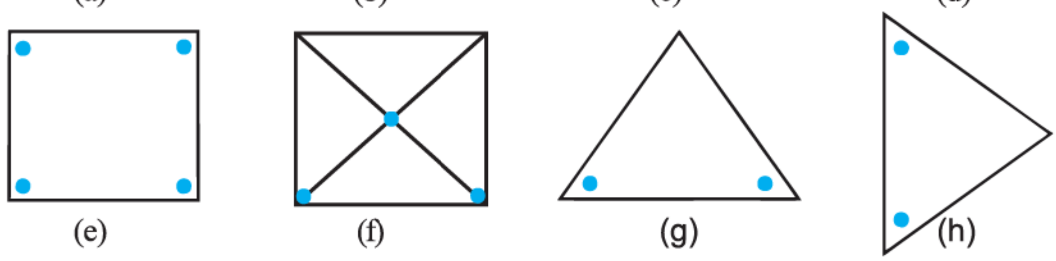
વાળેલા ભાગની રેખા (અથવા અક્ષ) એ રૈખિક સંમિતિ છે. વાળેલા પૂંઠા પર પાડવામાં આવેલ છિદ્રોનો, તેમનાં જુદાં જુદાં સ્થાનનો અને તેને અનુરૂપ રૈખિક સંમિતિઓનો અભ્યાસ કરો. (આકૃતિ 14.10).

સ્વાધ્યાય 14.1

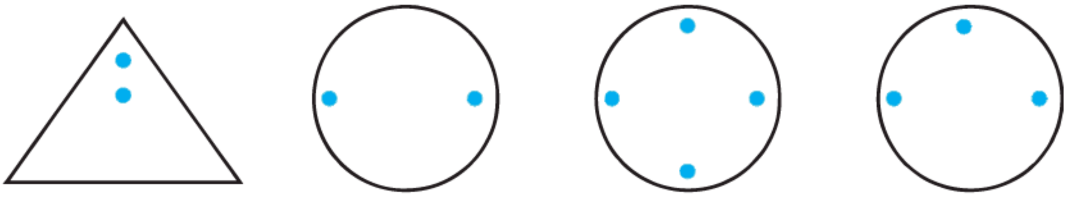
1. કાણાં પાડેલી આકૃતિની નકલ કરો અને સંમિતિની અક્ષ શોધો.



(a) (b) (c) (d)

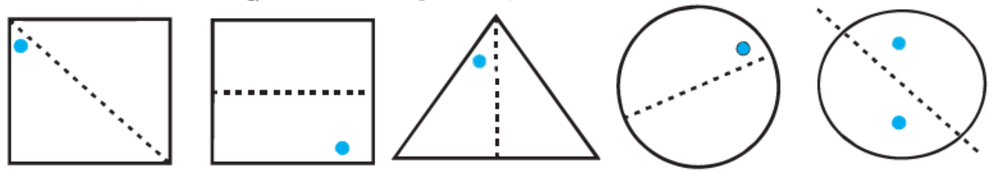


(e) (f) (g) (h)



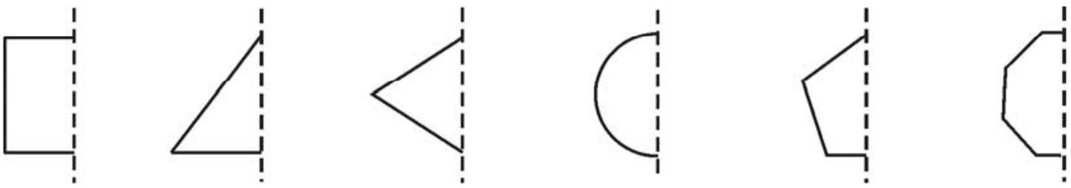
(i) (j) (k) (l)

2. આપેલી સંમિતિની રેખા દ્વારા બાકીનાં કાણાં શોધો.



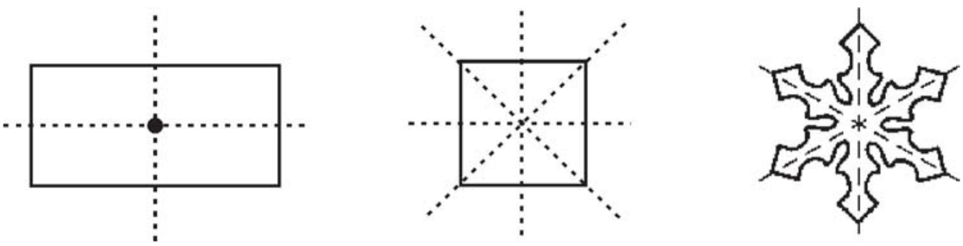
(a) (b) (c) (d) (e)

3. નીચેની આકૃતિઓમાં અરીસાની રેખા (એટલે કે સંમિતિની રેખા) તૂટક રેખા વડે દર્શાવવામાં આવી છે. તૂટક રેખા પર પ્રતિબિંબ વડે દરેક આકૃતિને પૂર્ણ કરો. (તમે તૂટક રેખા સામે અરીસો મૂકી અરીસામાં છબી જોઈ શકો છો.) શું તમે પૂર્ણ કરેલી આકૃતિઓના નામ ફરી યાદ કરી શકશો ?



(a) (b) (c) (d) (e) (f)

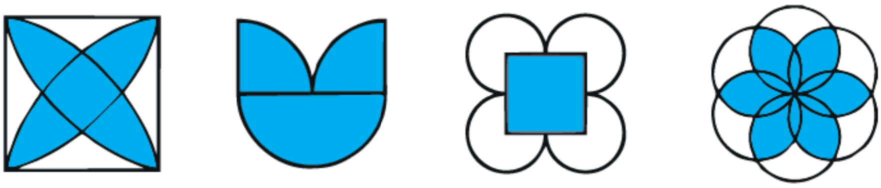
4. નીચે આપેલી આકૃતિઓ એક કરતાં વધારે સંમિતિની રેખા ધરાવે છે. આવી આકૃતિઓ ઘણી રૈખિક સંમિતિ ધરાવે છે એવું કહેવાય.



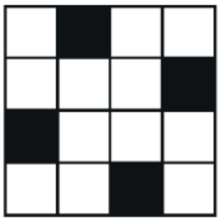
(a) (b) (c)

નીચેની આકૃતિઓમાં જો ઘણી રૈખિક સંમિતિ હોય, તો તે ઓળખો :

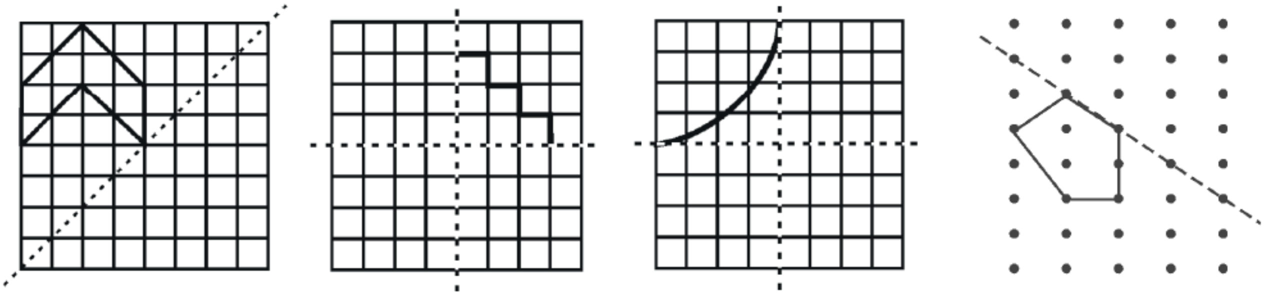
(a) (b) (c) (d)



(e) (f) (g) (h)



5. અહીં આપેલ આકૃતિની નકલ કરો. રૈખિક સંમિતિ તરીકે કોઈ પણ એક વિકર્ણ લો અને વિકર્ણ વિશે આકૃતિને સંમિત બનાવવા માટે વધુ ચોરસ છાયાંકિત કરો. શું તેના માટે એક કરતાં વધુ રીત શક્ય છે ? શું આકૃતિ બંને વિકર્ણો વિશે સંમિત હશે ?
6. આપેલી આકૃતિની નકલ કરો. દરેક આકારને, દર્શાવેલી તૂટક રેખાની આસપાસ સંમિત બને તે રીતે પૂર્ણ કરો.



(a) (b) (c) (d)

7. નીચેની આકૃતિઓ માટે સંમિતિની રેખાઓની સંખ્યા જણાવો.

   (a) સમબાજુ ત્રિકોણ (b) સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ (c) વિષમબાજુ ત્રિકોણ

   (d) ચોરસ (e) લંબચોરસ (f) સમબાજુ ચતુષ્કોણ

   (g) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ (h) ચતુષ્કોણ (i) નિયમિત ષટ્કોણ

   (j) વર્તુળ

8. અંગ્રેજી મૂળાક્ષરના કયા અક્ષર પરાવર્તિત સંમિતિ ધરાવે છે ? (એટલે કે અરીસામાં મળતાં પ્રતિબિંબ સંબંધિત સંમિતિ)

   (a) ઊભો અરીસો (b) આડો અરીસો (c) આડો અને ઊભો બંને અરીસા

9. ત્રણ એવા આકારનાં ઉદાહરણ આપો કે જેમાં સંમિતિની રેખા ન હોય.
10. નીચેની આકૃતિઓની રૈખિક સંમિતિને બીજું કયું નામ આપી શકાય ?

   (a) સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ (b) વર્તુળ

CMVPJL

14.3 પરિભ્રમણિય સંમિતિ (Rotational Symmetry)

જ્યારે ઘડિયાળના કાંટા એક વર્તુળ ફરે ત્યારે તમે શું કહી શકો ?

તમે કહી શકો કે તે પરિભ્રમણ કરે છે.

ઘડિયાળના ચંદાના કેન્દ્રને નિશ્ચિત બિંદુ લઈ ઘડિયાળના કાંટા ફક્ત એક જ દિશામાં પરિભ્રમણ કરે છે. ઘડિયાળના કાંટાનું પરિભ્રમણ એ કાંટાની દિશાનું પરિભ્રમણ કહેવાય છે જ્યારે તેની વિરુદ્ધ દિશાનું પરિભ્રમણ ઘડિયાળના કાંટાની વિરુદ્ધ દિશાનું પરિભ્રમણ છે.

પંખાના પાંખિયાના પરિભ્રમણ વિશે તમે શું કહી શકો છો ? શું તે ઘડિયાળના કાંટાની દિશામાં અથવા ઘડિયાળના કાંટાની વિરુદ્ધ દિશામાં પરિભ્રમણ કરે છે ? અથવા તેઓ બંને દિશામાં પરિભ્રમણ કરે છે ?

જો તમે સાયકલનાં પૈડાંને ફેરવો તો તે પરિભ્રમણ કરે છે. તે બંને દિશામાં, ઘડિયાળના કાંટાની દિશામાં અને ઘડિયાળના કાંટાની વિરુદ્ધ દિશામાં ફરી શકે છે. ઘડિયાળના કાંટાની દિશામાં અને ઘડિયાળના કાંટાની વિરુદ્ધ દિશામાં થતાં પરિભ્રમણ માટે દરેકનાં ત્રણ ઉદાહરણ આપો.

જ્યારે કોઈ વસ્તુ પરિભ્રમણ કરે છે ત્યારે તેનો આકાર અને કદ બદલાતાં નથી. પરિભ્રમણમાં નિશ્ચિત બિંદુની આસપાસ, વસ્તુ ફરે છે. આ નિશ્ચિત બિંદુ એ **પરિભ્રમણ કેન્દ્ર** છે. ઘડિયાળના કાંટાનું પરિભ્રમણ કેન્દ્ર કયું છે ? એના વિશે વિચારો.

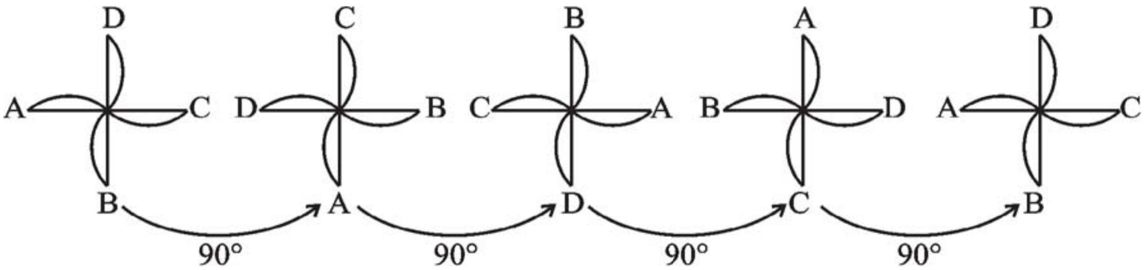
પરિભ્રમણ દરમિયાન બનતા ખૂણાને **પરિભ્રમણ કોણ** કહેવાય છે. એક સંપૂર્ણ પરિભ્રમણ 360°નું હોય છે એ તમે જાણો છો. (i) અડધું પરિભ્રમણ (ii) ચોથા ભાગનું પરિભ્રમણ માટે પરિભ્રમણ કોણનું અંશ માપ કેટલું ?

અડધા-પરિભ્રમણનો અર્થ છે કે 180° દ્વારા પરિભ્રમણ, ચોથા ભાગનું પરિભ્રમણ 90° દ્વારા થાય છે.

જ્યારે બાર વાગ્યે ત્યારે ઘડિયાળના કાંટા એક સાથે હોય છે. 3 વાગ્યા સુધીમાં મિનિટનો કાંટો ત્રણ પૂર્ણ આંટા ફરે, પરંતુ કલાકનો કાંટો માત્ર ચોથા ભાગનું પરિભ્રમણ જ કરે છે. તમે 6 વાગ્યાની તેમની સ્થિતિ વિશે શું કહી શકો છો ?

શું તમે ક્યારેય કાગળની ફરકડી બનાવી છે ? આકૃતિ 14.11માં કાગળની ફરકડી સંમિત દેખાય છે. પરંતુ તમને સંમિતિની કોઈપણ રેખા મળતી નથી.

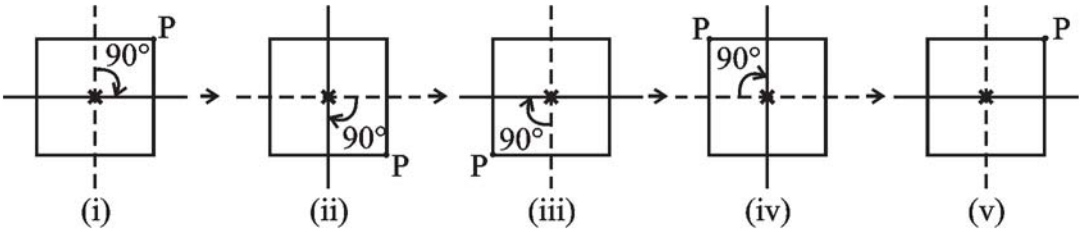
કોઈ પણ રીતે વાળવાથી તમને બે સમાન અડધિયાં મળતાં નથી. તેમ છતાં જો તેને 90°નું પરિભ્રમણ આપો તો ફરકડી સમાન જ દેખાશે. આપણે કહી શકીએ કે ફરકડીમાં **પરિભ્રમણીય સંમિતિ** છે.



આકૃતિ 14.12

સંપૂર્ણ પરિભ્રમણમાં ચાર સ્થાન ચોક્કસ હોય છે. (પરિભ્રમણ કોણ 90°, 180°, 270° અને 360°) ત્યારે ફરકડી બરાબર એ જ દેખાય છે. આ કારણે આપણે કહી શકીએ કે ચોથી કક્ષાની પરિભ્રમણીય સંમિતિ છે.

અહીં એક વધારે ઉદાહરણ પરિભ્રમણીય સંમિતિનું છે. આકૃતિ 14.13માં ચોરસનો એક ખૂણો P લો. ચાલો, ચોરસના કેન્દ્ર આગળ દર્શાવેલ નિશાની * ની આસપાસ ચોથા ભાગનું પરિભ્રમણ કરાવીએ.



આકૃતિ 14.13

આકૃતિ 14.13 (i) માં પ્રારંભિક સ્થિતિ છે. કેન્દ્ર આસપાસ 90°નું પરિભ્રમણ કરાવતાં આકૃતિ 14.13(ii) મળે છે. અહીં Pનું સ્થાન જુઓ. ફરી 90° નું પરિભ્રમણ કરાવતા આકૃતિ 14.13(iii) મળે છે. આ રીતે જ્યારે ચોથા ભાગના ચાર પરિભ્રમણ પૂરાં થાય છે ત્યારે ચોરસ તેની મૂળ સ્થિતિમાં આવે છે. તે હવે આકૃતિ 14.13(i) જેવી દેખાશે. દરેક વખતે Pના સ્થાન પરથી આ જોઈ શકાય છે.

આમ, ચોરસ તેના કેન્દ્ર વિશે ચોથી કક્ષાની પરિભ્રમણીય સંમિતિ ધરાવે છે. જુઓ કે :

(i) પરિભ્રમણનું કેન્દ્ર એ ચોરસનું કેન્દ્ર છે.

(ii) પરિભ્રમણનો કોણ 90° છે.

(iii) પરિભ્રમણની દિશા ઘડિયાળના કાંટાની દિશામાં છે.

(iv) પરિભ્રમણીય સંમિતિનો ક્રમ 4 છે.

પ્રયત્ન કરો

1. (a) તમે સમભુજ ત્રિકોણ માટે પરિભ્રમણીય સંમિતિની કક્ષા કહી શકો છો ? (આકૃતિ 14.14)

આકૃતિ 14.14

(b) કેન્દ્ર આસપાસ 120° દ્વારા પરિભ્રમણ કરવામાં આવે ત્યારે એવી કેટલી સ્થિતિ મળે છે કે જેના પર ત્રિકોણ એક સરખો જ દેખાય ?

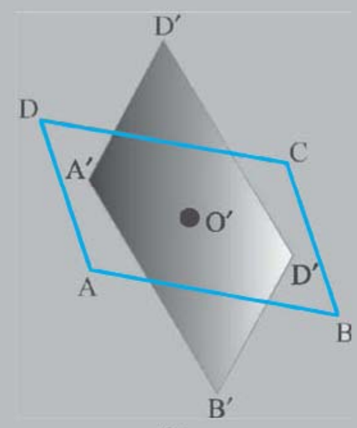
2. નીચેનામાંથી કયા આકારમાં નિશાન કરેલા બિંદુ આગળ પરિભ્રમણીય સંમિતિ છે ?

આકૃતિ 14.15

આટલું કરો

બે એકસરખા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD એક કાગળ પર અને A'B'C'D' બીજા એક પારદર્શક કાગળ પર દોરો. તેમના વિકર્ણોના છેદબિંદુઓ અનુક્રમે O અને O' દર્શાવો (આકૃતિ 14.16). આ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણોને એવી રીતે મૂકો કે જેથી A', A પર આવે; B', B પર આવે અને તેથી O', O પર આવશે.

હવે, O' બિંદુ પર એક ટાંકણી લગાવો. હવે, પારદર્શક આકારને ઘડિયાળના કાંટાની દિશામાં ફેરવો. એક પૂર્ણ આંટા દરમિયાન કેટલીવાર બંને આકારો બરાબર બંધબેસતા આવે છે ? પરિભ્રમણીય સંમિતતાનો ક્રમ કયો છે ?



આકૃતિ 14.16

જે બિંદુ પર ટાંકણી છે તે પરિભ્રમણ કેન્દ્ર છે. તે આ કિસ્સામાં વિકર્ણોનું છેદ બિંદુ છે.

દરેક વસ્તુની પરિભ્રમણીય સંમિતિ 1 છે, કારણ કે તે 360°ના પરિભ્રમણ (એટલે કે એક સંપૂર્ણ પરિભ્રમણ) પછી સમાન સ્થિતિ ધરાવે છે. આવા કિસ્સામાં આપણને કોઈ રસ નથી.

તમારી આસપાસ ઘણા આકારો છે જે પરિભ્રમણીય સંમિતિ ધરાવે છે (આકૃતિ 14.17).

ફળ (i) — માર્ગ ચિહ્ન (ii) — પૈંડુ (iii)

આકૃતિ 14.17

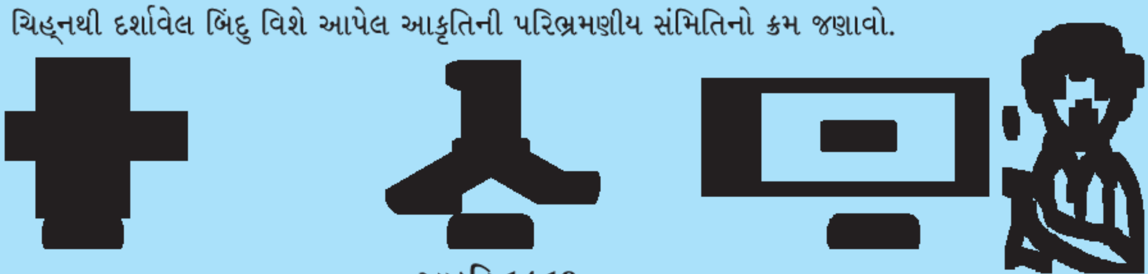
ઉદાહરણ તરીકે, જ્યારે તમે કેટલાંક ફળોને કાપો છો ત્યારે મળતો આડછેદ એ પરિભ્રમણ સંમિતિ ધરાવે છે. તમે આકૃતિને ધ્યાનથી જોશો ત્યારે તમને આશ્ચર્ય થશે [14.17 (i)]. એ ઉપરાંત રસ્તા પર દેખાતા ઘણા માર્ગ ચિહ્ન કે જે પરિભ્રમણીય સંમિતિ દર્શાવે છે. તમે આવા માર્ગ ચિહ્નોને ઓળખવાનો પ્રયત્ન કરો અને તેમની પરિભ્રમણીય સંમિતિનો ક્રમ શોધો [આકૃતિ 14.17 (ii)].

પરિભ્રમણીય સંમિતિ માટે કેટલાંક વધુ ઉદાહરણો વિચારી દરેક ઉદાહરણ માટે ચર્ચા કરો.

(i) પરિભ્રમણકેન્દ્ર વિશે
(ii) પરિભ્રમણકોણ વિશે
(iii) દિશાની પરિભ્રમણ પર અસર થાય તે વિશે અને
(iv) પરિભ્રમણીય સંમિતિના ક્રમ વિશે ચર્ચા કરો.

પ્રયત્ન કરો

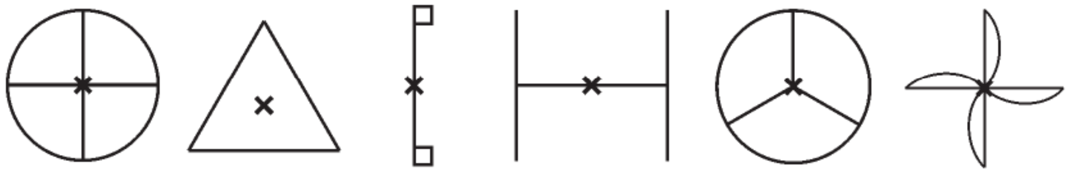
ચિહ્નથી દર્શાવેલ બિંદુ વિશે આપેલ આકૃતિની પરિભ્રમણીય સંમિતિનો ક્રમ જણાવો.



આકૃતિ 14.18

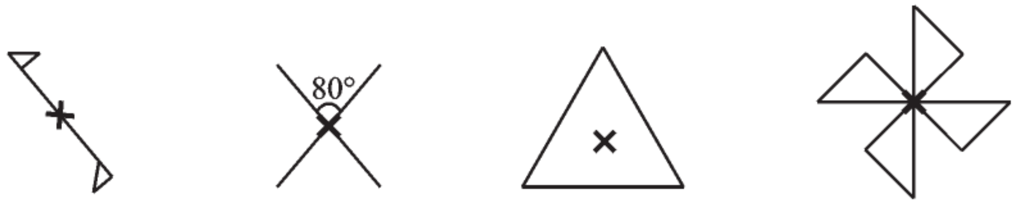
સ્વાધ્યાય 14.2

1. નીચે આપેલી કઈ આકૃતિમાં પરિભ્રમણીય સંમિતિનો ક્રમ 1 કરતાં વધુ છે ?

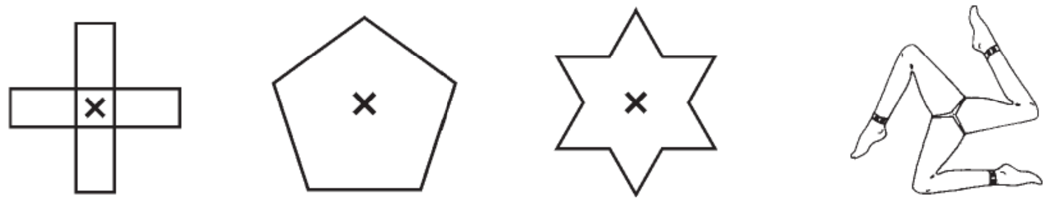


(a) (b) (c) (d) (e) (f)

2. દરેક આકૃતિ માટે પરિભ્રમણીય સંમિતિનો ક્રમ જણાવો.



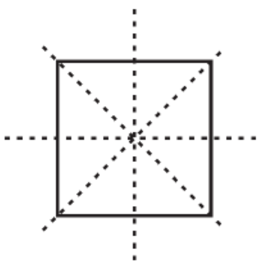
(a) (b) (c) (d)



(e) (f) (g) (h)

14.4 રૈખિક સંમિતિ અને પરિભ્રમણીય સંમિતિ

CZ12YI



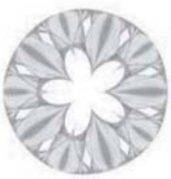
આકૃતિ 14.19

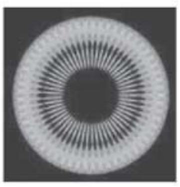
તમે અત્યાર સુધી ઘણાં આકારો અને તેમની સંમિતિ જોઈ. હવે તમે સમજી ગયા હશો, કે કેટલાક આકારોમાં માત્ર રૈખિક સંમિતિ છે અને કેટલાકમાં માત્ર પરિભ્રમણીય સંમિતિ, તો કેટલાકમાં બંને છે.

ઉદાહરણ તરીકે, વિચારો કે એક ચોરસ આકાર છે. (આકૃતિ 14.19)
તેમાં સંમિતિની કેટલી રેખાઓ છે ?
તેમાં પરિભ્રમણીય સંમિતિ છે ?

જો, હા, તો પરિભ્રમણીય સંમિતિનો ક્રમ કયો છે એના માટે વિચારો.

વર્તુળ એ સૌથી સંપૂર્ણ સંમિતિ ધરાવતી આકૃતિ છે, કારણ કે તેને કોઈ પણ ખૂણે તેના કેન્દ્રની ફરતે પરિભ્રમણ કરાવી શકાય છે અને સાથે સાથે તેમાં અમર્યાદિત સંખ્યામાં રૈખિક સંમિતિ છે.





કોઈ પણ વર્તુળની ભાતનું અવલોકન કરો. કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી દરેક રેખા (અર્થાત્ દરેક વ્યાસ) સંમિતિની રેખા છે (પ્રતિબિંબિત) અને તે દરેક ખૂણા માટે કેન્દ્રની આસપાસ પરિભ્રમણીય સંમિતિ ધરાવે છે.

આટલું કરો

કેટલાક અંગ્રેજી મૂળાક્ષરોની સંમિતિ અદ્ભુત છે. કયા મૂળાક્ષરોમાં એક જ રૈખિક સંમિતિ છે ? (ઉદાહરણ - E) કયા મૂળાક્ષરોનો પરિભ્રમણીય સંમિતિનો કક્ષા 2 છે ?

આવી રીતે વિચારવાનો પ્રયત્ન કરીને નીચેનું કોષ્ટક પૂર્ણ કરી શકશો.

મૂળાક્ષરો	રૈખિક સંમિતિ	રૈખિક સંમિતિની સંખ્યા	પરિભ્રમણ સંમિતિ	પરિભ્રમણ સંમિતિની કક્ષા
Z	ના	0	હા	2
S				
H	હા		હા	
O	હા		હા	
E	હા			
N			હા	
C				

સ્વાધ્યાય 14.3

1. કોઈ બે એવા આંકડા જણાવો કે જેની રૈખિક સંમિતિ અને પરિભ્રમણ સંમિતિ બંને હોય.
2. નીચેના દરેકમાં શક્ય હોય તો, કાચી આકૃતિ દોરો.
   (i) એકથી વધુ ક્રમની રૈખિક અને પરિભ્રમણીય બંને સંમિતિ હોય તેવો ત્રિકોણ.
   (ii) એકથી વધુ ક્રમની માત્ર રૈખિક સંમિતિ હોય પણ પરિભ્રમણીય સંમિતિ ન હોય તેનો ત્રિકોણ.
   (iii) એકથી વધુ ક્રમની પરિભ્રમણીય સંમિતિ હોય પણ રૈખિક સંમિતિ ન હોય તેવો ચતુષ્કોણ.
   (iv) એકથી વધુ ક્રમની રૈખિક સંમિતિ હોય પણ પરિભ્રણીય સંમિતિ ન હોય તેવો ચતુષ્કોણ.
3. જો કોઈ આકૃતિમાં બે અથવા વધુ રૈખિક સંમિતિ છે,
   જો પરિભ્રમણ સંમિતિ હોય તો તેનો ક્રમ 1 કરતાં વધુ છે ?
4. ખાલી જગ્યા પૂરો.

આકાર	પરિભ્રમણ કેન્દ્ર	પરિભ્રમણનો ક્રમ	પરિભ્રમણ કોણ
ચોરસ			
લંબચોરસ			
સમબાજુ ચતુષ્કોણ			
સમબાજુ ત્રિકોણ			
નિયમિત ષટ્કોણ			
વર્તુળ			
અર્ધવર્તુળ			

5. એવા ચતુષ્કોણનું નામ જણાવો કે જેની રૈખિક સંમિતિ અને પરિભ્રમણ સંમિતિ બંનેનો ક્રમ 1 કરતાં વધુ હોય.
6. કેન્દ્રથી 60° ફર્યા પછી આકૃતિ તેની મૂળ સ્થિતિના જેવી જ દેખાય છે. બીજા કયા ખૂણાઓ માટે આવું થશે ?
7. નીચે આપેલા ખૂણાઓ માટે શું આપણે 1 કરતાં વધુ ક્રમની પરિભ્રમણીય સંમિતિ મેળવી શકીએ ?

   (i) 45° (ii) 17°

આપણે શી ચર્ચા કરી ?

1. જો કોઈ રેખા દ્વારા આકૃતિ બે ભાગમાં એવી રીતે વહેંચાતી હોય કે બંને ભાગ બંધ-બેસતાં આવે તો તે આકૃતિને રૈખિક સંમિતિ છે એમ કહેવાય.
2. નિયમિત બહુકોણ સમાન બાજુઓ અને સમાન ખૂણાઓ ધરાવે છે. તે ઘણી વધારે (1 કરતાં વધુ) રૈખિક સંમિતિ ધરાવે છે.

નિયમિત બહુકોણ	નિયમિત ષટ્કોણ	નિયમિત પંચકોણ	ચોરસ	સમબાજુ ત્રિકોણ
સંમિતિની રેખાની સંખ્યા	6	5	4	3

3. દરેક નિયમિત બહુકોણ તેની જેટલી બાજુઓ હોય, તેટલી રૈખિક સંમિતિઓ ધરાવે છે.
4. અરીસામાં મળતું પ્રતિબિંબ સંમિતિ ધરાવે છે પરંતુ તેમાં ડાબી અને જમણી બાજુના ફેરફારોને ધ્યાનમાં લેવા જરૂરી છે.
5. પરિભ્રમણ કોઈ વસ્તુ (અથવા આકાર)ને એક નિશ્ચિત બિંદુ આસપાસ ફેરવે છે.

   નિશ્ચિત બિંદુને **પરિભ્રમણનું કેન્દ્ર** કહે છે. જે ખૂણે પરિભ્રમણ થાય તેને **પરિભ્રમણકોણ** કહે છે. 180°નું પરિભ્રમણ એ અર્ધપરિભ્રમણ છે અને 90°નું પરિભ્રમણ એ ચોથા ભાગનું પરિભ્રમણ છે. પરિભ્રમણ ઘડીયાળના કાંટાની દિશામાં અથવા તેની વિરુદ્ધ દિશામાં હોઈ શકે.
6. જો પરિભ્રમણ પછી પણ વસ્તુ બરાબર તેવી જ દેખાય તો આપણે કહી શકીએ છીએ કે તેની પરિભ્રમણીય **સંમિતિ** છે.
7. કોઈ પણ આકૃતિને 360° પરિભ્રમણ કરતાં, પરિભ્રમણ દરમિયાન જેટલી વખત આકૃતિ મૂળ આકૃતિ જેવી દેખાય તેને **પરિભ્રમણીય સંમિતિનો ક્રમ** કહેવાય છે. ચોરસની પરિભ્રમણીય સંમિતિની કક્ષા 4 છે, સમબાજુ ત્રિકોણની સંમિતિની કક્ષા 3 છે.
8. અમુક આકારોની ફક્ત એક જ રૈખિક સંમિતિ હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે E. અમુક આકારોની ફક્ત પરિભ્રમણીય સંમિતિ હોય છે, ઉદાહરણ તરીકે S. અમુકની બંને સંમિતિ હોય છે, ઉદાહરણ H. સંમિતિનો અભ્યાસ જરૂરી છે કારણ કે તે રોજિંદા જીવનમાં વારંવાર ઉપયોગમાં આવે છે અને વધુ મહત્ત્વની છે કારણ કે તે આપણને સુંદર ભાત પૂરી પાડે છે.

પ્રકરણ 15

FM1WQK

ઘન આકારોનું પ્રત્યક્ષીકરણ

15.1 પ્રસ્તાવના : સમતલીય આકૃતિઓ અને ઘન આકારો

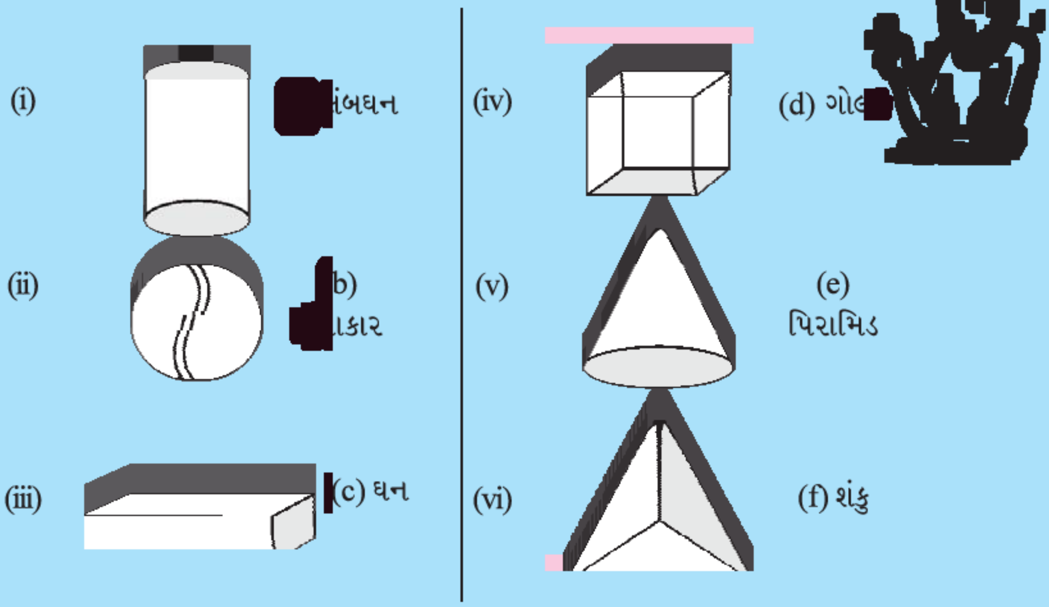
આ પ્રકરણમાં ‘‘પરિમાણ’’ના સંદર્ભમાં તમારી જાણીતી આકૃતિઓનું વર્ગીકરણ કરીશું.

આપણા દૈનિક જીવનમાં આપણી આસપાસ પુસ્તકો, દડા, આઈસ્ક્રીમના કોન વગેરે ભિન્ન આકારો ધરાવતી વસ્તુઓ આપણે જોઈએ છીએ. આમાંની ઘણી બધી વસ્તુઓમાં એક સામાન્ય બાબત એ છે કે તે દરેક લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈ કે ઊંડાઈ ધરાવે છે. એટલે કે તે દરેક જગ્યા રોકે છે અને તેમને ત્રણ પરિમાણો હોય છે. આથી તેમને ત્રિપરિમાણીય આકારો કહેવાય છે.

તમે અગાઉનાં ધોરણમાં જોયા છે તેવા કેટલાક ત્રિપરિમાણીય આકારો યાદ છે ?

પ્રયત્ન કરો

આકારને નામ સાથે જોડો :

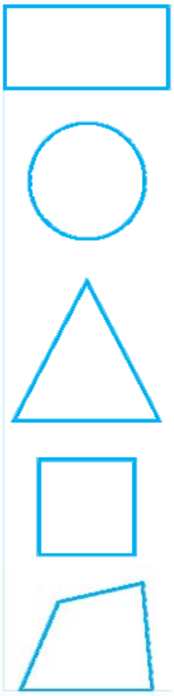


આકૃતિ 15.1

તેના જેવા આકાર ધરાવતી કેટલીક વસ્તુઓ ઓળખવા પ્રયત્ન કરો.

આ જ રીતે, કાગળ પર દોરેલી આકૃતિઓ કે જેને માત્ર લંબાઈ અને પહોળાઈ હોય તેમને દ્વિપરિમાણીય (સમતલીય) આકૃતિઓ કહેવાય છે. આગળના ધોરણમાં કેટલીક દ્વિપરિમાણીય આકૃતિઓ જોઈ છે.

નીચેની દ્વિપરિમાણીય આકૃતિઓને તેમનાં નામ સાથે જોડો. (આકૃતિ 15.2)



(i)	(a) વર્તુળ
(ii)	(b) લંબચોરસ
(iii)	(c) ચોરસ
(iv)	(d) ચતુષ્કોણ
(v)	(e) ત્રિકોણ

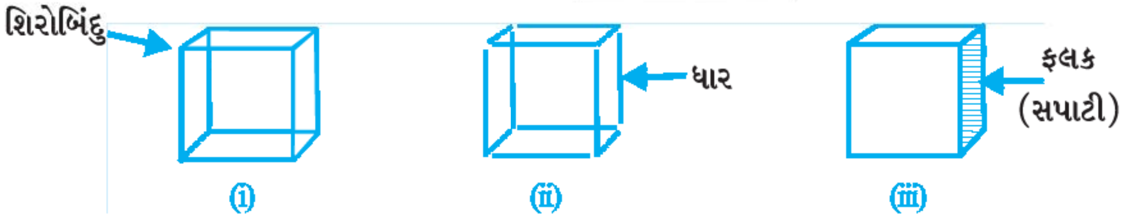
આકૃતિ 15.2

નોંધ : આપણે દ્વિપરિમાણીય માટે ટૂંકમાં 2-D અને ત્રિપરિમાણીય માટે ટૂંકમાં 3-D લખીશું.

15.2 ફલક, ધાર અને શિરોબિંદુ (Face, Edge and Vertex)

તમે ઘન આકારો શીખ્યાં છો. તેનું ફલક, શિરોબિંદુ અને ધાર કોને કહેવાય એ યાદ છે ?

CZ9Y16



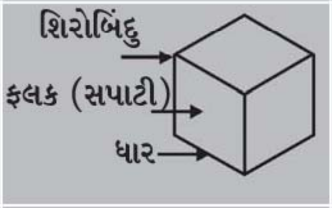
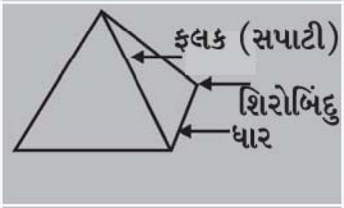
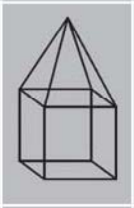
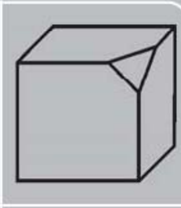
આકૃતિ 15.2

સમઘનના 8 ખૂણા એનાં શિરોબિંદુ છે. ઘનનું માળખું રચનાર 12 રેખાખંડ તેની ધાર છે. 6 સપાટ ચોરસ સપાટી તે ઘનના ફલક છે.

આટલું કરો

નીચેનું કોષ્ટક પૂર્ણ કરો :

કોષ્ટક 15.1

				
ફલક (F)	6	4		
ધાર (E)	12			
શિરોબિંદુ (V)	8	4		

શું તમે એ જોઈ શકો છો કે ત્રિપરિમાણીય આકારના ફલક, દ્વિપરિમાણીય આકૃતિઓ છે ? ઉદાહરણ તરીકે, નળાકારના  બે ફલકો છે, જે બંને વર્તુળ છે અને  આકારના પિરામિડના ફલકો ત્રિકોણ છે.

હવે કેટલાક 3-D આકારોને કાગળની 2-D સપાટી પર કેવી રીતે કલ્પી શકાય તે જોવા પ્રયત્ન કરીએ.

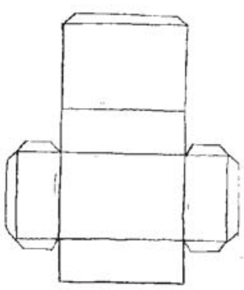
આમ કરવા માટે, ત્રિપરિમાણીય વસ્તુઓને બારીકાઈથી સમજવી પડશે. હવે આપણે 'નેટ' (Net) તરીકે ઓળખાતી રેખાકૃતિ બનાવીને આવા આકારો બનાવવાનો પ્રયત્ન કરીએ.

15.3 3-D આકારો બનાવવા માટેની 'નેટ' (Net - રેખાકૃતિ)

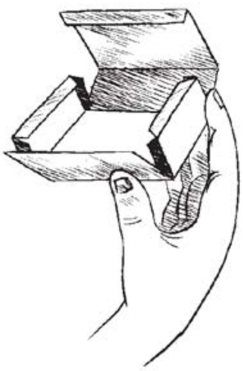
CZIU2T

પૂંઠાનું એક બૉક્સ લો. તેની ધાર પરથી તેને કાપીને સમતલ પૂંઠું મેળવો. આ તે બૉક્સની નેટ છે.

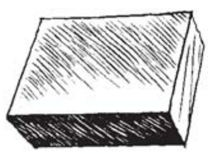
નેટ એ 2-D [આકૃતિ 15.4 (i)] રેખાકૃતિ છે, જેને વાળવાથી [આકૃતિ 15.4 (ii)], પરિણામ સ્વરૂપે 3-D આકાર [આકૃતિ 15.4 (iii)] મળે છે.



(i)

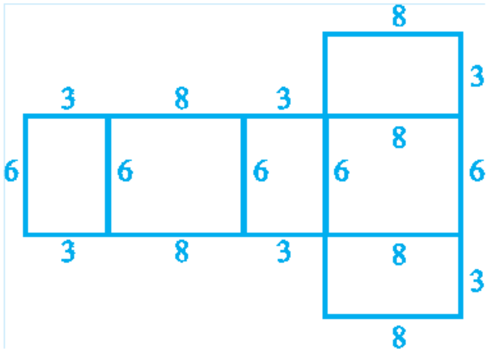


(ii)



(iii)

આકૃતિ 15.4



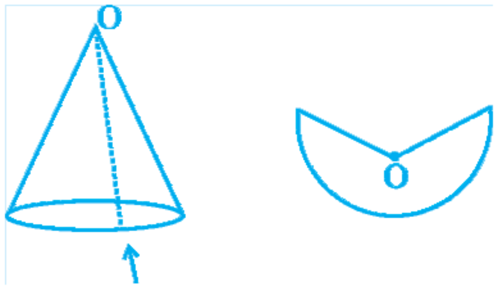
આકૃતિ 15.5

અહીં તમે ધારોને યોગ્ય રીતે જુદી કરીને રેખાકૃતિ મેળવી છે. શું આની ઉલટી ક્રિયા શક્ય છે ?

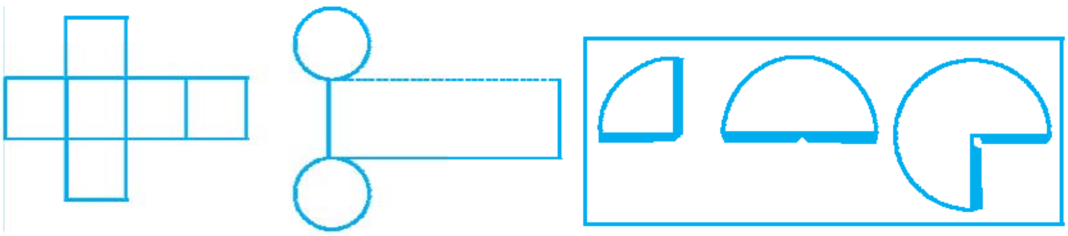
આકૃતિ 15.5 માં એક બોક્સની રેખાકૃતિ બતાવી છે. કાગળ પર એનું વિસ્તૃત સ્વરૂપ દોરી તેને યોગ્ય રીતે વાળીને ધાર ચોંટાડી બોક્સ બનાવવાનો પ્રયત્ન કરો. (તમે યોગ્ય એકમ લઈ શકો છો) બોક્સ એ ઘન આકાર છે. તે એક 3-D વસ્તુ છે, જે લંબઘનના સ્વરૂપમાં છે.

આ જ રીતે તમે એક શંકુ આકારને તેની ત્રાંસી સપાટી પર કાપીને શંકુની રેખાકૃતિ મેળવી શકો (આકૃતિ 15.6).

તમારી પાસે ભિન્ન આકારો માટે ભિન્ન 'નેટ' છે. આ આપેલી રેખાકૃતિના વિસ્તૃત સ્વરૂપની નકલ કરી (આકૃતિ 15.7) અને દર્શાવેલ 3-D આકારો બનાવવાનો પ્રયત્ન કરો. (તમે કાર્ડબૉર્ડની પટ્ટીઓને પીનથી જોડીને પણ આકારો બનાવી શકો.)



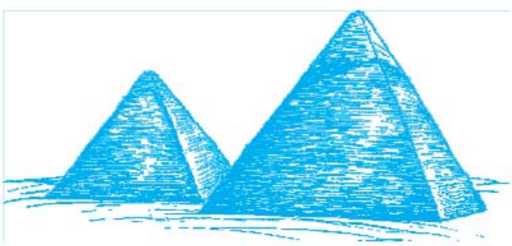
આકૃતિ 15.6



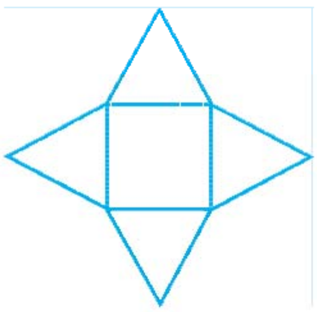
સમઘન	નળાકાર	શંકુ
(i)	(ii)	(iii)

આકૃતિ 15.7

આપણે ઈજિપ્તના ગિઝાના મહાન પિરામિડના જેવો પિરામિડ બનાવવાની રેખાકૃતિ પણ બનાવી શકીએ. (આકૃતિ 15.8) તે પિરામિડને ચોરસ આધાર અને ચાર ત્રિકોણાકાર ફલક છે.



આકૃતિ 15.8



આકૃતિ 15.9

આકૃતિ 15.9માં આપેલ રેખાકૃતિ પ્રમાણે તમે તે બનાવી શકો કે કેમ તે જુઓ.

પ્રયત્ન કરો

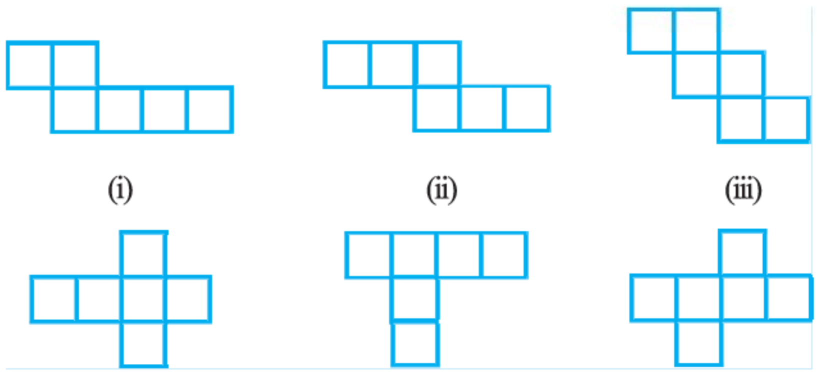
[redacted]

અહીં ચાર રેખાકૃતિઓ છે (આકૃતિ 15.10). આમાં ચતુષ્ફલક બનાવવા માટેની બે સાચી રેખાકૃતિઓ છે. કઈ આકૃતિમાંથી ચતુષ્ફલક બનાવી શકાય તે જુઓ.

આકૃતિ 15.10

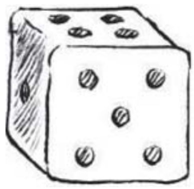
સ્વાધ્યાય 15.1

1. સમઘન બનાવવા માટે ઉપયોગમાં લઈ શકાય તેવી રેખાકૃતિ ઓળખો (રેખાકૃતિની નકલ કરીને કાપીને પ્રયત્ન કરો) :



(i) (ii) (iii)

(iv) (v) (vi)

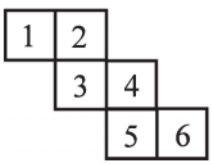


2. દરેક સપાટી પર ટપકાં હોય તેવા સમઘનને પાસો કહે છે. પાસાની સામસામેની સપાટીઓ પરના ટપકાંનો સરવાળો હંમેશા સાત થાય છે.

   અહીં પાસો બનાવવા માટેની બે રેખાકૃતિઓ દર્શાવી છે. દરેક ચોરસમાં લખેલા અંકો તે સપાટી પરનાં ટપકાં સંખ્યા દર્શાવે છે.

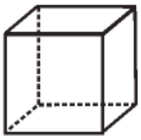
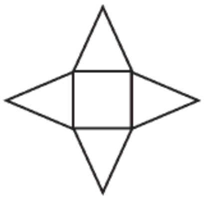
   ખાલી ખાનામાં યોગ્ય સંખ્યાઓ લખો અને યાદ રાખો કે સામસામેની સપાટી (બાજુ) પરના અંકોનો સરવાળો 7 થવો જોઈએ.

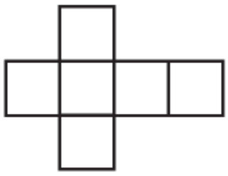
3. બાજુમાં દર્શાવેલી રેખાકૃતિ પાસાની રેખાકૃતિ હોઈ શકે ? તમારો જવાબ સમજાવો.



4. સમઘન બનાવવા માટેની એક અપૂર્ણ રેખાકૃતિ આપેલી છે. તેને ઓછામાં ઓછી બે રીતે પૂર્ણ કરો. યાદ રાખો કે સમઘનને છ ફલકો છે. અહીં આપેલી રેખાકૃતિમાં કેટલી છે ? (બે ભિન્ન આકૃતિઓ આપો. જો તમને ગમે તો સરળતા માટે ચોરસ ખાનાવાળા કાગળનો ઉપયોગ કરી શકો.)

5. રેખાકૃતિને યોગ્ય ઘનાકાર સાથે જોડો :

(a)  (i) 

(b)  (ii) 

(c)  (iii) 

(d)  (iv) 

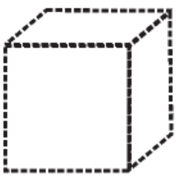
આ રમત રમો

તમે અને તમારો મિત્ર પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં મોં કરીને બેસો. તમારામાંથી એક, 3-D આકારની રેખાકૃતિનું વર્ણન મોટેથી બોલે અને બીજો દોરે અથવા 3-D વસ્તુ બનાવવાનો પ્રયત્ન કરે.

CZSQ4G

15.4 સમતલ પર ઘન આકારો દોરવા

તમે કાગળ પર ચિત્રો દોરો છો, જે સપાટ છે. તમે જ્યારે ઘન આકાર દોરો છો ત્યારે ત્રિપરિમાણીય દેખાય તે માટે કેટલેક અંશે ત્રાંસું દોરો છો, આ એક દૃષ્ટિભ્રમ છે. અહીં તમને મદદરૂપ થાય તેવી બે ટેક્નિક બતાવી છે.



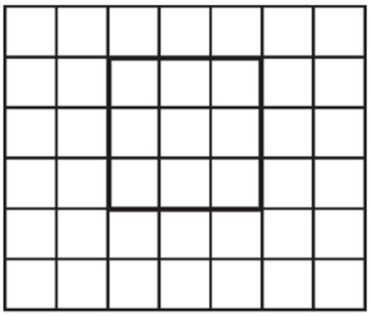
આકૃતિ 15.11

15.4.1 તિર્યક રેખાકૃતિઓ (Oblique Sketches)

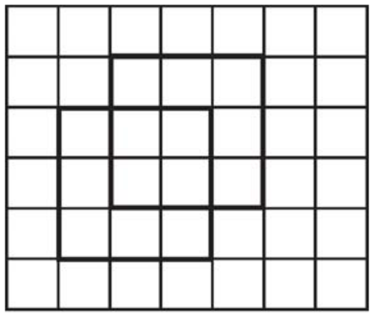
અહીં એક સમઘનનું ચિત્ર છે (આકૃતિ 15.11). જ્યારે સામેથી જોવામાં આવે ત્યારે સમઘન કેવો દેખાય છે તેનો સ્પષ્ટ ખ્યાલ અહીં આવે છે. તમે (તેની) કેટલીક સપાટીઓ જોઈ શકતાં નથી. દોરેલા ચિત્રમાં

સમઘનમાં હોય તેવી જ બધી લંબાઈઓ સમાન નથી. છતાં તમે ઓળખી શકો છો કે એ સમઘન છે. ઘનની આવી રેખાકૃતિને તિર્યક રેખાકૃતિ કહે છે.
આવી આકૃતિઓ તમે કેવી રીતે દોરી શકો ? ચાલો તો ટેક્નિક શીખવાનો પ્રયત્ન કરીએ.

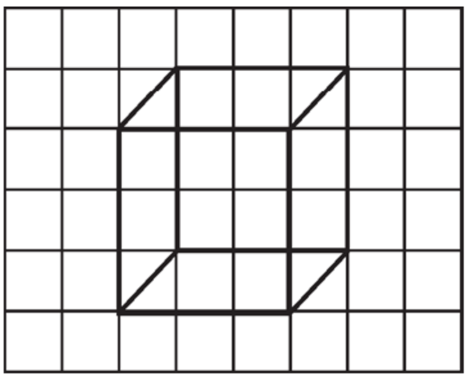
તમારે ચોરસ ખાનાંવાળો (રેખા અથવા ટપકાંવાળો) કાગળ જોઈશે. શરૂઆતમાં ખાનાં પર દોરવાનો મહાવરો કર્યા પછી સાદા કાગળ પર (ટપકાંની મદદ સિવાય) દોરવાનું સરળ થશે. આપણે એક $3 \times 3 \times 3$ (દરેક ધાર 3 એકમ હોય) માપના સમઘનની તિર્યક રેખાકૃતિ દોરવાનો પ્રયત્ન કરીએ (આકૃતિ 15.12).



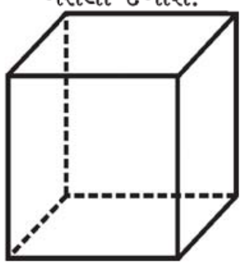
પગલું 1
આગળની સપાટી દોરો.



પગલું 2
તેની વિરુદ્ધની સપાટી દોરો. સપાટીનાં માપ સમાન હોવાં જોઈએ, પરંતુ આકૃતિ પ્રથમ પગલાં કરતાં થોડીક ખસેલી દેખાશે.



પગલું 3
અનુરૂપ ખૂણાઓને જોડો.



પગલું 4
ન દેખાતી ધાર માટે તૂટક રેખા દોરો (આ એક પરિપાટી છે). હવે આકૃતિ તૈયાર છે.

આકૃતિ 15.12

ઉપરની તિર્યક રેખાકૃતિમાં તમે નીચેની બાબતોની નોંધ કરી ?

(i) સામેની સપાટી અને તેની વિરુદ્ધ બાજુની સપાટીનાં માપ સરખાં છે; અને

(ii) ધારનાં માપ, જે સમઘનમાં સમાન હોય છે તે અહીં પણ સમાન દેખાય છે, જો કે ધારનાં સાચાં માપ લીધેલાં નથી.

હવે તમે લંબઘનની તિર્યક આકૃતિ બનાવવાનો પ્રયત્ન કરો. (યાદ રાખો કે આ કિસ્સામાં સપાટીઓ લંબચોરસ છે.)

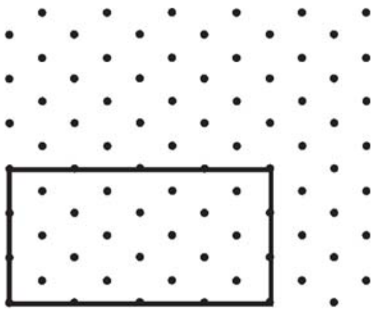
નોંધ : આપેલા ઘનનાં માપ જેટલાં જ માપ લઈને તમે આકૃતિ દોરી શકો. તે માટે આઈસોમેટ્રિક શીટ (સમમિતિય ટપકાવાળી શીટ)ની જરૂર પડશે. આપેલ આઈસોમેટ્રિક શીટ પર આપણે 4 સેમી લંબાઈ,

3 સેમી પહોળાઈ અને 3 સેમી ઊંચાઈવાળા લંબઘનની આકૃતિ બનાવવાનો પ્રયત્ન કરીએ.

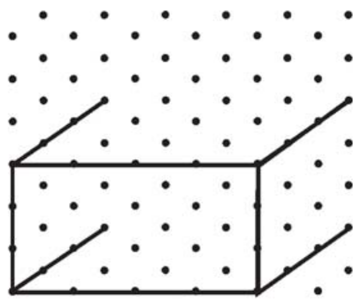
15.4.2 સમમિતીય આકૃતિઓ (Isometric Sketches)

તમે સમમિતીય ડોટશીટ જોઈ છે ? (આ પુસ્તકને અંતે તેનો નમૂનો આપેલ છે.) જે નાના સમબાજુ ત્રિકોણ બનાવતા ટપકાઓથી અથવા રેખાઓથી કાગળને વિભાગતી શીટ છે.

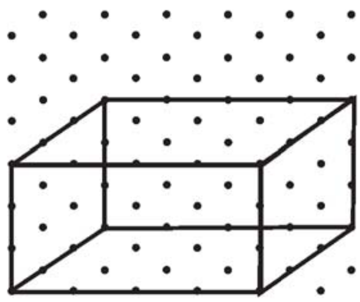
આપેલા ઘનનાં માપ જેટલા જ માપવાળી આકૃતિ દોરવા માટે આપણે $4 \times 3 \times 3$ (એટલે કે લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈની ધારો અનુક્રમે 4, 3, 3, એકમની છે.) માપના લંબઘનનો સમમિતીય આકૃતિ દોરવાનો પ્રયત્ન કરીએ (આકૃતિ 15.13).



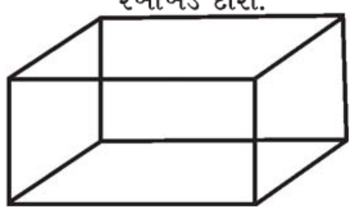
પગલું 1
સામેની સપાટી દર્શાવવા માટે લંબચોરસ દોરો.



પગલું 2
લંબચોરસના ચાર ખૂણાઓ પરથી 3 લંબાઈના ચાર સમાંતર રેખાખંડ દોરો.



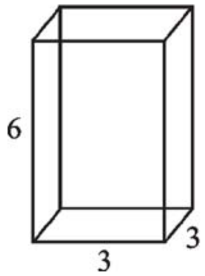
પગલું 3
યોગ્ય રેખાખંડોથી સામસામેના ખૂણાઓને જોડો.



પગલું 4
આ લંબઘનનો આઈસોમેટ્રિક સ્કેચ છે.

આકૃતિ 15.13

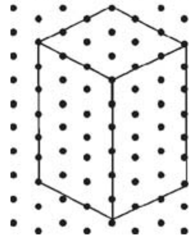
ધ્યાનમાં રાખો કે સમમિતીય આકૃતિમાં મૂળ લંબાઈ પ્રમાણે જ માપ હોય છે જ્યારે તિર્યક રેખાકૃતિમાં આમ હોતું નથી.



આકૃતિ 15.14 (i)

ઉદાહરણ 1 આકૃતિ 15.14 (i) માં લંબઘનની તિર્યક રેખાકૃતિ છે. આને અનુરૂપ આઈસોમેટ્રિક સ્કેચ દોરો.

ઉકેલ આકૃતિ 15.14 (ii) માં ઉકેલ બતાવેલો છે. માપની કેવી રીતે કાળજી લીધી છે તે જુઓ.

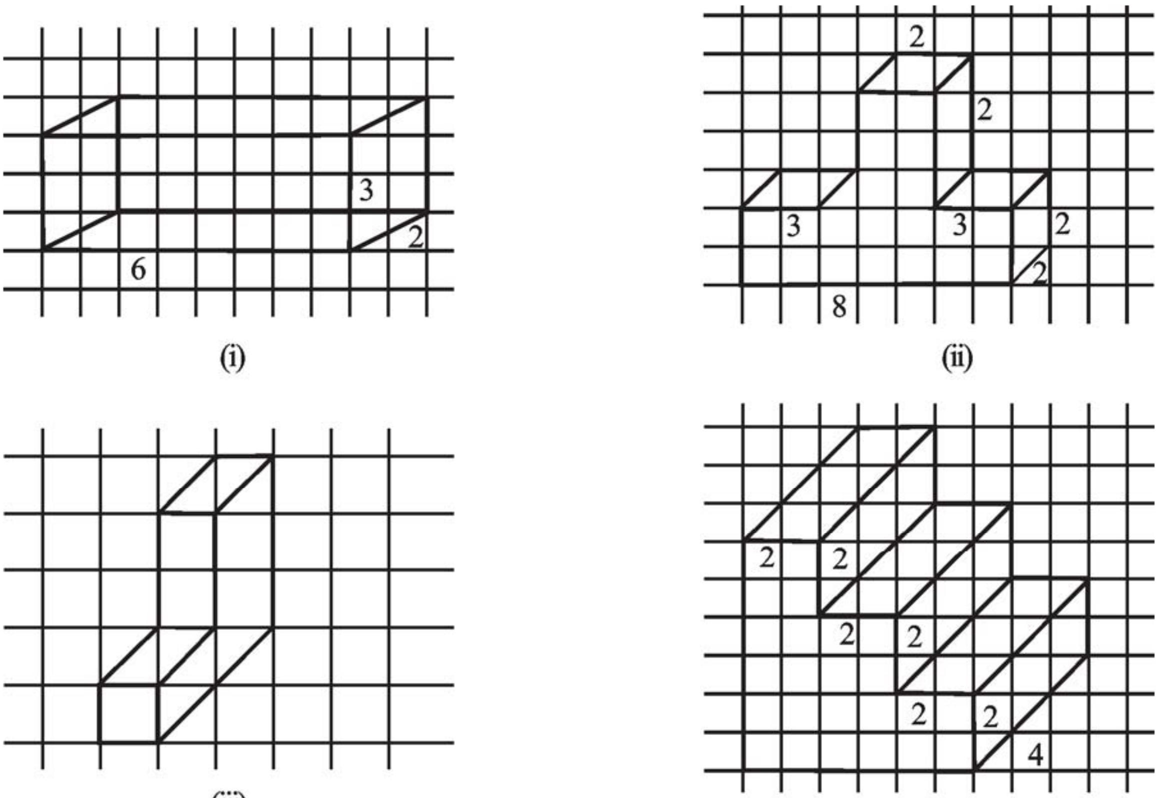


આકૃતિ 15.14 (ii)

તમે (i) લંબાઈ, (ii) પહોળાઈ અને (iii) ઊંચાઈમાં કેટલા એકમ લીધા છે ? તિર્યક રેખાકૃતિમાં દર્શાવેલ એકમો સાથે તેનો મેળ બેસે છે ?

સ્વાધ્યાય 15.2

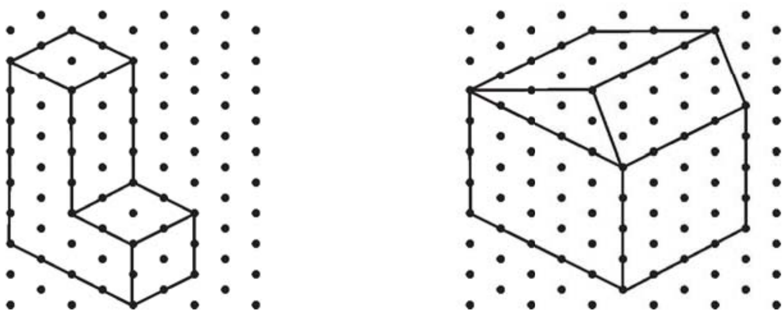
1. આઈસોમેટ્રિક ડોટ પેપર પર નીચેના દરેક આકારનો આઈસોમેટ્રિક સ્કેચ બનાવો :



(i) (ii) (iii) (iv)

આકૃતિ 15.15

2. એક લંબઘનનાં માપ 5 સેમી, 3 સેમી અને 2 સેમી છે. આ લંબઘનની ત્રણ જુદી જુદી આઈસોમેટ્રિક આકૃતિ બનાવો.
3. જેની બાજુ 2 સેમીની છે તેવા ત્રણ સમઘન, બાજુ બાજુમાં ગોઠવીને એક લંબઘન બનાવે છે. આ લંબઘનની તિર્યક અથવા આઈસોમેટ્રિક આકૃતિ બનાવો.
4. નીચેના દરેક આકાર માટે તિર્યક રેખાકૃતિ બનાવો.

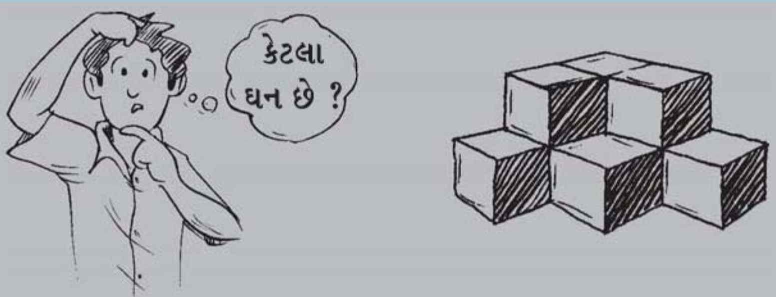


5. નીચેના દરેકની (i) તિર્યક રેખાકૃતિ અને (ii) આઈસોમેટ્રિક આકૃતિ બનાવો.
   (a) 5 સેમી, 3 સેમી અને 2 સેમી માપવાળો લંબઘન (તમારી આકૃતિ અનન્ય છે ?)
   (b) 4 સેમી લંબાઈની ધારવાળો એક સમઘન.

આ પુસ્તકને અંતે આઈસોમેટ્રિક શીટ જોડેલ છે. તમે તેના પર તમારો મિત્ર કહે તે માપના સમઘન અને લંબઘનની આકૃતિ બનાવો.

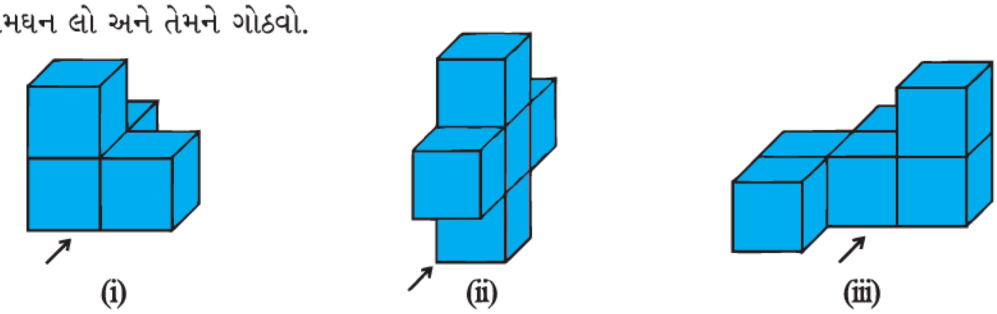
15.4.3 ઘન વસ્તુઓને જુઓ

આટલું કરો



જ્યારે તમે કેટલાક સંયુક્ત આકારો જુઓ છો, ત્યારે તેમાંના કેટલાક તમારી નજરથી છુપાયેલા હોય છે.

તમારા નવરાશના સમયમાં કરી શકાય તેવી કેટલીક પ્રવૃત્તિઓ અહીં આપેલ છે, જે તમને કેટલીક ઘન વસ્તુઓ અને તે કેવી દેખાશે તે જોવામાં મદદરૂપ બનશે. આકૃતિ 15.16માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે કેટલાક સમઘન લો અને તેમને ગોઠવો.



આકૃતિ 15.16

હવે તમારા મિત્રને આકૃતિમાં દર્શાવેલ તીરની નિશાની તરફથી જોઈ દરેકમાં કેટલા સમઘન ગોઠવેલા છે તેની ધારણા કરવા કહો.

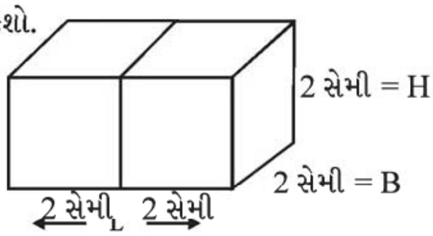
પ્રયત્ન કરો

નીચેની ગોઠવણીઓમાં કેટલા સમઘન છે તેની ધારણા કરવાનો પ્રયત્ન કરો (આકૃતિ 15.17).

આકૃતિ 15.17

આવી રીતે જોવાની ટેવ ઉપયોગી છે. ધારો કે તમે આવા સમઘન જોડીને લંબઘન બનાવો છો તો તમે તેની લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈ વિશે અનુમાન કરી શકશો.

ઉદાહરણ 2 જો 2સેમી × 2સેમી × 2સેમી માપવાળા બે સમઘન બાજુ-બાજુમાં ગોઠવવામાં આવે તો તેથી બનતાં લંબઘનનાં માપ કેટલાં હશે ?



આકૃતિ 15.18

ઉકેલ બાજુની (આકૃતિ 15.18) પરથી તમે જોઈ શકો છો કે જ્યારે તમે આ રીતે બે સમઘનને પાસપાસે ગોઠવો છો ત્યારે માત્ર લંબાઈ જ વધે છે

$2 + 2 = 4$ સેમી થાય છે.

પહોળાઈ = 2 સેમી અને ઊંચાઈ = 2 સેમી.

પ્રયત્ન કરો

1. આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે બે પાસા બાજુ-બાજુમાં છે તમે કહી શકો કે દર્શાવેલ બાજુઓની વિરૂદ્ધ બાજુઓનો સરવાળો કેટલો થશે ? (i) $(5 + 6)$ (ii) $(4 + 3)$
   (યાદ રાખો કે પાસામાં સામ સામેની બાજુ પર આવેલા અંકોનો સરવાળો 7 થાય છે.)
2. 2 સેમી બાજુ ધરાવતાં ત્રણ સમઘન પાસપાસે ગોઠવીને લંબઘન બનાવેલ છે. આની તિર્યક આકૃતિ બનાવવાનો પ્રયત્ન કરો અને તેની લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈ શું હોઈ શકે તે કહો.

આકૃતિ 15.19

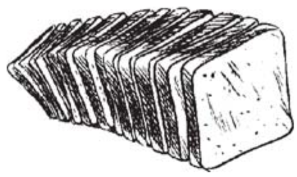
15.5 ઘનના જુદા-જુદા ભાગને જોવા

ચાલો હવે 3-D વસ્તુને જુદી જુદી રીતે જોઈએ.

D12L64

15.5.1 વસ્તુને જોવાની એક રીત, કાપવું અથવા પાતળી કાતરી કરવી

કાતરી કરવી :



આકૃતિ 15.20

એક પાંઉ લો (આકૃતિ 15.20). તે ચોરસ ફલકવાળા લંબઘન આકારમાં છે. તમે ચપ્પુથી તેની પાતળી કાતરી કાપો.

તમે જ્યારે ઊભો કાપ મૂકશો, તમને આકૃતિ 15.20માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ઘણા ટુકડા (કાતરી) મળશે. દરેકની સપાટી ચોરસ છે ! આપણે આને આખી બ્રેડ(પાંઉ)નો **આડછેદ** કહીશું. અહીં આડછેદ લગભગ ચોરસ છે.

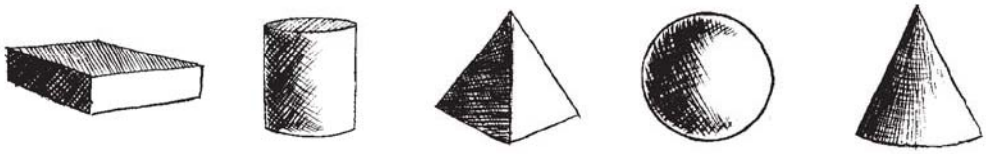
સાવધાન ! જો તમારો કાપ 'ઊભો' ન હોય તો તમને ભિન્ન આડછેદ મળે ! વિચારો. તમને મળતાં આડછેદની સીમારેખા, સમતલીય વક્ર છે. એ તમે નોંધ્યું ?

રસોડામાં રમત :

રસોડામાં રસોઈ કરવા માટે શાકભાજીને કાપવામાં આવે ત્યારે મળતાં આડછેદોની નોંધ લીધી છે ? અલગ અલગ ટુકડાઓનું અવલોકન કરો અને મળતાં આડછેદના આકારોથી પરિચિત થાઓ.

રમત રમો :

નીચેના ઘન આકારોના માટીના (અથવા પ્લાસ્ટિસાઈનના) નમૂનાઓ બનાવો અને તેને ઊભા અથવા આડા કાપો. તમને જે આડછેદ મળે તેની કાચી આકૃતિઓ દોરો. જ્યાં આપી શકાય ત્યાં તેમને નામ આપો.



આકૃતિ 15.21

સ્વાધ્યાય 15.3

1. નીચેની ઘન વસ્તુઓને તમે જો

(i) ઊભી (ii) આડી

કાપો તો કયા આડછેદ મળે છે ?

(a) ઈંટ (b) ગોળ સફરજન (c) પાસો

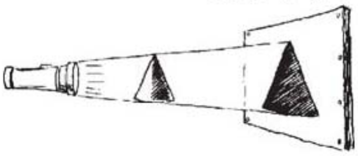
(d) વર્તુળાકાર નળી (e) આઈસ્ક્રીમ કોન

આકૃતિ 15.22

15.5.2 પડછાયાની રમત

પડછાયાની રમત :

ત્રિપરિમાણીય વસ્તુઓ દ્વિપરિમાણમાં કેવી દેખાય તે જોવા માટે પડછાયાનો સરસ ઉપયોગ થઈ શકે. તમે પડછાયાની રમત જોઈ છે ? ઘન આકૃતિઓના પડછાયા પડદા પર પાડીને હલનચલન કરતા આકારોનો ભ્રમ ઊભો કરી આનંદ લેવાની રમત છે. એમાં ગણિતના ખ્યાલોનો આડકતરો ઉપયોગ છે.



આકૃતિ 15.23

આ પ્રવૃત્તિ માટે તમને એક પ્રકાશનું ઉદ્ભવસ્થાન અને કેટલાક ઘન આકારો જોઈશે. (જો તમારી પાસે ઓવરહેડ પ્રોજેક્ટર હોય, તો તેની લાઈટની નીચે ઘન આકારો મૂકીને હવે તપાસો.)

એક શંકુની બરાબર સામે **બૅટરી** રાખો. તેનાથી પડદા પર કેવો પડછાયો પડે છે ? (આકૃતિ 15.23)

ઘન ત્રિપરિમાણીય છે તો પડછાયાનું પરિમાણ કેટલું છે ?

ઉપરની રમતમાં શંકુને બદલે સમઘન મૂકો તો કેવા પ્રકારનો પડછાયો મળશે ?

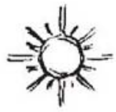
પ્રકાશનું ઉદ્ભવસ્થાન અને ઘન આકારની જગ્યાઓ આઘી-પાછી ખસેડીને પ્રયોગો કરો. આમ કરવાથી મળતા પડછાયાના આકાર અને કદમાં થતા ફેરફારોનો અભ્યાસ કરો.

આવો જ ગમ્મતભર્યો એક બીજો પ્રયોગ છે, જે કદાચ તમે કર્યો પણ હશે. સૂર્ય જ્યારે બરાબર માથા પર હોય ત્યારે બપોરે એક ચાનો કપ આકૃતિ 15.24 (i)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ખુલ્લામાં મૂકો. તમને કેવો પડછાયો મળે છે ?

(i)

શું આ પડછાયો સરખો જ રહે છે ?


(a) સવારે ?

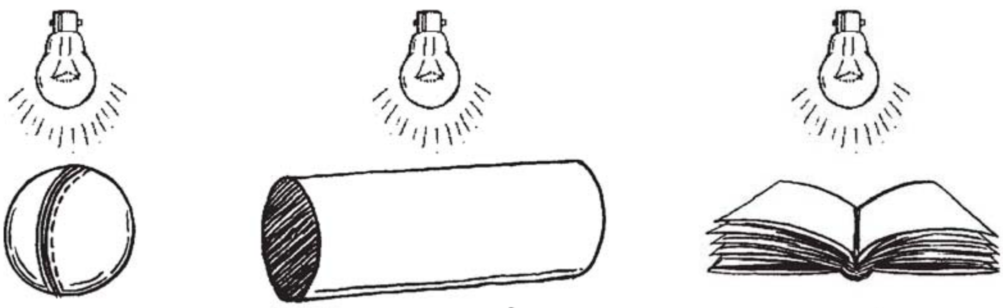

(a) સાંજે ?

આકૃતિ 15.24 (i) - (iii)

સૂર્યનું સ્થાન અને અવલોકનના સમયના સંદર્ભમાં પડછાયાનો અભ્યાસ કરો.

સ્વાધ્યાય 15.4

1. આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે નીચેના ઘન આકારોની ઉપર ઈલૅક્ટ્રિક બલ્બ સળગાવવામાં આવે છે. દરેકના મળતા પડછાયાનું નામ આપો. પડછાયાની આકૃતિ દોરવાનો પ્રયત્ન કરો. (તમે જવાબ આપતાં પહેલાં પ્રયોગ કરી શકો છો).



દડો	નળાકાર પાઈપ	પુસ્તક
(i)	(ii)	(iii)

2. નીચે કેટલીક 3-D વસ્તુઓના ઓવરહેડ પ્રોજક્ટરમાંથી નીકળતા પ્રકાશમાં મળતા પડછાયા આપ્યા છે. દરેકવસ્તુ કયા આકારની છે તે નક્કી કરો. (દરેકના એકથી વધુ ઉત્તરો હોઈ શકે !)

વર્તુળ	ચોરસ	ત્રિકોણ	લંબચોરસ

(i)	(ii)	(iii)	(iv)

3. નીચેનાં વિધાનો ખરાં છે કે ખોટાં તે નક્કી કરો :

(i) સમઘનનો પડછાયો લંબચોરસ હોઈ શકે.

(ii) સમઘનનો પડછાયો ષટ્કોણ હોઈ શકે.

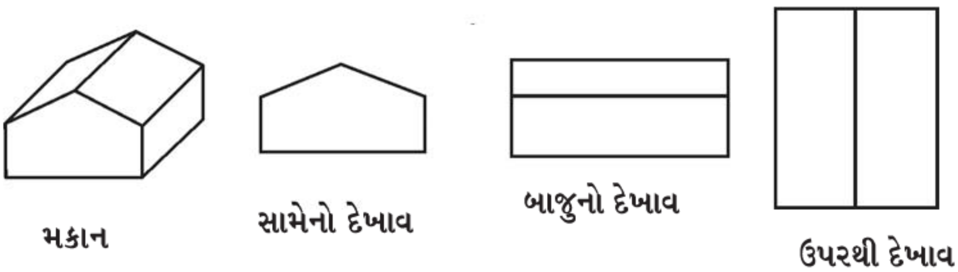
15.5.3 ત્રીજી રીત : વસ્તુને જુદા જુદા ખૂણાઓથી જોતાં જુદા જુદા દેખાવ મળે

પડછાયાની રમત :

કોઈ વ્યક્તિ એક વસ્તુને, તેની સામે ઊભી રહીને, તેની એક બાજુએ ઊભા રહીને કે તેને ઉપરની દિશામાંથી જોઈ શકે. દરેક વખતે તેને ભિન્ન દેખાવ જોવા મળશે (આકૃતિ 15.25).

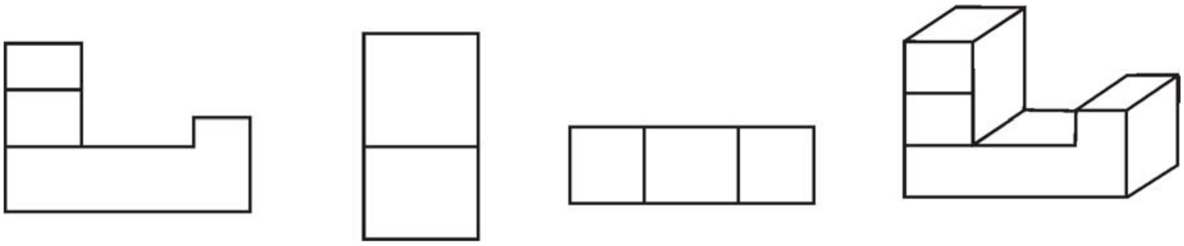
આકૃતિ 15.25

એક મકાનના કેવા ભિન્ન ભિન્ન દેખાવો જોવા મળે છે તે નીચેની આકૃતિમાં દર્શાવ્યું છે. (આકૃતિ 15.26)



આકૃતિ 15.26

તમે સમઘનને જોડવાથી મળતી આકૃતિઓ માટે આવું કરી શકો.



આકૃતિ 15.27

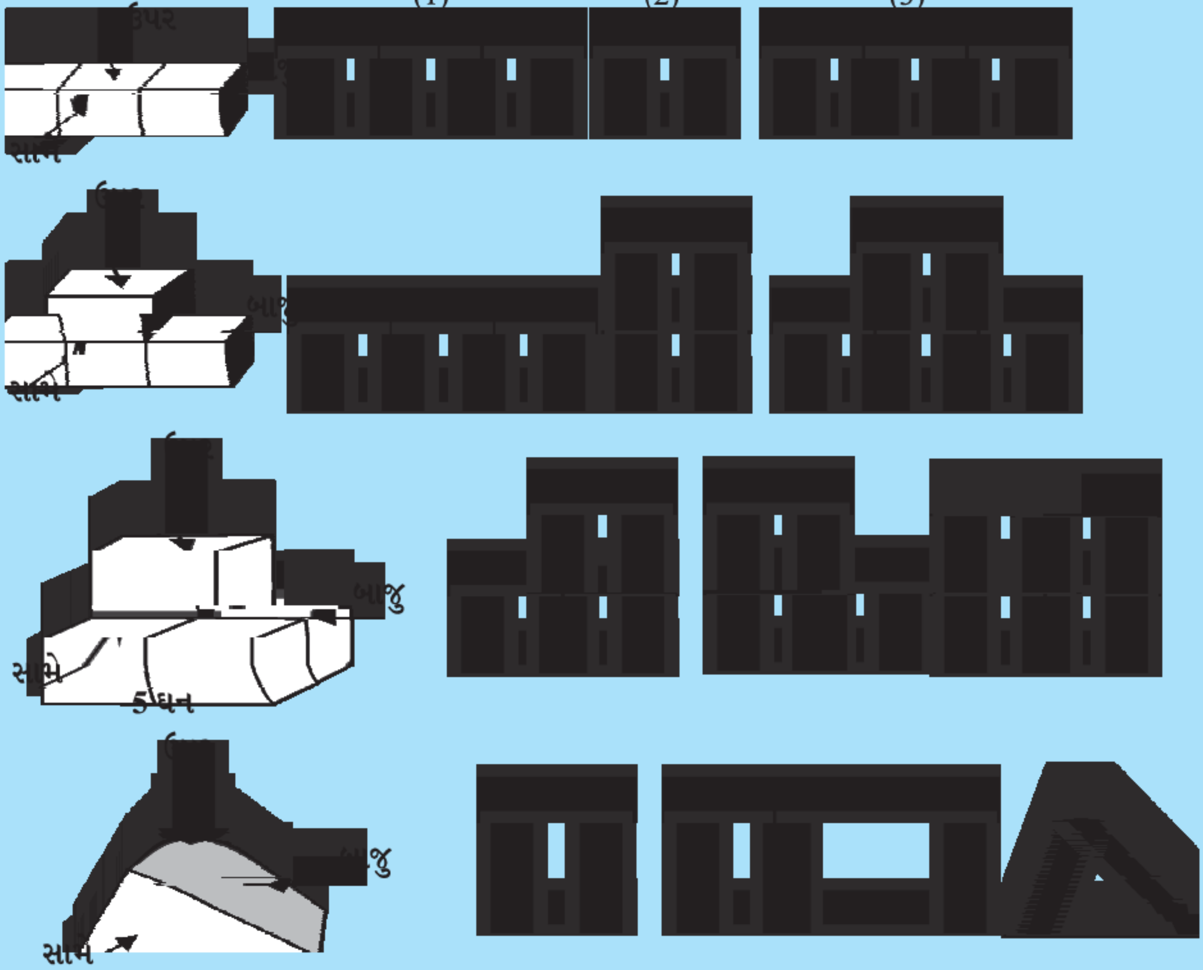
કેટલાક સમઘનને સાથે-સાથે મૂકીને પછી જુદી-જુદી બાજુએથી (જોઈને) આકૃતિઓ બનાવો.

પ્રયત્ન કરો

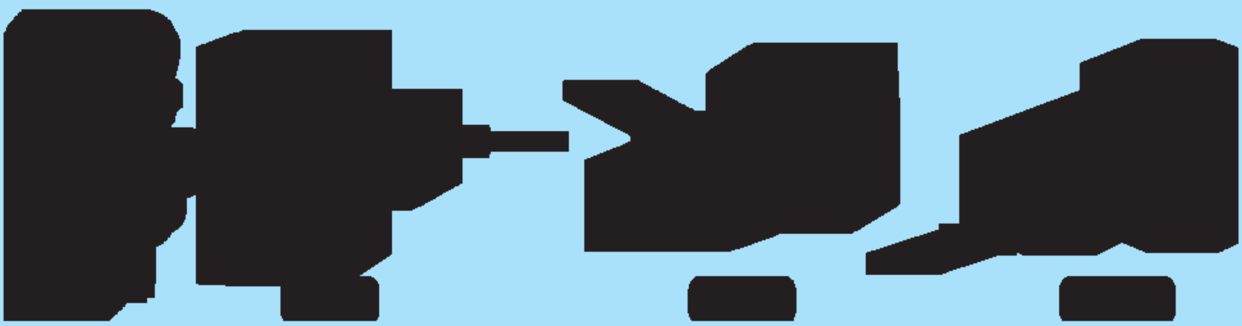
1. નીચે દરેક ઘન આકાર માટે (1), (2) અને (3)માં ત્રણ દેખાવો આપેલા છે. દરેકનો ઉપરનો, સામેનો અને બાજુનો દેખાવ શોધો.

તેના દેખાવો.

ઘન આકાર (1) (2) (3)



2. દરેકમાં તીર વડે દર્શાવેલી દિશામાંથી જોતાં મળતાં દેખાવની આકૃતિ દોરો.



આપણે શી ચર્ચા કરી ?

1. વર્તુળ, ચોરસ, લંબચોરસ, ચતુષ્કોણ અને ત્રિકોણ એ **સમતલીય આકૃતિઓ**નાં ઉદાહરણ છે. સમઘન, લંબઘન, ગોલક, નળાકાર, શંકુ અને પિરામિડ એ **ઘન આકારો**નાં ઉદાહરણ છે.

2. સમતલીય આકૃતિઓ દ્વિપરિમાણીય (2-D) હોય અને ઘન આકારો ત્રિપરિમાણીય (3-D) હોય છે.

3. ઘન આકારના ખૂણાઓ, તેનાં શિરોબિંદુઓ કહેવાય છે. તેના માળખાને બનાવતા રેખાખંડોને ધાર અને તેની સમતલ સપાટીઓને ફલક કહેવાય છે.

4. રેખાકૃતિ એ ઘન આકારનું માળખું દર્શાવે છે, જેને વાળીને આકાર બનાવી શકાય છે. એક જ ઘન આકારની એકથી વધુ રેખાકૃતિઓ બની શકે.

5. ઘન આકારોને કાગળ જેવી સપાટી પર સાચા દેખાય તે રીતે દોરી શકાય. આપણે તેને 3-D આકારની 2-Dમાં મળતી આકૃતિ કહી શકીએ.

6. ઘન આકારની બે પ્રકારની રેખાકૃતિઓ શક્ય છે :
   (a) તિર્યક રેખાકૃતિ, જેમાં લંબાઈઓ પ્રમાણમાં નથી હોતી, છતાં ઘન આકારના અગત્યના **ગુણધર્મો** અને દેખાવ તેનાથી રજૂ થાય છે.
   (b) આઈસોમેટ્રિક આકૃતિ ટપકાંવાળા કાગળ પર દોરી શકાય છે, જેનો નમૂનો આ પુસ્તકને અંતે આપેલો છે. આવી આકૃતિમાં માપ સમપ્રમાણમાં હોય છે.

7. ઘન આકારોને જોવા એ એક ઉપયોગી આવડત છે. ઘન આકારના તેની પાછળની બાજુના ભાગને પણ તમે જોઈ શકતા હોવા જોઈએ.

8. ઘન આકારના ભિન્ન છેદને ઘણી રીતે જોઈ શકાય :
   (a) કાપીને અથવા પાતળી કાતરી કરીને, જેમાં ઘનનો આડછેદ મળે છે.
   (b) 3-D આકારના 2-D પડછાયાનું અવલોકન કરીને.
   (c) વસ્તુને અલગ-અલગ ખૂણેથી જોઈને જેમ કે **સામેનો દેખાવ**, **બાજુનો દેખાવ** અને **ઉપરનો દેખાવ** જોવાથી આકારની ઘણી બધી માહિતી મળી શકે.

જવાબો

સ્વાધ્યાય 1.1

1. (a) લાહૌલ સ્પિતિ -8° સે, શ્રીનગર -2° સે, શિમલા 5° સે., ઊટી 14° સે., બૅંગલુરુ 22° સે.

(b) 30° સે. (c) 6° સે. (d) હા, ના **2.** 35

3. -7° સે., -3° સે. **4.** 6200 મી **5.** ધન પૂર્ણાંક વડે, ₹ 358

6. ઋણ પૂર્ણાંક વડે; -10 **7.** (ii) એ જાદુઈ ચોરસ છે.

9. (a) $<$ (b) $<$ (c) $>$ (d) $<$

(e) $>$

10. (i) 11 કૂદકા (ii) 5 કૂદકા (iii) (a) $-3 + 2 - 3 + 2 - 3 + 2 - 3 + 2 - 3 + 2 - 3 = -8$

(b) $4 - 2 + 4 - 2 + 4 = 8$માં 8 એ 8 પગથિયાં ઉપર જવાનું દર્શાવે છે.

સ્વાધ્યાય 1.2

1. આવી કોઈ જોડ હોઈ શકે :

(a) $-10, 3$ (b) $-6, 4$; $(-6 - 4 = -10)$ (c) $-3, 3$

2. આવી કોઈ જોડ હોઈ શકે :

(a) $-2, -10$; $[-2 - (-10) = 8]$ (b) $-6, 1$

(c) $-1, 2$; $(-1 - 2 = -3)$

3. બંને ટીમનો સ્કોર સરખો છે, એટલે કે -30; હા

4. (i) -5 (ii) 0 (iii) -17 (iv) -7 (v) -3

સ્વાધ્યાય 1.3

1. (a) -3 (b) -225 (c) 630 (d) 316 (e) 0
(f) 1320 (g) 162 (h) -360 (i) (-24) (j) 36

3. (i) $-a$ (ii) (a) 22 (b) -37 (c) 0

4. $-1 \times 5 = -5, -1 \times 4 = -4 = -5 + 1, -1 \times 3 = -3 = -4 + 1,$
$-1 \times 2 = -2 = -3 + 1, -1 \times 1 = -1 = -2 + 1, -1 \times 0 = 0 = -1 + 1$
તેથી, $-1 \times (-1) = 0 + 1 = 1$

5. (a) 480 (b) -53000 (c) -15000 (d) -4182
(e) -62500 (f) 336 (g) 493 (f) 1140

6. -10 સે. **7.** (i) 8 (ii) 15 (iii) 0

8. (a) 1000 રૂપિયાની ખોટ. (b) 4000 કોથળી

9. (a) -9 (b) -7 (c) 7 (d) -11

સ્વાધ્યાય 1.4

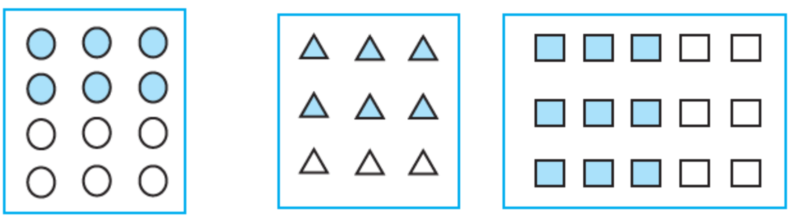
1. (a) –3 (b) –10 (c) 4 (d) –1
   (e) –13 (f) 0 (g) 1 (h) –1 (i) 1
3. (a) 1 (b) 75 (c) –206 (d) –1
   (e) –87 (f) –48 (g) –10 (h) –12
4. (–6, 2), (–12, 4), (12, –4), (9, –3) (–9, 3) (આ રીતે ઘણી જોડ હોઈ શકે.)
5. 9 p.m.; – 14° C **6.** (i) 8 (ii) 13 **7.** 1 કલાક

સ્વાધ્યાય 2.1

1. (i) $\frac{7}{5}=\left(1\frac{2}{5}\right)$ (ii) $\frac{39}{8}\left(=4\frac{7}{8}\right)$ (iii) $\frac{31}{35}$ (iv) $\frac{91}{165}$
   (v) $\frac{13}{5}\left(=2\frac{3}{5}\right)$ (vi) $\frac{37}{6}\left(=6\frac{1}{6}\right)$ (vii) $\frac{39}{8}\left(=4\frac{7}{8}\right)$
2. (i) $\frac{2}{3}, \frac{8}{21}, \frac{2}{9}$ (ii) $\frac{7}{10}, \frac{3}{7}, \frac{1}{5}$ **3.** હા (iv) $\frac{139}{3}\left(=46\frac{1}{3}\right)$ સેમી.
5. (i) $8\frac{17}{20}$ સેમી (ii) $7\frac{5}{6}$ સેમી; Δ ABEની પરિમિતિ વધુ છે.
6. $\frac{3}{10}$ સેમી **7.** $\frac{2}{5}$; રીતુ; $\frac{1}{5}$ **8.** વૈભવ; $\frac{1}{6}$ કલાકે

સ્વાધ્યાય 2.2

1. (i) (d) (ii) (b) (iii) (a) (iv) (c)
2. (i) (c) (ii) (a) (iii) (b)
3. (i) $4\frac{1}{5}$ (ii) $1\frac{1}{3}$ (iii) $1\frac{5}{7}$ (iv) $1\frac{1}{9}$ (v) $2\frac{2}{3}$
   (vi) 15 (vii) $6\frac{2}{7}$ (viii) 16 (ix) $4\frac{1}{3}$ (x) 9
4. એક આ રીતે થઈ શકે :



(i) (ii) (iii)

5. (a) (i) 12 (ii) 23 (b) (i) 12 (ii) 18 (c) (i) 12 (ii) 27 (d) (i) 16 (ii) 28

6. (a) $15\frac{3}{5}$ (b) $33\frac{3}{4}$ (c) $15\frac{3}{4}$ (d) $25\frac{1}{3}$
(e) $19\frac{1}{2}$ (f) $27\frac{1}{5}$

7. (a) (i) $1\frac{3}{8}$ (ii) $2\frac{1}{9}$ (b) (i) $2\frac{19}{48}$ (ii) $6\frac{1}{24}$

8. (1) 2 લિટર (ii) $\frac{3}{5}$

સ્વાધ્યાય 2.3

1. (i) (a) $\frac{1}{16}$ (b) $\frac{3}{20}$ (c) $\frac{1}{3}$ (ii) (a) $\frac{2}{63}$ (b) $\frac{6}{35}$ (c) $\frac{3}{70}$

2. (i) $1\frac{7}{9}$ (ii) $\frac{2}{9}$ (iii) $\frac{9}{16}$ (iv) $1\frac{2}{25}$
(v) $\frac{5}{8}$ (vi) $1\frac{13}{20}$ (vii) $1\frac{13}{35}$

3. (i) $2\frac{1}{10}$ (ii) $4\frac{44}{45}$ (iii) 8 (iv) $2\frac{1}{42}$
(v) $1\frac{33}{35}$ (vi) $7\frac{4}{5}$ (vii) $2\frac{1}{7}$

4. (i) $\frac{5}{8}$ના $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{6}{7}$ના $\frac{1}{2}$

5. $2\frac{1}{4}$ મી

6. $10\frac{1}{2}$ કલાક

7. 44 કિમી

8. (a) (i) $\frac{5}{10}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (b) (i) $\frac{8}{15}$ (ii) $\frac{8}{15}$

સ્વાધ્યાય 2.4

1. (i) 16 (ii) $\frac{84}{5}$ (iii) $\frac{24}{7}$ (iv) $\frac{3}{2}$ (v) $\frac{9}{7}$ (vi) $\frac{7}{5}$

2. (i) $\frac{7}{3}$ (અશુદ્ધ અપૂર્ણાંક) (ii) $\frac{8}{5}$ (અશુદ્ધ અપૂર્ણાંક) (iii) $\frac{7}{9}$ (શુદ્ધ અપૂર્ણાંક)
(iv) $\frac{5}{6}$ (શુદ્ધ અપૂર્ણાંક) (v) $\frac{7}{12}$ (શુદ્ધ અપૂર્ણાંક) (vi) 8 (પૂર્ણ સંખ્યા) (vii) 11 (પૂર્ણ સંખ્યા)

3. (i) $\frac{7}{6}$ (ii) $\frac{4}{45}$ (iii) $\frac{6}{91}$ (iv) $\frac{13}{9}$ (v) $\frac{7}{8}$ (vi) $\frac{31}{49}$

4. (i) $\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{2}{3}$ (iii) $\frac{3}{8}$ (iv) $\frac{35}{9}$ (v) $\frac{21}{16}$ (vi) $\frac{4}{15}$
(vii) $\frac{48}{25}$ (viii) $\frac{11}{6}$

સ્વાધ્યાય 2.5

1. (i) 0.5 (ii) 0.7 (iii) 7 (iv) 1.49 (v) 2.30 (vi) 0.88
2. (i) ₹ 0.07 (ii) ₹ 7.07 (iii) ₹ 77.77 (iv) ₹ 0.50 (v) ₹ 2.35
3. (i) 0.05 મી; 0.00005 કિમી (ii) 3.5 સેમી; 0.035 મી.; 0.000035 કિમી
4. (i) 0.2 કિગ્રા (ii) 3.470 કિગ્રા (iii) 4.008 કિગ્રા
5. (i) $2 \times 10 + 0 \times 1 + 0 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100}$ (ii) $2 \times 1 + 0 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100}$
   (iii) $2 \times 100 + 0 \times 10 + 0 \times 1 + 0 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100}$
   (iv) $2 \times 1 + 0 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100} + 4 \times \frac{1}{1000}$
6. (i) એકમ (ii) દશક (iii) દશાંશ (iv) શતાંશ (v) સહસ્ત્રાંશ
7. અયુબે 0.9 કિમી અથવા 900 મીટર વધુ મુસાફરી કરી. **8.** સરલાએ વધુ ફળ ખરીદ્યાં **9.** 14.6 કિમી

સ્વાધ્યાય 2.6

1. (i) 1.2 (ii) 36.8 (iii) 13.55 (iv) 80.4 (v) 0.35 (vi) 844.08
   (vii) 1.72
2. 17.1 ચોસેમી
3. (i) 13 (ii) 368 (iii) 1537 (iv) 1680.7 (v) 3110 (vi) 15610
   (vii) 362 (viii) 4307 (ix) 5 (x) 0.8 (xi) 90 (xii) 30
4. 553 કિમી
5. (i) 0.75 (ii) 5.17 (iii) 63.36 (iv) 4.03 (v) 0.025 (vi) 1.68
   (vii) 0.0214 (viii) 10.5525 (ix) 1.0101 (x) 110.011

સ્વાધ્યાય 2.7

1. (i) 0.2 (ii) 0.07 (iii) 0.62 (iv) 10.9 (v) 162.8 (vi) 2.07
   (vii) 0.99 (viii) 0.16
2. (i) 0.48 (ii) 5.25 (iii) 0.07 (iv) 3.31 (v) 27.223 (vi) 0.056
   (vii) 0.397
3. (i) 0.027 (ii) 0.003 (iii) 0.0078 (iv) 4.326 (v) 0.236 (vi) 0.9853
4. (i) 0.0079 (ii) 0.0263 (iii) 0.03853 (iv) 0.1289 (v) 0.0005
5. (i) 2 (ii) 180 (iii) 6.5 (iv) 44.2 (v) 2 (vi) 31
   (vii) 510 (viii) 27 (ix) 2.1 **6.** 18 કિમી

સ્વાધ્યાય 3.1

2.

ગુણ	આવૃત્તિ ચિહ્ન	આવૃત્તિ
1	$\vert$	1
2	$\vert\vert$	2
3	$\vert$	1
4	$\vert\vert\vert$	3
5	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}$	5
6	$\vert\vert\vert\vert$	4
7	$\vert\vert$	2
8	$\vert$	1
9	$\vert$	1

(i) 9 (ii) 1 (iii) 8 (iv) 5

3. 2 **4.** 50 **5.** (i) 12.5 (ii) 3, ખેલાડી c ત્રણ જ રમત રમેલ છે (iii) $\frac{0+8+6+4}{4} = \frac{18}{4}$ અથવા $\frac{9}{2}$ (iv) A

6. (i) સૌથી વધુ ગુણ = 95, સૌથી ઓછા ગુણ = 39 (ii) 56 (iii) 73 **7.** 2058

8. (i) 20.5 (ii) 5.9 મિમી (iii) 5

9. (i) 151 સેમી (ii) 128 સેમી (iii) 23 સેમી (iv) 141.4 સેમી (v) 5

સ્વાધ્યાય 3.2

1. બહુલક = 20, મધ્યસ્થ, = 20, હા

2. સરાસરી = 39, બહુલક = 15, મધ્યસ્થ = 15, ના

3. (i) બહુલક 38, 43; મધ્યસ્થ; 40 (ii) હા, તેમાં બે બહુલક છે.

4. બહુલક = 14; મધ્યસ્થ = 14

5. (i) ખરું (ii) ખોટું (iii) ખરું (iv) ખોટું

સ્વાધ્યાય 3.3

1. (a) બિલાડી (b) 8

4. (i) ગણિત (ii) સામાજિક વિજ્ઞાન (iii) હિન્દી

5. (ii) ક્રિકેટ (iii) રમત નિહાળે છે.

6. (i) જમ્મુ (ii) જમ્મુ, બૅંગ્લુરુ (iii) બૅંગ્લુરુ અને જયપુર અથવા બૅંગ્લુરુ અને અમદાવાદ (iv) મુંબઈ

સ્વાધ્યાય 3.4

1. (i) ચોક્કસ બનશે. (ii) બનશે પણ ચોક્કસ નહિ (iii) અશક્ય
(iv) બની શકે પણ ચોક્કસ નહિ (v) બનશે પણ ચોક્કસ નહિ

2. (i) $\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{1}{6}$ **3.** $\frac{1}{2}$

સ્વાધ્યાય 4.1

1. (i) ના (ii) ના (iii) હા (iv) ના (v) હા (vi) ના
(vii) હા (viii) ના (ix) ના (x) ના (xi) હા

2. (a) ના (b) ના (c) હા (d) ના (e) ના (f) ના

3. (i) $p = 3$ (ii) $m = 6$

4. (i) $x + 4 = 9$ (ii) $y - 2 = 8$ (iii) $10a = 70$ (iv) $\frac{b}{5} = 6$

(v) $\frac{3t}{4} = 15$ (vi) $7m + 7 = 77$ (vii) $\frac{x}{4} - 4 = 4$ (viii) $6y - 6 = 60$

(ix) $\frac{z}{3} + 3 = 30$

5. (i) p અને 4નો સરવાળો 15 છે. (ii) mમાંથી 7 બાદ કરતાં 3 મળે.

(iii) m ના બે ગણા 7 છે. (iv) કોઈ સંખ્યા mનો 5મો ભાગ 3 છે.

(v) કોઈ સંખ્યા m નો $\frac{3}{5}$મો ભાગ 6 છે. (vi) p ના ત્રણ ગણામાં 4 ઉમેરતાં 25 મળે.

(vii) કોઈ સંખ્યા pના ચાર ગણામાંથી 2 બાદ કરતાં 18 મળે.

(viii) કોઈ સંખ્યા pના અડધા ભાગમાં 2 ઉમેરતાં 8 મળે.

6. (i) $5m + 7 = 37$ (ii) $3y + 4 = 49$ (iii) $2l + 7 = 87$ (iv) $4b = 180°$

સ્વાધ્યાય 4.2

1. (a) બંને બાજુ 1 ઉમેરતાં; $x = 1$ (b) બંને બાજુમાંથી 1 બાદ કરતાં; $x = -1$

(c) બંને બાજુ 1 ઉમેરતાં; $x = 6$ (d) બંને બાજુમાંથી 6 બાદ કરતાં; $x = -4$

(e) બંને બાજુ 4 ઉમેરતાં; $y = -3$ (f) બંને બાજુ 4 ઉમેરતાં; $y = 8$

(g) બંને બાજુમાંથી 4 બાદ કરતાં; $y = 0$ (h) બંને બાજુમાંથી 4 બાદ કરતાં; $y = -8$

2. (a) બંને બાજુને 3 વડે ભાગતાં; $l = 14$ (b) બંને બાજુને 2 વડે ગુણતાં; $b = 12$

(c) બંને બાજુને 7 વડે ગુણતાં; $p = 28$ (d) બંને બાજુને 4 વડે ભાગતાં; $x = \frac{25}{4}$

(e) બંને બાજુને 8 વડે ભાગતાં; $y = \frac{36}{8}$ (f) બંને બાજુને 3 વડે ગુણતાં; $z = \frac{15}{4}$

(g) બંને બાજુને 5 વડે ગુણતાં; $a = \frac{7}{3}$ (h) બંને બાજુને 20 વડે ભાગતાં; $t = -\frac{1}{2}$

3. (a) પગલું 1 : બંને બાજુ 2 ઉમેરો
પગલું 2 : બંને બાજુને 3 વડે ભાગતાં; $n = 16$

(b) પગલું 1 : બંને બાજુમાંથી 7 બાદ કરતાં
પગલું 2 : બંને બાજુને 5 વડે ભાગતાં; $m = 2$

(c) પગલું 1 : બંને બાજુને 3 વડે ગુણતાં
પગલું 2 : બંને બાજુને 20 વડે ભાગતાં $p = 6$

(d) પગલું 1 : બંને બાજુને 10 વડે ગુણતાં
પગલું 2 : બંને બાજુએ 3 વડે ભાગતાં; $p = 20$

4. (a) $p = 10$ (b) $p = 9$ (c) $p = 20$ (d) $p = -15$ (e) $p = 8$ (f) $s = -3$

(g) $s = -4$ (h) $s = 0$ (i) $q = 3$ (j) $q = 3$ (k) $q = -3$ (l) $q = 3$

સ્વાધ્યાય 4.3

1. (a) $y = 8$ (b) $t = \frac{-18}{5}$ (c) $a = -5$ (d) $q = -8$ (e) $x = -4$ (f) $x = \frac{5}{2}$

(g) $m = \frac{1}{2}$ (h) $z = -2$ (i) $l = \frac{4}{9}$ (j) $b = 12$

2. (a) $x = 2$ (b) $n = 12$ (c) $n = -2$ (d) $x = -4$ (e) $x = 0$

3. (a) $p = \frac{14}{5}$ (b) $p = \frac{6}{5}$ (c) $t = 2$ (d) $p = 7$ (e) $m = 2$

4. (a) શક્ય સમીકરણો : $10x + 2 = 22$; $\frac{x}{5} = \frac{2}{5}$; $5x - 3 = 7$

(b) શક્ય સમીકરણો : $3x = -6$; $3x + 7 = 1$; $3x + 10 = 4$

સ્વાધ્યાય 4.4

1. (a) $8x + 4 = 60$; $x = 7$ (b) $\frac{x}{5} - 4 = 3$; $x = 35$ (c) $\frac{3}{4}$ Y $+ 3 = 21$; $y = 24$

(d) $2m - 11 = 15$; $m = 13$ (e) $50 - 3x = 8$; $x = 14$ (f) $\frac{x+19}{5} = 8$; $x = 21$

(g) $\frac{5n}{2} - 7 = 23$; $n = 12$

2. (a) સૌથી ઓછો સ્કોર = 40 (b) દરેક 70° (c) સચિન 132 રન, રાહુલ 66 રન

3. (i) 6 (ii) 15 વર્ષ (iii) 25 **4.** 30

સ્વાધ્યાય 5.1

1. (i) 70° (ii) 27° (iii) 33°

2. (i) 75° (ii) 93° (iii) 26°

3. (i) પૂરકકોણ (ii) કોટિકોણ (iii) પૂરકકોણ

(iv) પૂરકકોણ (v) કોટિકોણ (vi) કોટિકોણ

4. 45° **5.** 90° **6.** $\angle 1$માં થતાં ઘટાડા જેટલા જ માપનો વધારો $\angle 2$માં થશે.

7. (i) ના (ii) ના (iii) હા **8.** 45° કરતાં ઓછા

9. (i) હા (ii) ના (iii) હા (iv) હા (v) હા (vi) $\angle$COB

10. (i) $\angle 1, \angle 4$; $\angle 5, \angle 2 + \angle 3$ (ii) $\angle 1, \angle 5$; $\angle 4, \angle 5$

11. $\angle 1$ અને $\angle 2$ આસન્ન ખૂણા નથી કારણ કે તેમનું શિરોબિંદુ સામાન્ય નથી.

12. (i) $x = 55°$, $y = 125°$, $z = 125°$ (ii) $x = 115°$, $y = 140°$, $z = 40°$

13. (i) 90° (ii) 180° (iii) પૂરકકોણ (iv) રૈખિક જોડ (v) સરખા (vi) ગુરુકોણ

14. (i) $\angle AOD, \angle BOC$ (ii) $\angle EOA, \angle AOB$ (iii) $\angle EOB, \angle EOD$

(iv) $\angle EOA, \angle EOC$ (v) $\angle AOB, \angle AOE; \angle AOE, \angle EOD; \angle EOD, \angle COD$

સ્વાધ્યાય 5.2

1. (i) અનુકોણ (ii) યુગ્મકોણ (iii) છેદિકાની એક જ બાજુએ આવેલા અંતઃકોણો જે પૂરકકોણની જોડ બનાવે છે.

2. (i) $\angle 1, \angle 5; \angle 2, \angle 6; \angle 3, \angle 7; \angle 4, \angle 8$ (ii) $\angle 2, \angle 8; \angle 3, \angle 5$

(iii) $\angle 2, \angle 5; \angle 3, \angle 8$ (iv) $\angle 1, \angle 3; \angle 2, \angle 4; \angle 5, \angle 7; \angle 6, \angle 8$

3. $a = 55°; b = 125°; c = 55°; d = 125°; e = 55°; f = 55°;$

4. (i) $x = 70°$ (ii) $x = 100°$

5. (i) $\angle DGC = 70°$ (ii) $\angle DEF = 70°$

6. (i) l એ mને સમાંતર નથી. (ii) l એ mને સમાંતર નથી.

(iii) l એ mને સમાંતર છે. (iv) l એ mને સમાંતર નથી.

સ્વાધ્યાય 6.1

1. વેધ, મધ્યગા, ના

સ્વાધ્યાય 6.2

1.	(i) 120°	(ii) 110°	(iii) 70°	(iv) 120°	(v) 100°	(vi) 90°
2.	(i) 65°	(ii) 30°	(iii) 35°	(iv) 60°	(v) 50°	(vi) 40°

સ્વાધ્યાય 6.3

1.	(i) 70°	(ii) 60°	(iii) 40°	(iv) 65°	(v) 60°	(vi) 30°

2. (i) $x = 70°, y = 60°$ (ii) $x = 50°, y = 80°$ (iii) $x = 110°, y = 70°$

(iv) $x = 60°, y = 90°$ (v) $x = 45°, y = 90°$ (iv) $x = 60°, y = 60°$

સ્વાધ્યાય 6.4

1. (i) અશક્ય (ii) શક્ય (iii) અશક્ય

2. (i) હા (ii) હા (iii) હા **3.** હા **4.** હા **5.** હા

6. 3 અને 27 વચ્ચે

સ્વાધ્યાય 6.5

1. 26 સેમી **2.** 24 સેમી **3.** 9 મી **4.** (i) અને (iii) **5.** 18 મી **6.** (ii)

7. 98 સેમી **8.** 68 સેમી

સ્વાધ્યાય 7.1

1. (a) તેમની લંબાઈ સરખી છે. (b) 70° (iii) $m\angle A = m\angle B$

3. $\angle A \leftrightarrow \angle F, \angle B \leftrightarrow \angle E, \angle C \leftrightarrow \angle D,$ $\overline{AB} \leftrightarrow \overline{FE}, \overline{BC} \leftrightarrow \overline{ED}, \overline{AC} \leftrightarrow \overline{FD}$

4. (i) $\angle C$ (ii) $\overline{CA}$ (iii) $\angle A$ (iv) $\overline{BA}$

સ્વાધ્યાય 7.2

1. (a) **બાબાબા** આધારે એકરૂપતા (b) **બાખૂબા**ને આધારે એકરૂપતા
   (c) **ખૂબાખૂ**ને આધારે એકરૂપતા (d) **કાકબા**ને આધારે એકરૂપતા
2. (a) (i) PE (ii) EN (iii) PN (b) (i) EN (ii) AT
   (c) (i) $\angle RAT = \angle EPN$ (ii) $\angle ATR = \angle PNE$
3. (i) આપેલ છે (ii) આપેલ છે (iii) સામાન્ય (iv) **બાખૂબા**ને આધારે એકરૂપતા **4.** ના
5. ΔWON **6.** $\Delta BTA, \Delta TPQ$ **9.** BC = QR, **ખૂબાખૂ**ને આધારે એકરૂપતા

સ્વાધ્યાય 8.1

1. (a) 10 : 1 (b) 500 : 7 (c) 100 : 3 (d) 20 : 1 **2.** 12 કમ્પ્યૂટર
3. (i) રાજસ્થાન : 190 લોકો; યુપી : 830 લોકો (ii) રાજસ્થાન

સ્વાધ્યાય 8.2

1. (a) 12.5% (b) 125% (c) 7.5% (d) $28\frac{4}{7}\%$
2. (a) 65% (b) 210% (c) 2% (d) 1235%
3. (i) $\frac{1}{4}$;25% (ii) $\frac{3}{5}$;60% (iii) $\frac{3}{8}$;37.5%
4. (a) 37.5 (b) $\frac{3}{5}$ મિનિટ અથવા 36 સેકન્ડ (c) 500 (d) 0.75 કિગ્રા અથવા 750 ગ્રામ
5. (a) 12000 (b) ₹ 9,000 (c) 1250 કિમી (d) 20 મિનિટ (e) 500 લિટર
6. (a) 0.25; $\frac{1}{4}$ (b) 1.5; $\frac{3}{2}$ (c) 0.2; $\frac{1}{5}$ (d) 0.05; $\frac{1}{20}$ **7.** 30%
8. 40%; 6000 **9.** ₹ 40000 **10.** 5 મેચ

સ્વાધ્યાય 8.3

1. (a) નફો = ₹ 75, નફો = 30% (b) નફો = ₹ 1500, નફો = 12.5%
   (c) નફો = ₹ 500, નફો = 20% (d) ખોટ = ₹ 100, ખોટ = 40%
2. (a) 75%, 25% (b) 20%, 30%, 50 % (c) 20%, 80% (d) 12.50%, 25%, 62.5%
3. 2% **4.** $5\frac{5}{7}\%$ **5.** ₹ 12,000 **6.** ₹ 16,875
7. (i) 12% (ii) 25 ગ્રામ **8.** ₹ 233.75 **9.** (a) ₹ 1,632 (b) ₹ 8,625
10. 0.25% **11.** ₹ 500

સ્વાધ્યાય 9.1

1. (i) $\frac{-2}{3}, \frac{-1}{2}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{7}$ (ii) $\frac{-3}{2}, \frac{-5}{3}, \frac{-8}{5}, \frac{-10}{7}, \frac{-9}{5}$

(iii) $\frac{-35}{45}\left(=\frac{-7}{9}\right), \frac{-34}{45}, \frac{-33}{45}\left(\frac{-11}{15}\right), \frac{-32}{45}, \frac{-31}{45}$ (iv) $\frac{-1}{3}, \frac{-1}{4}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$

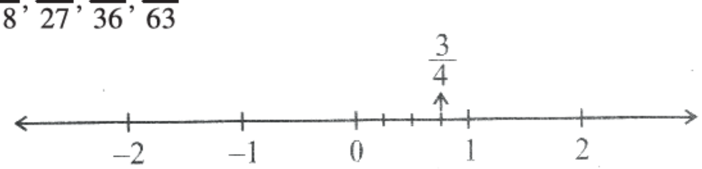
2. (i) $\frac{-15}{25}, \frac{-18}{30}, \frac{-21}{35}, \frac{-24}{40}$ (ii) $\frac{-4}{16}, \frac{-5}{20}, \frac{-6}{24}, \frac{-7}{28}$

(iii) $\frac{5}{-30}, \frac{6}{-36}, \frac{7}{-42}, \frac{8}{-48}$ (iv) $\frac{8}{-12}, \frac{10}{-15}, \frac{12}{-18}, \frac{14}{-21}$

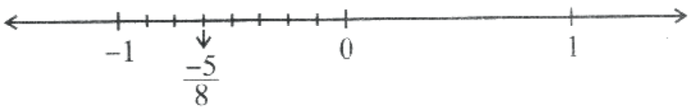
3. (i) $\frac{-4}{14}, \frac{-6}{21}, \frac{-8}{28}, \frac{-10}{35}$ (ii) $\frac{10}{-6}, \frac{15}{-9}, \frac{20}{-12}, \frac{25}{-15}$

(iii) $\frac{8}{18}, \frac{12}{27}, \frac{16}{36}, \frac{28}{63}$

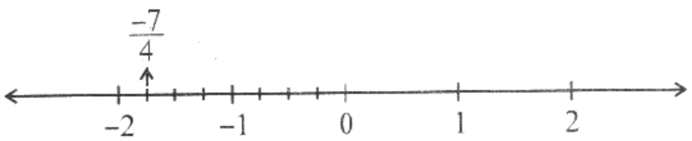
4. (i)



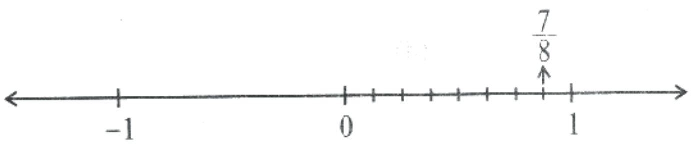
(ii)



(iii)



(iv)



5. p એ $\frac{7}{3}$ દર્શાવે છે. Q એ $\frac{8}{3}$ દર્શાવે છે. R એ $\frac{-4}{3}$ દર્શાવે છે. S એ $\frac{-5}{3}$ દર્શાવે છે.

6. (ii), (iii), (v)

7. (i) $\frac{-4}{3}$ (ii) $\frac{5}{9}$ (iii) $\frac{-11}{18}$ (iv) $\frac{-4}{5}$

8. (i) $<$ (ii) $<$ (iii) $=$ (iv) $>$ (v) $<$ (vi) $=$ (vii) $>$

9. (i) $\frac{5}{2}$ (ii) $\frac{-5}{6}$ (iii) $\frac{-2}{3}$ (iv) $\frac{1}{4}$ (v) $-3\frac{2}{7}$

10. (i) $\frac{-3}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}$ (ii) $\frac{-4}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{9}$ (iii) $\frac{-3}{2}, \frac{-3}{4}, \frac{-3}{7}$

સ્વાધ્યાય 9.2

1. (i) $\frac{-3}{2}$ (ii) $\frac{34}{15}$ (iii) $\frac{17}{30}$ (iv) $\frac{82}{99}$

(v) $\frac{-26}{57}$ (vi) $\frac{-2}{3}$ (vii) $\frac{34}{15}$

2. (i) $\frac{-13}{72}$ (ii) $\frac{23}{63}$ (iii) $\frac{1}{195}$ (iv) $\frac{-89}{88}$ (v) $\frac{-73}{9}$

3. (i) $\frac{-63}{8}$ (ii) $\frac{-27}{10}$ (iii) $\frac{-54}{55}$ (iv) $\frac{-6}{35}$ (v) $\frac{6}{55}$ (vi) 1

4. (i) –6 (ii) $\frac{-3}{10}$ (iii) $\frac{4}{15}$ (iv) $\frac{-1}{6}$ (v) $\frac{-14}{13}$

(vi) $\frac{91}{24}$ (vii) $\frac{-15}{4}$

સ્વાધ્યાય 11.1

1. (i) 150000 ચોમી (ii) ₹ 1,500,000,000

2. 6400 ચોમી **3.** 20 મી, 84 મી **4.** 15 સેમી, 525 ચોસેમી **5.** 40 મી

6. 31 સેમી; ચોરસ **7.** 35 સેમી; 1050 ચોસેમી **8.** ₹ 284

સ્વાધ્યાય 11.2

1. (a) 28 ચોસેમી (b) 15 ચોસેમી (c) 8.75 ચોસેમી (d) 24 ચોસેમી (e) 8.8 ચોસેમી

2. (a) 6 ચોસેમી (b) 8 ચોસેમી (c) 6 ચોસેમી (d) 3 ચોસેમી

3. (a) 12.3 સેમી (b) 10.3 સેમી (c) 5.8 સેમી (d) 1.05 સેમી

4. (a) 11.6 સેમી (b) 80 સેમી (c) 15.5 સેમી

5. (a) 91.2 ચોસેમી (b) 11.4 સેમી

6. BMની લંબાઈ = 30 સેમી, DLની લંબાઈ = 42 સેમી

7. ΔABCનું ક્ષેત્રફળ = 30 ચોસેમી, ADની લંબાઈ = $\frac{60}{13}$ સેમી

8. ΔABCનું ક્ષેત્રફળ = 27 ચોસેમી, CEની લંબાઈ = 7.2 સેમી

સ્વાધ્યાય 11.3

1. (a) 88 સેમી (b) 176 મિમી (c) 132 સેમી

2. (a) 616 ચોમિમી (b) 1886.5 ચોમી (c) $\frac{550}{7}$ ચોસેમી

3. 24.5 મી; 1886.5 ચોમી **4.** 132 મી; ₹ 528 **5.** 21.98 ચોસેમી

6. 4.71 મી; ₹ 70.65 **7.** 25.7 સેમી **8.** ₹ 30.14 (લગભગ)

9. 7 સેમી; 154 ચોસેમી, 11 સેમી વર્તુળ **10.** 536 ચોસેમી **11.** 23.44 ચોસેમી

12. 5 સેમી; 78.5 ચોસેમી **13.** 879.20 ચોમી **14.** હા

15. 119.32 મી; 56.52 મી **16.** 200 વખત **17.** 94.2 સેમી

સ્વાધ્યાય 11.4

1. 1750 ચોમી; 0.675 હેક્ટર **2.** 1176 ચોમી **3.** 30 ચોસેમી

4. (i) 63 ચોમી (ii) ₹ 12,600 **5.** (i) 116 ચો. મી. (ii) ₹ 31, 360 **6.** 0.99 હેક્ટર; 20.01 હેક્ટર

7. (i) 441 ચોમી (ii) ₹ 48,510 **8.** હા, 9.12 સેમી દોરડું બાકી રહ્યું

9. (i) 50 ચોમી (ii) 12.56 ચોમી (iii) 37.44 ચો. મી (iv) 12.56 મી

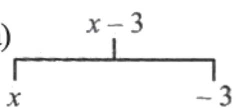
10. (i) 110 ચોસેમી (ii) 150 ચોસેમી^{2}, **11.** 66 ચોસેમી

સ્વાધ્યાય 12.1

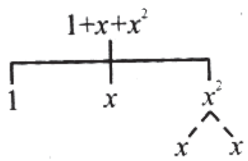
1. (i) $y-z$ (ii) $\frac{1}{2}(x+y)$ (iii) z^2 (iv) $\frac{1}{4}pq$ (v) x^2+y^2 (vi) $5+3mn$

(vii) $10-yz$ (viii) $ab-(a+b)$

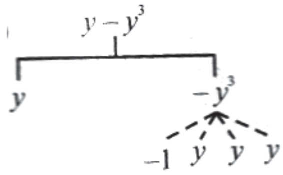
2. (i) (a)



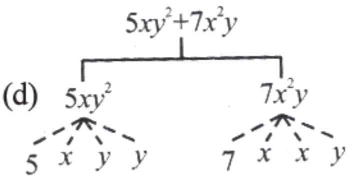
(b)



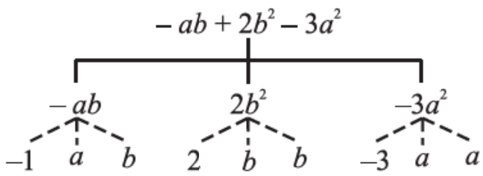
(c)



(d)



(e)



(ii)

	પદાવલી	પદ	અવયવ
(a)	$-4x+5$	$-4x$ 5	$-4, x$ 5
(b)	$-4x+5y$	$-4x$ $5y$	$-4, x$ $5, y$
(c)	$5y+3y^2$	$5y$ $3y^2$	$5, y$ $3, y, y$
(d)	$xy+2x^2y^2$	xy $2x^2y^2$	x, y $2, x, x, y, y$
(e)	$pq+q$	pq q	p, q q

(f)	$1.2ab-2.4b+3.6a$	$1.2ab$ $-2.4b$ $3.6a$	$1.2, a, b$ $-2.4, b$ $3.6, a$
(g)	$\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}x, \frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}, x, \frac{1}{4}$
(h)	$0.1p^2+0.2q^2$	$0.1p^2$ $0.2q^2$	$0.1, p, p$ $0.2, q, q$

3.

	પદાવલી	પદ	સહગુણક
(i)	$5-3t^2$	$-3t^2$	-3
(ii)	$1+t+t^2+t^3$	t t^2 t^3	1 1 1
(iii)	$x+2xy+3y$	x $2xy$ $3y$	1 2 3
(iv)	100m + 1000n	100m 1000n	100 1000
(v)	$-p^2q^2+7pq$	$-p^2q^2$ $7pq$	-1 7
(vi)	$1.2a+0.8b$	$1.2\,a$ $0.8b$	1.2 0.8
(vii)	$3.14r^2$	$3.14r^2$	3.14
(viii)	$2(l+b)$	$2l$ $2b$	2 2
(ix)	$0.1y+0.01y^2$	$0.1y$ $0.01y^2$	0.1 0.01

4. (a)

	અભિવ્યક્તિ	x સાથેનું પદ	xનો સહગુણક
(i)	y^2x+y	y^2x	y^2
(ii)	$13y^2-8yx$	$-8yx$	$-8y$
(iii)	$x+y+2$	x	1
(iv)	$5+z+zx$	zx	z

(v)	$1 + x + xy$	x xy	1 y
(vi)	$12xy^2 + 25$	$12xy^2$	$12y^2$
(vii)	$7 + xy^2$	xy^2	y^2

(b)

	અભિવ્યક્તિ	y^2 સાથેનું પદ	y^2નો સહગુણક
(i)	$8 - xy^2$	$-xy^2$	$-x$
(ii)	$5y^2 + 7x$	$5y^2$	5
(iii)	$2x^2y - 15xy^2 + 7y^2$	$-15xy^2$ $7y^2$	$-15x$ 7

5. (i) દ્વિપદી (ii) એકપદી (iii) ત્રિપદી (iv) એકપદી
(v) ત્રિપદી (vi) દ્વિપદી (vii) દ્વિપદી (viii) એકપદી
(ix) ત્રિપદી (x) દ્વિપદી (xi) દ્વિપદી (xii) ત્રિપદી

6. (i) સજાતીય (ii) સજાતીય (iii) વિજાતીય (iv) સજાતીય
(v) વિજાતીય (vi) વિજાતીય

7. (a) $-xy^2, 2xy^2; -4yx^2; 20x^2y, 8x^2, -11x^2, -6x^2; -7y, y; -100x, 3x; -11yx, 2xy.$
(b) $10pq, -7qp, 78qp, 7p, 2405p; 8q, -100q, -p^2q^2, 12q^2p^2; -23, 41; -5p^2, 701p^2; 13p^2q, qp^2.$

સ્વાધ્યાય 12.2

1. (i) $8b - 32$ (ii) $7z^3 + 12z^2 - 20z$ (iii) $p - q$ (iv) $a + ab$
(v) $8x^2y + 8xy^2 - 4x^2 - 7y^2$ (vi) $4y^2 - 3y$

2. (i) $2mn$ (ii) $-5tz$ (iii) $12mn - 4$ (iv) $a + b + 3$
(v) $7x + 5$ (vi) $3m - 4n - 3mn - 3$ (vii) $9x^2y - 8xy^2$
(viii) $5pq + 20$ (ix) 0 (x) $-x^2 - y^2 - 1$

3. (i) $6y^2$ (ii) $-18xy$ (iii) $2b$ (iv) $5a + 5b - 2ab$
(v) $5m^2 - 8mn + 8$ (vi) $x^2 - 5x - 5$ (vii) $10ab - 7a^2 - 7b^2$ (viii) $8p^2 + 8q^2 - 5pq$

4. (a) $x^2 + 2xy - y^2$ (b) $5a + b - 6$ **5.** $4x^2 - 3y^2 - xy$

6. (a) $-y + 11$ (a) $2x + 4$

સ્વાધ્યાય 12.3

1. (i) 0 (ii) 1 (iii) –1 (iv) 1 (v) 1

2. (i) –1 (ii) –13 (iii) 3 **3.** (i) –9 (ii) 3 (iii) 0 (iv) 1

4. (i) 8 (ii) 4 (iii) 0 **5.** (i) –2 (ii) 2 (iii) 0 (iv) 2

6. (i) $5x - 13; -3$ (ii) $8x - 1; 15$ (iii) $11x - 10; 12$ (iv) $11x + 7; 29$

7. (i) $2x + 4; 10$ (ii) $-4x + 6; -6$ (iii) $-5a + 6; 11$ (iv) $-8b + 6; 22$

(v) $3a - 2b - 9; -8$

8. (i) 1000 (ii) 20 **9.** –5 **10.** $2a^2 + ab + 3;\ 38$

સ્વાધ્યાય 12.4

1.

સંકેત	આકડાઓની સંખ્યા	અવયવ
6	5 10 100	26 51 501
4	5 10 100	16 31 301
8	5 10 100	27 52 502

2. (i) $2n - 1 \rightarrow 100^{th}$; 199

(ii) $3n + 2 \rightarrow 5^{th}$; 17;
10^{th} : 32;
100^{th} : 302

(iii) $4n + 1 \rightarrow 5^{th}$: 21;
10^{th} : 41;
100^{th} : 401

(iv) $7n + 20 \rightarrow 5^{th}$: 55;
10^{th} : 90;
100^{th} : 720

(v) $n^2 + 1 \rightarrow 5^{th}$: 26;
10^{th} : 101

સ્વાધ્યાય 13.1

1. (i) 64 (ii) 729 (iii) 121 (iv) 625

2. (i) 6^4 (ii) t^2 (iii) b^4 (iv) $5^2 \times 7^3$ (v) $2^2 \times a^2$ (vi) $a^3 \times c^4 \times d$

3. (i) 2^9 (ii) 7^3 (iii) 3^6 (iv) 5^5

4. (i) 3^4 (ii) 3^5 (iii) 2^8 (iv) 2^{100} (v) 2^{10}

5. (i) $2^3 \times 3^4$ (ii) 5×3^4 (iii) $2^2 \times 3^3 \times 5$ (iv) $2^4 \times 3^2 \times 5^2$

6. (i) 2000 (ii) 196 (iii) 40 (iv) 768 (v) 0

(iv) 675 (vii) 144 (viii) 90000

7. (i) –64 (ii) 24 (iii) 225 (iv) 8000

8. (i) $2.7 \times 10^{12} > 1.5 \times 10^8$ (ii) $4 \times 10^{14} < 3 \times 10^{17}$

સ્વાધ્યાય 13.2

1. (i) 3^{14} (ii) 6^5 (iii) a^5 (iv) 7^{x+2} (v) 5^3 (vi) $(10)^5$

(vii) $(ab)^4$ (viii) 3^{12} (ix) 2^8 (x) 8^{t-2}

2. (i) 3^3 (ii) 5^3 (iii) 5^5 (iv) 7×11^5 (v) 3^0 અથવા 1 (vi) 3

(vii) 1 (viii) 2 (ix) $(2a)^2$ (x) a^{10} (xi) a^3b (xii) 2^8

3. (i) ખોટું; $10 \times 10^{11} = 10^{12}$ અને $(100)^{11} = 10^{22}$ (ii) ખોટું; $2^3 = 8, 5^2 = 25$
(iii) ખોટું; $6^5 = 2^5 \times 3^5$ (iv) સાચું $3^0 = 1, (1000)^0 = 1$

4. (i) $2^8 \times 3^4$ (ii) $2 \times 3^3 \times 5$ (iii) $3^6 \times 2^6$ (iv) $2^8 \times 3$ **5.** (i) 98 (ii) $\frac{5t^4}{8}$ (iii) 1

સ્વાધ્યાય 13.3

1. $279404 = 2 \times 10^5 + 7 \times 10^4 + 9 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 4 \times 10^0$
$3006194 = 3 \times 10^6 + 0 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 4 \times 10^0$
$2806196 = 2 \times 10^6 + 8 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 6 \times 10^0$
$120719 = 1 \times 10^5 + 2 \times 10^4 + 0 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 9 \times 10^0$
$20068 = 2 \times 10^4 + 0 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 8 \times 10^0$

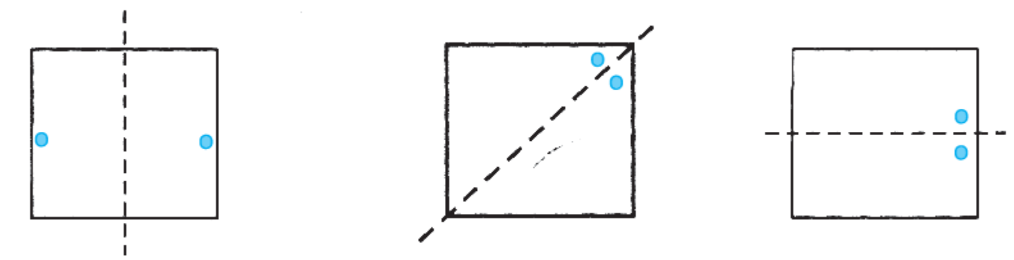
2. (a) 86045 (b) 405302 (c) 30705 (d) 900230

3. (i) 5×10^7 (ii) 7×10^6 (iii) 3.1865×10^9 (iv) 3.90878×10^5
(v) 3.90878×10^4 (vi) 3.90878×10^3

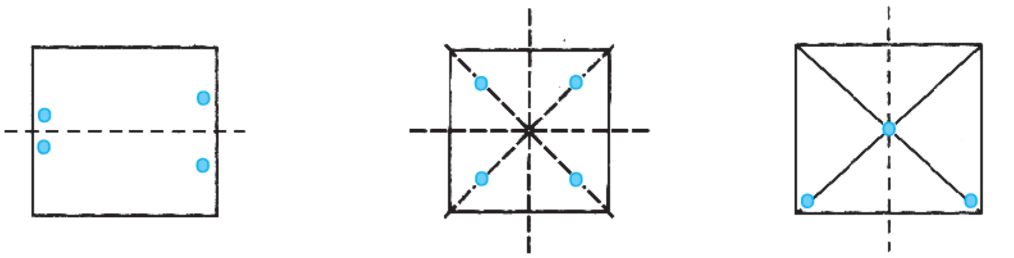
4. (a) 3.84×10^8 મીટર (b) 3×10^8 મી/સે (c) 1.2756×10^7 મી
(d) 1.4×10^9 મી (e) 1×10^{11} (f) 1.2×10^{10} વર્ષ
(g) 3×10^{20} મી (h) 6.023×10^{22} (i) 1.353×10^9 કિમી^{3}
(j) 1.027×10^9

સ્વાધ્યાય 14.1

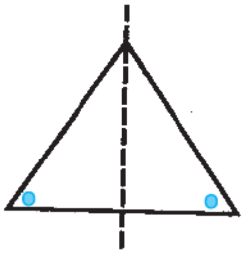
1.



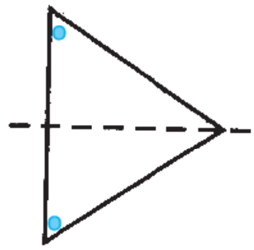
(a) (b) (c)



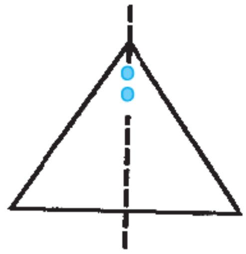
(d) (e) (f)



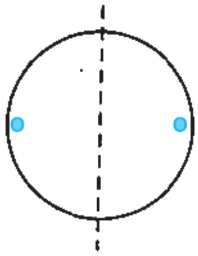
(g)



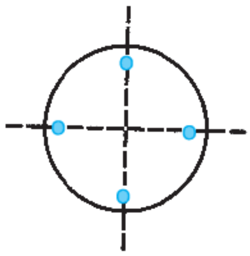
(h)



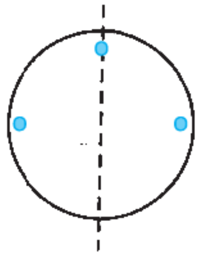
(i)



(j)

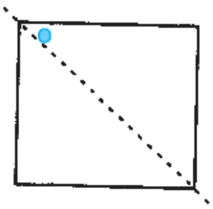


(k)

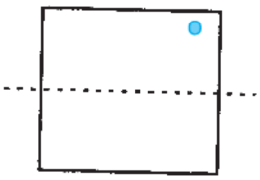


(l)

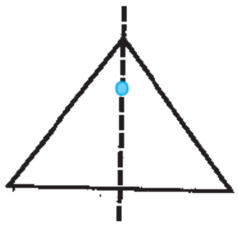
2.



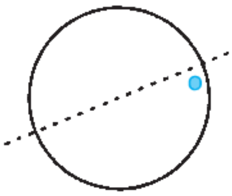
(a)



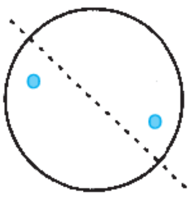
(b)



(c)

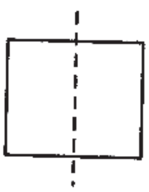


(d)

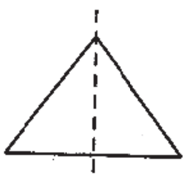


(e)

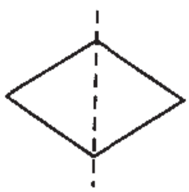
3.



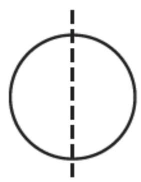
(a) ચોરસ



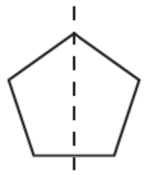
(b) ત્રિકોણ



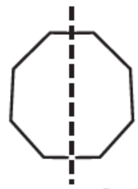
(c) સમબાજુ ચતુષ્કોણ



(d) વર્તુળ

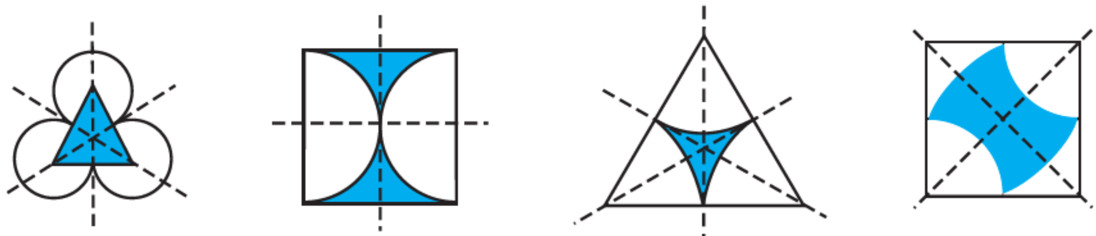


(e) પંચકોણ

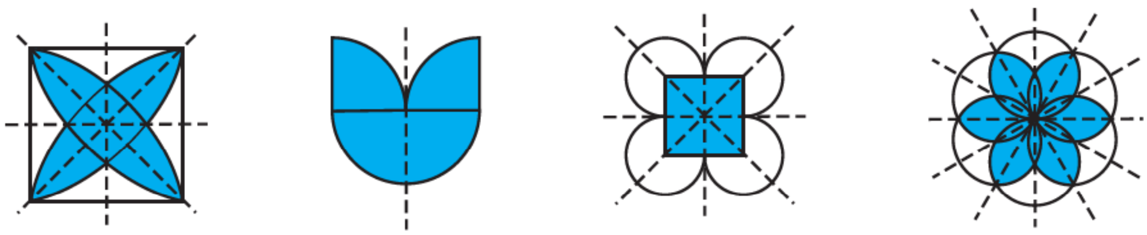


(f) અષ્ટકોણ

4.



(a) (b) (c) (d)



(e) (f) (g) (h)

7. (a) 3 (b) 1 (c) 0 (d) 4 (e) 2 (f) 2
(g) 0 (h) 0 (i) 6 (j) અમર્યાદિત અથવા અસંખ્ય

8. (a) A, H, I, M, O, T, U, V, W, X, Y (b) B, C, D, E, H, I, O, X
(C) O, X, I, H

10. (a) મધ્યગા (b) વ્યાસ

સ્વાધ્યાય 14.2

1. (a), (b), (d), (e), (f)

2. (a) 2 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 4 (f) 5
(g) 6 (h) 3

સ્વાધ્યાય 14.3

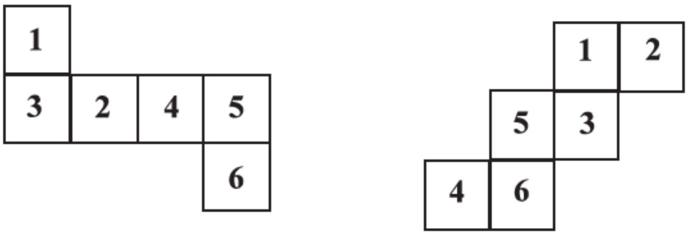
3. હા **5.** ચોરસ **6.** 120°, 180°, 240°, 300°, 360°,

7. (i) હા (ii) ના

સ્વાધ્યાય 15.1

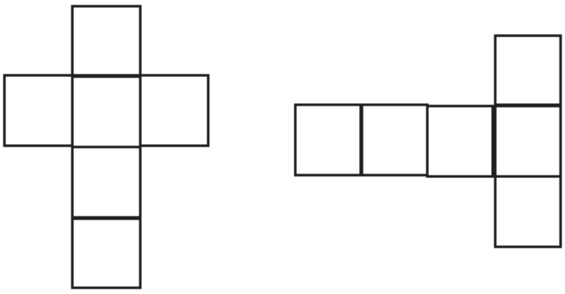
1. નેટ (ii), (iii), (iv), (vi) માં ઘન છે.

2.



3. ના, કારણ કે સામસામેની સપાટીઓ 1 અને 4 હશે કે જેમનો સરવાળો 7 નથી અને બીજી સામસામેની સપાટીની જોડ 3 અને 6 હશે તેમનો સરવાળો પણ 7 નથી.

4. ત્રણ સપાટીઓ



5. (a) (ii) (b) (iii) (c) (iv) (d) (i)

મગજ-કસો

1. કોયડા ઉકેલો :

(i) કહો હું કોણ છું ? હું કોણ છું ?
મારામાંથી સંખ્યા 8 દૂર કરવામાં આવે.
ફરીથી તેને એક ડઝન વડે ભાગવામાં આવે
ક્રિકેટની એક આખી ટીમ બને.

(ii) સંખ્યાના 6 ગણામાં 4 ઉમેરતાં
પૂરેપૂરા 64 મળી જાય !
ચોક્કસ ક્રેડિટ તમને આપવામાં આવશે.
જો કહેશો ઝડપથી તે સંખ્યા.

2. કોયડા ઉકેલો

(i) એક જંગલમાં એક જૂનું પીપળાનુંવૃક્ષ હતું.
આ ભવ્ય વૃક્ષને તેર ડાળીઓ હતી
દરેક ડાળી પર ચૌદ પક્ષીઓ રહેતા
ચકલીઓ ભૂરી, કાગડા કાળા અને પોપટ લીલા
કાગડા કરતાં પોપટ હતા બે ગણા
અને કાગડા હતા ચકલીઓ કરતાં બે ગણા !
મારે જાણવું છે કે દરેક પ્રકારના કેટલા પક્ષી છે ?
તમે અમને મદદ કરવા આવી ન શકો ?

(ii) મારી પાસે કેટલાક પાંચ રૂપિયાના અને કેટલાક બે રૂપિયાના સિક્કા છે. બે રૂપિયાના સિક્કાની સંખ્યા પાંચ રૂપિયાના સિક્કાની સંખ્યા કરતાં બમણી છે. મારી પાસે કુલ 108 રૂપિયા છે. તો મારી પાસે પાંચ રૂપિયાના કેટલા સિક્કા હશે અને બે રૂપિયાના કેટલા સિક્કા હશે ?

3. મારી પાસે 2 વેટ છે. જે દરેક 2 છાજલીના બનેલા છે. દરેક છાજલી પર 2 બિલાડીઓ બેઠી છે. દરેક બિલાડીએ 2 મજાની ટોપીઓ પહેરેલી છે. દરેક ટોપી પર બે પાતળા ઉંદર દોરેલા છે. દરેક ઉંદર પર બે કાળા બેટ છે. આ વેટમાં કેટલી વસ્તુઓ હશે ?

4. 27 નાના ઘન ભેગા થઈ એક મોટો ઘન બનાવે છે. આ મોટા ઘનનો બહારનો ભાગ પીળા રંગથી રંગેલ છે. 27 નાના ઘનમાંનાં કેટલા ઘન પીળા રંગથી રંગેલા દેખાશે ?

   (i) જો તેની એક સપાટી હોય તો
   (ii) જો તેની બે સપાટી હોય તો
   (iii) જો તેની ત્રણ સપાટી હોય તો

5. રાહુલને તેના બગીચામાં રહેલા ઝાડની ઊંચાઈ શોધવી છે. તેણે તેની ઊંચાઈ અને તેના પડછાયાની લંબાઈનો ગુણોત્તર શોધી કાઢ્યો તે 4:1 હતો. પછી તેણે ઝાડના પડછાયાની લંબાઈ માપી તે 15 ફૂટ હતી તો ઝાડની ઊંચાઈ કેટલી હતી ?

6. એક કઠિયારાને લાકડાના 3 બ્લોક બનાવતાં 12 મિનિટ લાગે છે. આ જ રીતના 5 બ્લોક બનાવવા તેને કેટલો સમય જોઈશે ?

7. કપડાંને ધોવામાં આવે ત્યારે કપડાંને 0.5 % ઘસારો પડે છે. આ ઘસારો કયો અપૂર્ણાંક છે ?

8. સ્મિતાની માતા 34 વર્ષનાં છે. બે વર્ષ પછી તેની માતાની ઊંમર સ્મિતાની ઊંમર કરતાં 4 ગણી થશે તો સ્મિતાની હાલની ઊંમર કેટલી હશે ?

9. માયા, મધુરા અને મોહસિના એક જ વર્ગમાં અભ્યાસ કરતાં મિત્રો છે. વર્ગની ભૂગોળની પરીક્ષામાં માયાએ 25માંથી 16 અને મધુરાએ 20 ગુણ મેળવ્યાં. જો તેમના સરાસરી ગુણ 19 હોય તો મોહસિનાએ કેટલા ગુણ મેળવ્યા હશે ?

જવાબો :

1. (i) 140 (ii) 10

2. (i) ચકલીઓ 104, કાગડા 52 અને પોપટ 26

(ii) 5 રૂપિયાના સિક્કા-12, 2 રૂપિયાના સિક્કા-24

3. 124 **4.** (i) 6 (ii) 10 (iii) 8 **5.** 60 ફૂટ

6. 24 મિનિટ **7.** $\frac{1}{200}$ **8.** 7 વર્ષ **9.** 21